República de Honduras
Secretaría de Educación

7

Libro del Estudiante
Séptimo grado

III Ciclo
Educación Básica

Matemáticas

ORIENTACIONES SOBRE EL USO DEL LIBRO DEL ESTUDIANTE

Queridos Estudiantes:

La Secretaría de Estado en el Despacho de Educación de Honduras con mucha satisfacción le entrega este **Libro del Estudiante**, para que lo use en el aprendizaje de las Matemáticas. El mismo pertenece a su centro educativo, por lo tanto, debe apreciarlo, cuidarlo y tratarlo con mucho cariño para que pueda ser utilizado en años posteriores. Para cuidarlo le sugerimos lo siguiente:

1. Forre el **Libro del Estudiante** con papel y/o plástico, y sobre el forro escriba su nombre, grado, sección a la que pertenece, el nombre del docente y del centro educativo.

2. Evite rayar, manchar o romper las partes internas o externas del **Libro**, para que al devolverlo el mismo esté en buenas condiciones.

3. Todos los ejercicios propuestos en el **Libro** debe desarrollarlos en su cuaderno de Matemáticas.

4. Está permitido llevar a su casa el **Libro**, cuidando que otras personas que conviven con usted no se lo manchen, rayen o rompan.

5. Recuerde llevar el **Libro** al centro educativo todos los días que tenga la clase de Matemáticas.

6. Antes de usar su **Libro**, por favor lávese y séquese las manos, evite las comidas y bebidas cuando trabaje en él; asimismo, limpie muy bien la mesa o el lugar donde lo utilice.

7. Tenga cuidado de usar su **Libro** como objeto para jugar, evite tirarlo o sentarse en él.

8. Al pasar las hojas o buscar el tema en el **Libro**, debe tener cuidado de no doblarles las esquinas, rasgarlas o romperlas; también cuide que no se desprendan las hojas por el mal uso.

Recuerde que este **Libro** es una herramienta de apoyo para usted, por lo que debe conservarlo muy bonito, aseado y sobre todo evitar perderlo, porque no lo encontrará a la venta.

Presentación

La Secretaría de Educación presenta el "**Libro del Estudiante" de Séptimo Grado del área de Matemáticas para el Tercer Ciclo de Educación Básica**, que tiene su fundamento en el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica (DCNEB), mismo que fue revisado y ajustado por un equipo técnico en el marco del Proyecto Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemáticas (PROMETAM FASE III).

Con el uso de este Libro y con la ayuda del docente podrá aprender mayores conocimientos de matemáticas, encontrándole sentido a estos, ya que proponen situaciones de la vida diaria donde se aplican conceptos y procedimientos, además con el desarrollo de las actividades planteadas se comprenderá cada vez más, permitiendo apreciar las matemáticas como un quehacer humano y un medio para desenvolverse en la vida.

En la búsqueda del camino hacia una nueva Honduras, el recurso humano es el único capaz de generar riquezas a través de la aplicación de sus conocimientos, competencias y acciones; por lo que se espera que los educandos se comprometan a elevar su nivel educativo para incorporarse al mercado laboral.

Secretario de Estado
en el Despacho de Educación

Índice

Unidad 1

Números positivos y negativos

Lección 1: Números positivos y negativos

Lección 2: Adición y sustracción de números positivos y negativos

Lección 3: Multiplicación y división de números positivos y negativos

Unidad 1

Números positivos y negativos

Lección 1: Números positivos y negativos

Sección 1: Uso de los números positivos y negativos

En algunas situaciones se utilizan números que llevan el signo “−” a la izquierda.

En el mapa la derecha se presentan las temperaturas de algunas ciudades de Norte América y Centro América.

Tomando 0 °C como el punto referencia, una temperatura menor que 0 °C se expresa con el signo “−”.

Por ejemplo, la temperatura que es 4 °C más baja que 0 °C, se expresa como −4 °C y se lee “negativo” 4 °C.

Ejemplo 1.1

a) ¿Qué ciudades tienen una temperatura más baja que 0 °C?
b) ¿Qué ciudades tienen una temperatura más alta que 0 °C?

Respuesta:
a) Ottawa (−8 °C) y Denver (−5 °C)
b) New York (4 °C), Los Angeles (22 °C), Monterrey (28 °C) y Tegucigalpa (30 °C)

Si la temperatura es más alta que 0 °C, se puede expresar con el signo “+” como +3 °C y se lee “positivo” 3 °C.

Ejemplo 1.2

Observando el mapa de la página anterior, las temperaturas en New York y Ottawa son 4 ºC y − 8 ºC respectivamente. Complete las siguientes explicaciones.

a) La temperatura en New York es más alta que 0°C.

La temperatura que es $\boxed{}$ °C más alta que 0°C se expresa $\boxed{}$ °C y se lee "positivo" $\boxed{}$ °C.

b) La temperatura en Ottawa es más baja que 0°C.

La temperatura que es $\boxed{}$ °C más baja que 0°C se expresa $\boxed{}$ °C y se lee "negativo" $\boxed{}$ °C.

Respuesta:

a) La temperatura que es $\boxed{4}$ °C más alta que 0°C se expresa $\boxed{+4}$ °C y se lee "positivo $\boxed{4}$ °C".

b) La temperatura que es $\boxed{8}$ °C más baja que 0°C se expresa $\boxed{-8}$ °C y se lee "negativo $\boxed{8}$ °C".

Usando números con el signo positivo o negativo se puede expresar la posición relativa con respecto al punto de referencia.

Cuando se expresa un número negativo se debe escribir con el signo "−"
(ejemplo) -3, -2.3, $-\frac{3}{5}$

Cuando se expresa un número positivo, se puede escribir sin el signo "+"
(ejemplo) 5, 4.2, $\frac{3}{7}$, $+3$, $+0.8$, $+\frac{2}{5}$

$+5 = 5$

Ejemplo 1.3

Exprese las siguientes temperaturas con el signo positivo o el signo negativo.

a) 12 ºC más baja que 0 ºC b) 7 ºC más alta que 0 ºC

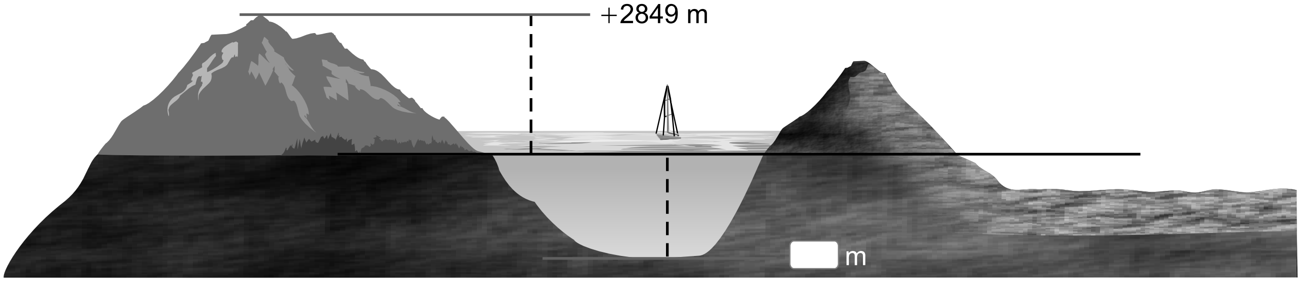
Respuesta: a) -12 ºC b) $+7$ ºC

Ejercicio 1.1 Exprese las siguientes temperaturas con el signo positivo o el signo negativo.

a) 5 ºC más alta que 0 ºC b) 15 ºC más baja que 0 ºC

c) 8 ºC más baja que 0 ºC d) 28 ºC más alta que 0 ºC

Ejemplo 1.4 La cumbre de la montaña de Celaque está a 2849 m sobre el nivel del mar. Si se expresa la altura con +2849 m tomando como punto de referencia el nivel del mar, ¿cómo se expresa 2000 m bajo el nivel del mar?



Respuesta: −2000 m

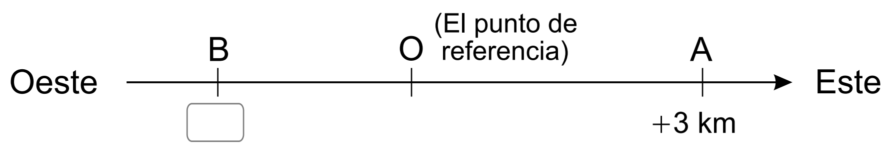
Ejercicio 1.2 Tomando como punto de referencia el nivel del mar conteste.

a) ¿Cómo se expresa la altura del Monte Everest si está a 8848 m sobre el nivel del mar?

b) Una fosa abisal tiene una posición de −3122 m. ¿Está sobre o bajo el nivel del mar? ¿cuál es su profundidad?

Ejemplo 1.5

En una carretera que se prolonga de Oeste a Este se expresa con +3 km la posición del punto A que queda 3 km hacia al Este desde el punto O. ¿Cómo se expresa la posición del punto B que queda a 2 km hacia el Oeste del punto O?



Respuesta: −2 km

Ejercicio 1.3 Si la dirección se prolonga hacia el Este la dirección es positiva (+). Exprese la cantidad con el signo positivo o negativo tomando como punto de referencia al punto O.

a) Un auto recorre 50 km desde el punto O al punto P con dirección al Este. ¿Cómo se expresa la posición del punto P?

b) Si los recorre con dirección al Oeste, ¿cuál es la posición del punto P?

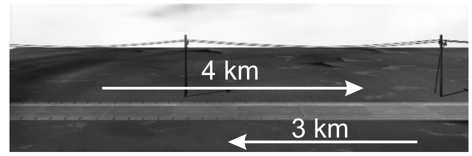
Ejercicio 1.4 Si la carretera se prolonga hacia el Norte la dirección es positiva (+) y si es hacia el Sur, la dirección es negativa (−).

a) Si el punto de referencia es O, ¿cómo se expresa la posición del punto A que está a 5 km al Norte de O?

b) Si decimos que B está a −8 km, ¿en qué dirección está ubicado B respecto de O y a qué distancia?

Ejemplo 1.6

En una carretera que se prolonga de Oeste a Este se expresa con $+4$ km, los 4 km de movimiento hacia el Este. ¿Cómo se expresa el movimiento 3 km hacia el Oeste?



Respuesta: -3 km.

Ejercicio 1.5 Si la carretera se prolonga hacia el Norte la dirección es positiva ($+$) y si es hacia el Sur la dirección es negativa ($-$).

a) ¿Hacia dónde se dirige un vehículo cuyo movimiento es de $+2$ km?

b) ¿Cómo se expresa 1 km de movimiento hacia el Sur?

Ejemplo 1.7

Si se expresa con $+15$ minutos el momento 15 minutos después de ahora, ¿cómo se expresa el momento 20 minutos antes de ahora?

Respuesta: -20 minutos

Ejercicio 1.6 Exprese usando el signo positivo o negativo el cambio del momento en el tiempo.

a) 30 minutos antes de ahora

b) 10 minutos después de ahora

c) 45 minutos después de ahora

d) 55 minutos antes de ahora

Usando los números con el signo positivo o negativo se pueden expresar las cantidades que tienen características contrarias.

Ejemplo 1.8

Si se expresa 600 lempiras de ganancia con $+600$ lempiras, exprese 300 lempiras de pérdida.

Respuesta: -300 lempiras

Ejemplo 1.9

Si se expresa como $+5$ el número que es 5 mayor que cero (0) tomando cero como punto de referencia, ¿cómo se expresa el número que es 5 menor que cero?

Respuesta: -5.

Ejercicio 1.7 Exprese los siguientes números con el signo positivo o negativo.

a) El número 4 menor que cero

b) El número 7 mayor que cero

c) El número 8 mayor que cero

d) El número 2 menor que cero

El conjunto de los **números naturales** se representa por la letra $\mathbb{N}$ y consiste en los números que sirven para contar.

$$\mathbb{N} = \{+1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, +9, +10, +11, +12, ...\}$$

El conjunto de los **números enteros** se representa por la letra $\mathbb{Z}$ y consiste en los enteros positivos (números positivos) en el número cero y los enteros negativos (números negativos).

Números enteros positivos: $+1$, $+2$, $+3$, $+4$ ...

Número cero: 0

Números enteros negativos: -1, -2, -3, -4 ...

$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, ...\}$

A partir de ahora cuando se hable de números enteros se entenderá que están incluidos los números positivos, los números negativos y el cero.

Ejemplo 1.10

Los números $+1$, $+2$, $+3$, $+4$, … ¿son naturales o enteros?

Respuesta: Son números naturales y a la vez son números enteros.

Los números -1, -2, -3, -4, … ¿son naturales o enteros?

Respuesta: Son números enteros pero no números naturales.

Todos los números naturales son números enteros pero no todos los números enteros son números naturales.
El conjunto de los números naturales está contenido en el conjunto de los números enteros.

Ejemplo 1.11

Diga cuáles de los siguientes números son enteros.

$+1.5$, 0.3, -4, -7, -0.6, 5, $\frac{1}{3}$, 0, $-\frac{4}{5}$, 8

Solución:

En los números enteros están incluidos los números enteros positivos, los números enteros negativos y el cero. $+1.5$, 0.3, -0.6, $\frac{1}{3}$, y $-\frac{4}{5}$ no son números enteros. Entonces -4, -7, 5, 0 y 8 son números enteros.

Respuesta: -4, -7, 5, 0, 8

Ejercicio 1.8 Diga ¿cuáles de los siguientes números son enteros?

$+1.3,\ 0.4,\ -7,\ -9,\ -0.8,\ 4,\ \frac{2}{4},\ 0,\ -\frac{3}{5}$

El conjunto de **números racionales** se representa por la letra "$\mathbb{Q}$" y consiste en los números que se pueden escribir en forma fraccionaria, es decir, en la forma $\frac{\triangle}{\square}$ donde $\triangle$ es número entero y $\square$ es un número entero ($\square \neq 0$).

Ejemplo 1.12 Los números $-\frac{1}{4}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{3}, -\frac{4}{2}$ ¿son enteros o racionales?

Solución:

Los cuatro números son racionales porque se pueden escribir en forma de fracción. Además, los números $-\frac{3}{3} = -1$ y $-\frac{4}{2} = -2$.

Entonces $-\frac{3}{3}, -\frac{4}{2}$ también son enteros.

Ejercicio 1.9 Los números $\frac{3}{4}, -\frac{2}{5}, -\frac{4}{4}$ y $\frac{6}{3}$ ¿son enteros o racionales?

Los números enteros son números racionales.

Ejemplo 1.13

Escriba como fracción los siguientes números decimales.

a) -0.8 b) 0.75

Solución:

a) $-0.8 = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$ b) $0.75 = \frac{75}{100} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

Entonces -0.8 y 0.75 también son números racionales.

$0.1 = \frac{1}{10}$

$0.01 = \frac{1}{100}$

Ejercicio 1.10 Escriba como fracción.

a) 0.6 b) -0.16

Generalmente un número decimal periódico también se puede escribir en forma de fracción.

Clasificación de los números decimales

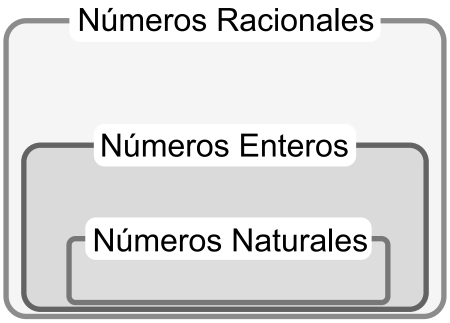
Número decimal
- Número decimal finito (0.25, 3.5) → Número racional
- Número decimal infinito
  - Número decimal Periódico (2.3666..., 0.3333..., 4.121212...) → Número racional
  - Número decimal No periódico (1.4142..., 3.1415...) → Número irracional

El concepto de número irracional se aprenderá al estudiar números reales en 9no grado.

Ejemplo 1.14

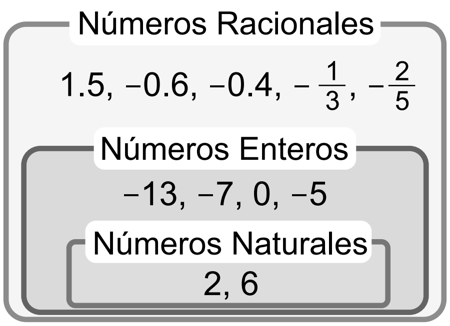
Ubique los siguientes números en el conjunto al cual pertenecen.

$-5,\ 1.5,\ -0.6,\ -7,\ -13,\ -0.4,\ 6,\ -\frac{1}{3},\ 0,\ -\frac{2}{5},\ 2$



Solución:

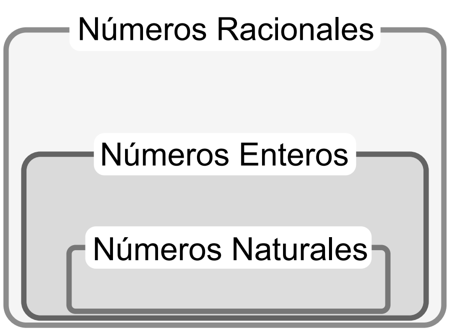
Dado el diagrama vamos a ubicar los números en el conjunto al cual pertenecen.



2 y 6 también son enteros y racionales.

Ejercicio 1.11 Ubique los siguiente números en el conjunto al cual pertenecen.

$0.2,\ -8,\ -1.4,\ 0,\ -5,\ 9,\ 13,\ \frac{1}{2},\ -\frac{2}{5},\ -7,\ 10,\ 5$



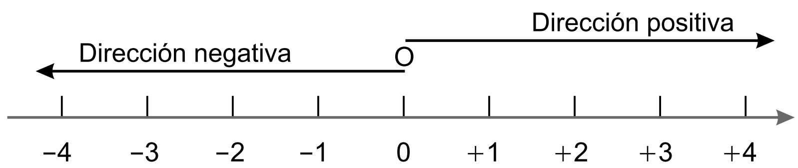
El conjunto de los números enteros está contenido en el conjunto de los números racionales.

Ejemplo 1.15

Vamos a representar los números negativos en la recta numérica.

¿Dónde se ubican los números negativos en la recta numérica?

Respuesta: Los números negativos se ubican en la recta numérica a la izquierda de cero.

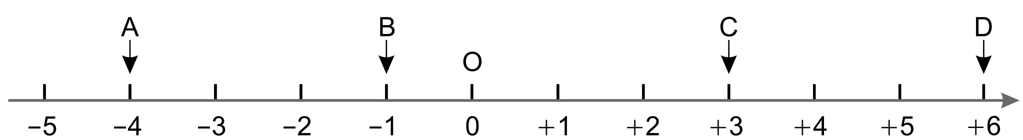


Dirección hacia la derecha (positiva)

Dirección hacia la izquierda (negativa)

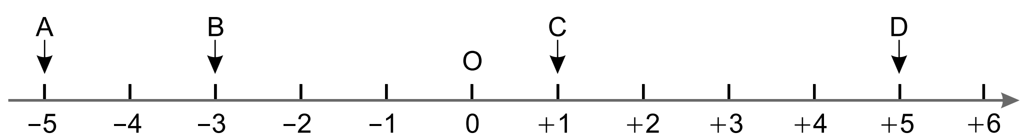
El punto que corresponde a cero se llama origen y se representa con la letra O.
La representación gráfica de un número en la recta numérica es un punto.

Ejemplo 1.16 Escriba los números que corresponden a las flechas.



Respuesta: A : −4, B : −1, C : +3, D : +6

Ejercicio 1.12 Escriba los números que corresponden a las flechas.

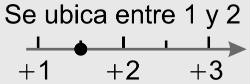


Ejemplo 1.17 Represente en la recta numérica.

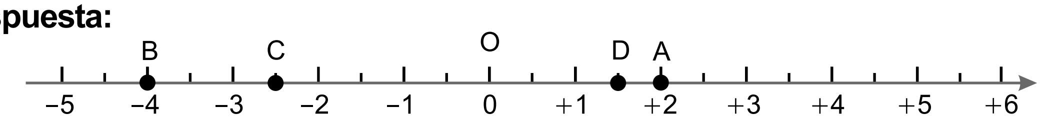
A: +2 B: −4 C: −2.5 D: $\frac{3}{2}$

Fracción impropia

$\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ Se ubica entre 1 y 2

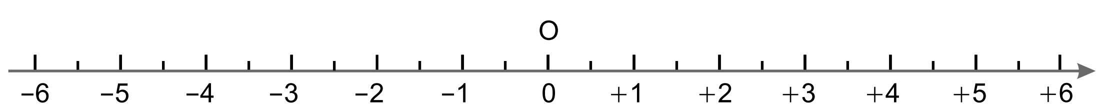


Respuesta:



Ejercicio 1.13 Represente en la recta numérica.

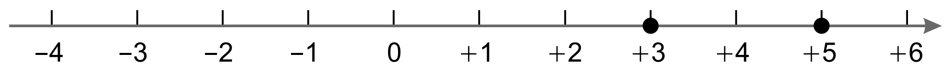
A: −2 B: +3 C: +3.5 D: $-\frac{3}{2}$



Sección 3: Relación de orden

Ejemplo 1.18

En la recta numérica, ¿cuál número está más a la derecha $+3$ ó $+5$? ¿Cuál de ellos es el mayor?



Respuesta: El $+5$ está más a la derecha. $+5$ es el mayor.

La relación $+5$ mayor que $+3$ se escribe $+5 > +3$.

> En la recta numérica, el número que está ubicado más a la derecha es mayor.

Si $+5$ es mayor que $+3$ se da que $+3$ es menor que $+5$ y se escribe $+3 < +5$.

Ejemplo 1.19

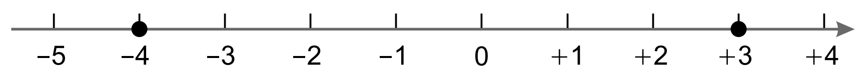
En la recta numérica escriba la relación de orden de las siguientes parejas de números:

a) -4, $+3$ b) -2, -6

Solución:

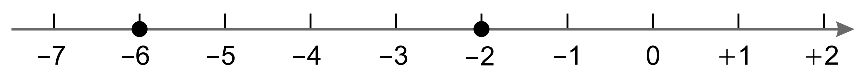
a) -4 está a la izquierda de $+3$
-4 es menor que $+3$ y se escribe $-4 < +3$

> También se puede escribir $+3 > -4$.



b) -2 está a la derecha de -6
-2 es mayor que -6 y se escribe $-2 > -6$

> También se puede escribir $-6 < -2$.

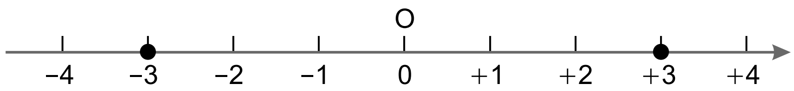


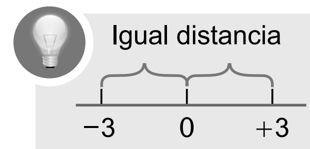
● < ■ ➡ ● menor que ■ ■ > ● ➡ ■ mayor que ●

Ejercicio 1.14 Exprese la relación de orden de los números (escribir signo $<$ ó $>$) de cada una de las siguientes parejas. Utilice una recta numérica.

a) $+3$ ___ $+8$	b) $+5$ ___ -6	c) -4 ___ $+2$
d) -8 ___ -10	e) 0 ___ -2	f) $+3$ ___ 0
g) $+11$ ___ $+9$	h) -5 ___ $+2$	i) $+10$ ___ -8

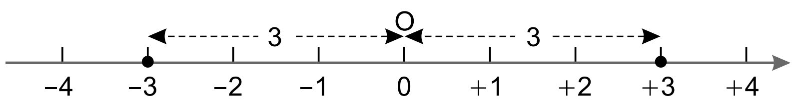
Ejemplo 1.20 ¿Cuál número está más lejos de 0 en la recta numérica $+3$ ó -3?





Respuesta: Están a igual distancia

La distancia entre un número y el 0 en la recta numérica se llama **valor absoluto** de este número. El valor absoluto de un número se indica colocando el número entre dos barras.



La distancia nunca es negativa.

El valor absoluto de $+3$ es 3 y se representa como $|+3| = 3$

El valor absoluto de -3 es 3 y se representa como $|-3| = 3$

El valor absoluto de 0 es 0 y se representa como $|0| = 0$

El valor absoluto de un número es un número que resulta de eliminar el signo positivo o negativo del número.

Los números que están a la misma distancia del cero se llaman **números opuestos**.
Ejemplo: $+3$ y -3 son números opuestos.

Dos números opuestos tienen el mismo valor absoluto.
Ejemplo: $|-3| = |+3| = 3$

Ejercicio 1.15 Encuentre los valores absolutos.

a) $|+8|$ b) $|-5|$ c) $|0|$ d) $|-11|$

e) $|+12|$ f) $|-15|$ g) $|-19|$ h) $|+7|$

Ejemplo 1.21

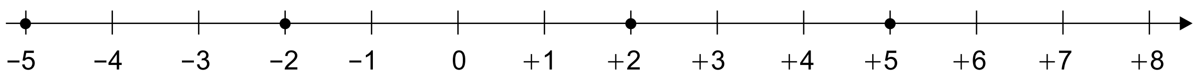
Determine la relación de orden de los dos números de cada una de las siguientes parejas. Así mismo, compare sus valores absolutos.

Pareja / Relación de orden	$+2$ y $+5$	-2 y $+5$	-5 y $+2$	-5 y -2
Sin valor absoluto	$+2 \square +5$	$-2 \square +5$	$-5 \square +2$	$-5 \square -2$
Con valor absoluto	$\|+2\| \square \|+5\|$	$\|-2\| \square \|+5\|$	$\|-5\| \square \|+2\|$	$\|-5\| \square \|-2\|$

Solución:

Pareja / Relación de orden	$+2$ y $+5$	-2 y $+5$	-5 y $+2$	-5 y -2
Sin valor absoluto	$+2 \boxed{<} +5$	$-2 \boxed{<} +5$	$-5 \boxed{<} +2$	$-5 \boxed{<} -2$
Con valor absoluto	$\|+2\| \boxed{<} \|+5\|$	$\|-2\| \boxed{<} \|+5\|$	$\|-5\| \boxed{>} \|+2\|$	$\|-5\| \boxed{>} \|-2\|$

Con la recta numérica podemos confirmar las respuestas.



Con base a lo anterior y lo que se vio en la lección 1 se concluye lo siguiente:

Relación de orden

- Los números positivos son mayores que el cero.
- Los números negativos son menores que el cero.
- Entre los números positivos es mayor el que tiene mayor valor absoluto.
- Entre los números negativos es menor el que tiene mayor valor absoluto.
- Entre un número positivo y un negativo, es mayor el positivo y menor el negativo.

Ejercicio 1.16 Exprese la relación de orden de los números de cada una de las siguientes parejas. (Escriba el signo < ó > para cada pareja de números.)

a) $+8$ ___ $+3$ b) -5 ___ $+10$ c) $|-15|$ ___ $|-8|$ d) -9 ___ $+6$

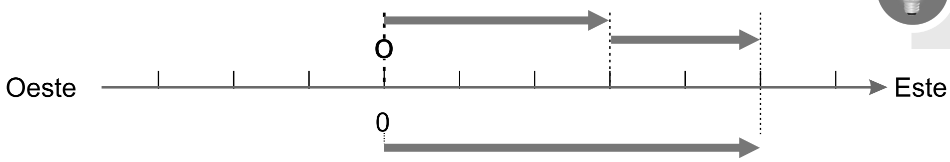
e) -7 ___ -10 f) $|-3|$ ___ $|0|$ g) 0 ___ $+1$ h) $|-10|$ ___ $|-3|$

Lección 2: Adición y sustracción de números positivos y negativos

Sección 1: Adición de números con igual signo

Observe la dirección de los movimientos y la posición final.

El punto O es el origen.



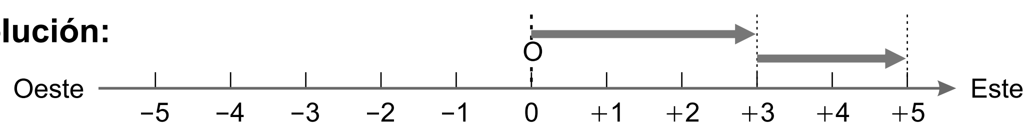
La carretera se prolonga del Oeste hacia el Este. Se expresa un movimiento hacia el Este con signo positivo y hacia el Oeste con signo negativo seguido del número que representa la distancia del movimiento.

Ejemplo 2.1

Si ocurre el siguiente movimiento, ¿cuánto se puede considerar que se ha desplazado hacia el Este partiendo del punto O?

Caso (1): Primero se desplaza 3 km hacia el Este partiendo del punto O y luego se desplaza 2 km hacia el Este.

Solución:



Respuesta: $+5$ km

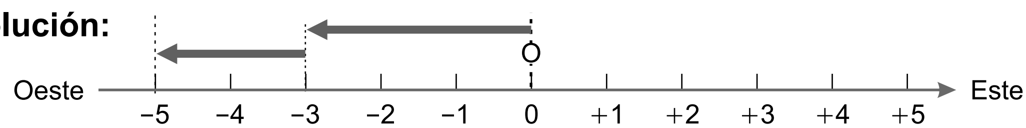
Utilizamos para expresar la dirección **positivo** (Este) con flecha azul.

Ejemplo 2.2

Si ocurre el siguiente movimiento, ¿cuánto se puede considerar que se ha desplazado hacia el Oeste partiendo del punto O?

Caso (2): Primero se desplaza 3 km hacia el Oeste (-3 km) partiendo del punto O y luego se desplaza 2 km hacia el Oeste (-2 km).

Solución:



Respuesta: 5 km hacia el Oeste (-5 km)

Utilizamos para expresar la dirección **negativo** (Oeste) con flecha roja.

Ejemplo 2.3

Piense con qué PO se puede resolver los problemas de los **Ejemplo 2.1** y **2.2**.

Solución:

Se puede interpretar como:

(el primer movimiento) + (el segundo movimiento) = (posición final)

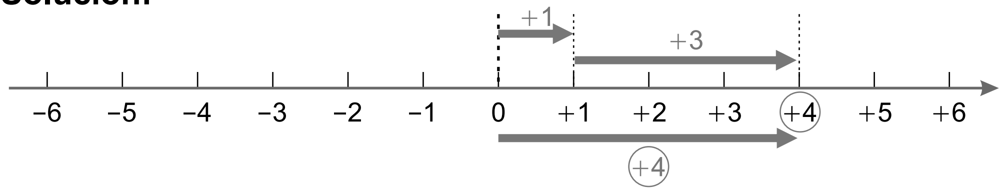
Entonces, el PO del caso (1) se expresa como: $(+3) + (+2) = +5$

el PO del caso (2) se expresa como: $(-3) + (-2) = -5$

Ejemplo 2.4

Calcule $(+1) + (+3)$ usando la gráfica.

Solución:



$(+1) + (+3) = +4$

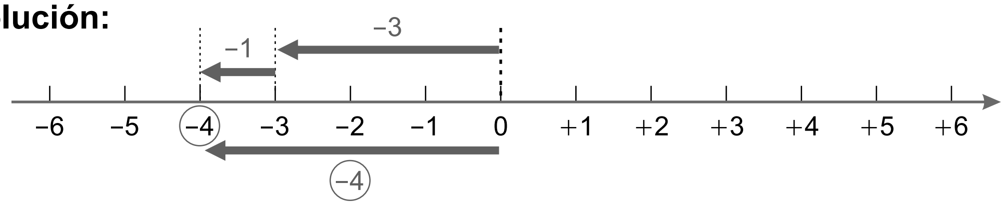
Respuesta: $+4$

Ejercicio 2.1 Calcule $(+3) + (+2)$ usando la gráfica.

Ejemplo 2.5

Calcule $(-3) + (-1)$ usando la gráfica.

Solución:



$(-3) + (-1) = -4$

Respuesta: -4

Ejercicio 2.2 Calcule $(-2) + (-3)$ usando la gráfica.

Para sumar dos números que tienen el mismo signo se coloca el signo que es común a los dos números acompañado por la suma de sus valores absolutos.

Ejemplo 2.6

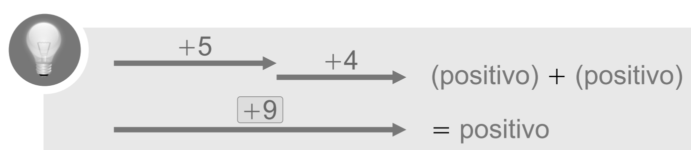
Calcule.

a) $(+5) + (+4)$ b) $(-2) + (-6)$

Solución:

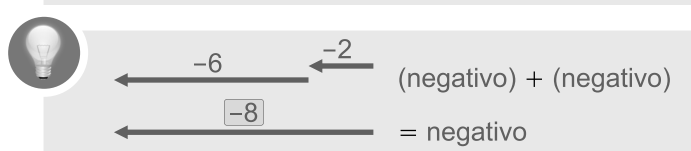
a) $(+5) + (+4) = +(5 + 4)$

$= +9$



b) $(-2) + (-6) = -(2 + 6)$

$= -8$



Ejercicio 2.3 Calcule.

a) $(+6) + (+2)$ b) $(+3) + (+4)$ c) $(-4) + (-1)$ d) $(-2) + (-5)$

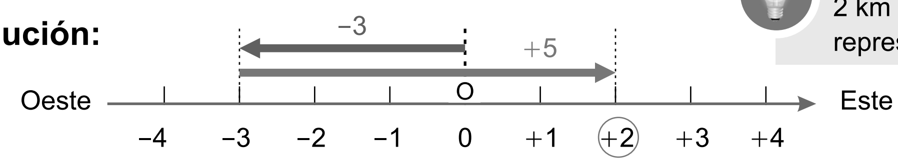
Ejemplo 2.7

¿Cuál es la posición final después de los dos movimientos?

Caso: Primero se desplaza 3 km hacia el Oeste partiendo del punto O y luego se desplaza 5 km hacia el Este.

2 km hacia el Este, se representa por + 2 km.

Solución:



$$(-3) + (+5) = +2$$

Respuesta: +2 km

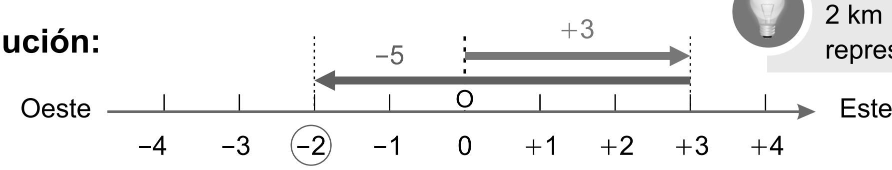
Ejemplo 2.8

¿Cuál es la posición final después de los dos movimientos?

Caso: Primero se desplaza 3 km hacia el Este partiendo del punto O y luego se desplaza 5 km hacia el Oeste.

2 km hacia el Oeste, se representa por − 2 km.

Solución:



$$(+3) + (-5) = -2$$

Respuesta: −2 km

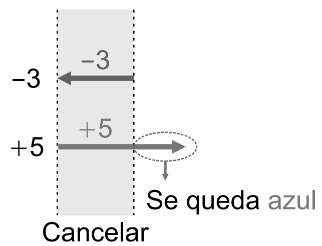
Ejercicio 2.4 Calcule usando la gráfica.

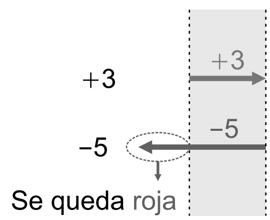
a) $(-2) + (+6)$

b) $(+2) + (-6)$

En los casos de los **Ejemplo 2.7 y 2.8** podemos analizar lo siguiente.

$(-3) + (+5) = +2$ $\qquad\qquad$ $(+3) + (-5) = -2$





Respuesta: +2 (positivo) $\qquad$ **Respuesta**: −2 (negativo)

Cuando se suman dos números que tienen diferente signo, el signo de la respuesta es igual a la flecha más larga.
(*Flecha más larga significa que tiene mayor valor absoluto)

> La longitud de la flecha de la respuesta es la diferencia que hay entre la longitud de la flecha larga y la longitud de la flecha corta.

Ejemplo 2.9

Calcule.

a) $(-2) + (+6)$ $\qquad$ b) $(-5) + (+3)$

Solución:

a) $(-2) + (+6) = +(6-2)$
$= +4$

> a) −2 ←
> +6 ⟶ más larga
>
> es decir, $|-2| < |+6|$ por eso $+(6-2)$

b) $(-5) + (+3) = -(5-3)$
$= -2$

> b) −5 ⟵ más larga
> +3 →
>
> es decir, $|-5| > |+3|$ por eso $-(5-3)$

Ejercicio 2.5 Calcule.

a) $(-3) + (+7)$ $\qquad$ b) $(+2) + (-3)$ $\qquad$ c) $(-6) + (+4)$

d) $(-4) + (+6)$ $\qquad$ e) $(+3) + (-7)$ $\qquad$ f) $(-10) + (+3)$

Sección 3: Propiedad conmutativa y asociativa de la adición

Ejemplo 2.10

Compare el resultado de $(-4) + (+7)$ y $(+7) + (-4)$

Solución:

$(-4) + (+7) = \boxed{+3}$ y $(+7) + (-4) = \boxed{+3}$

son iguales

Respuesta: Son iguales.

Con los números positivos y negativos es válida la propiedad siguiente:

Propiedad conmutativa ■ + ● = ● + ■

Ejemplo 2.11

Compare el resultado de $[(-3) + (-2)] + (+7)$ y $(-3) + [(-2) + (+7)]$

Primero se resuelve lo que está dentro del corchete [ ].

Solución:

$[(-3) + (-2)] + (+7) = (-5) + (+7)$ y $(-3) + [(-2) + (+7)] = (-3) + (+5)$

$= \boxed{+2}$ $= \boxed{+2}$

son iguales

Respuesta: Son iguales.

Con los números positivos y negativos es válida la propiedad siguiente:

Propiedad asociativa (■ + ●) + ▲ = ■ + (● + ▲)

Ejemplo 2.12

Calcule $(-4) + (+7) + (+5) + (-3)$ empleando las propiedades conmutativa y asociativa.

Solución:

$$\begin{aligned}(-4) + (+7) + (+5) + (-3) &= (+7) + (-4) + (+5) + (-3)\\ &= (+7) + (+5) + (-4) + (-3)\\ &= [(+7) + (+5)] + [(-4) + (-3)]\\ &= (+12) + (-7)\\ &= +5\end{aligned}$$

Se agrupan los números con el mismo signo usando estas propiedades.

Ejercicio 2.6 Calcule lo siguiente empleando las propiedades conmutativa y asociativa

a) $(-2) + (+5) + (+7) + (-6)$

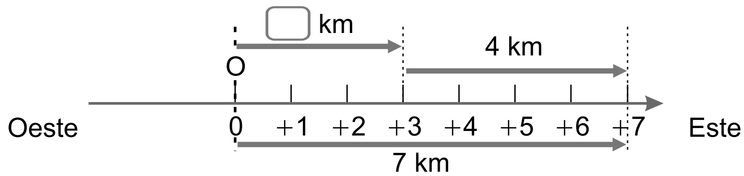
b) $(+3) + (-8) + (+2) + (-1)$

c) $(-3) + (+6) + (-2) + (+8)$

d) $(-5) + (+7) + (+3) + (-6)$

Ejemplo 2.13

En una carretera que se prolonga de Oeste a Este se adelantó ciertos km hacia el Este partiendo del punto O. Luego se adelantó 4 km hacia el Este y se llegó al punto que está a 7 km hacia el Este del punto O. ¿Hacia dónde y cuántos km se adelantó primero?



Solución:

(1) Representando el primer movimiento con $\square$ km la composición de los dos movimientos en la forma de adición es:

$\square + (+4) = +7$

(primer movimiento) + (segundo movimiento) = (posición final)

(2) El primer movimiento se puede expresar en la forma de sustracción.

$(+7) - (+4) = \square$

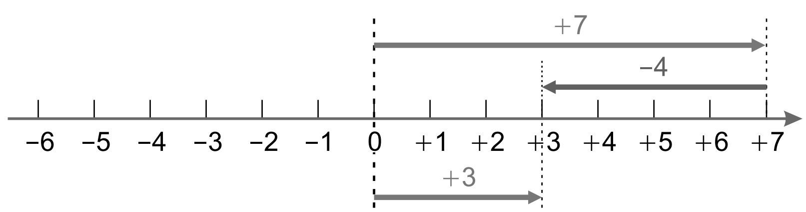
(posición final) − (segundo movimiento) = (primer movimiento)

(3) Al observar la gráfica de arriba, encuentre $\square$.

$(+7) - (+4) = +3$

Respuesta: +3 km

Como ya saben calcular la suma con diferente signo, usando la gráfica, determine $(+7) + (-4)$.



$(+7) + (-4) = +3$

Observe lo siguiente (comparación entre dos cálculos)

$(+7) - (+4) = +3$

$(+7) + (-4) = +3$

Entonces se sabe que se puede convertir una sustracción en una adición

$(+7) \quad - \quad (+4) \quad = \quad +3$

‖ Resta ↓ Suma | Número opuesto ↓ | ‖ Respuestas iguales

$(+7) \quad + \quad (-4) \quad = \quad +3$

Ejemplo 2.14

Convierta las siguientes sustracciones en adiciones y calcule.

a) $(+6) - (+2)$ b) $(+3) - (+5)$

Solución:

a) $(+6) - (+2) = (+6) + (-2)$

$= +4$

$$\begin{array}{ccc} (+6) & - & (+2) \\ \text{Igual}\ \Big\| & \text{Resta} \downarrow \text{Suma} & \Big\downarrow \text{Número opuesto} \\ (+6) & + & (-2) \end{array}$$

b) $(+3) - (+5) = (+3) + (-5)$

$= -2$

$$\begin{array}{ccc} (+3) & - & (+5) \\ \text{Igual}\ \Big\| & \text{Resta} \downarrow \text{Suma} & \Big\downarrow \text{Número opuesto} \\ (+3) & + & (-5) \end{array}$$

Ejercicio 2.7 Convierta las siguientes sustracciones en adiciones y calcule.

a) $(+5) - (+2)$ b) $(+2) - (+7)$

c) $(+7) - (+3)$ d) $(+3) - (+8)$

Ejemplo 2.15

Convierta las siguientes sustracciones en adiciones y calcule.

a) $(+2) - (-3)$ b) $(-4) - (-2)$

Solución:

a) $(+2) - (-3) = (+2) + (+3)$

$= +5$

$$\begin{array}{ccc} (+2) & - & (-3) \\ \text{Igual}\ \Big\| & \text{Resta} \downarrow \text{Suma} & \Big\downarrow \text{Número opuesto} \\ (+2) & + & (+3) \end{array}$$

b) $(-4) - (-2) = (-4) + (+2)$

$= -2$

$$\begin{array}{ccc} (-4) & - & (-2) \\ \text{Igual}\ \Big\| & \text{Resta} \downarrow \text{Suma} & \Big\downarrow \text{Número opuesto} \\ (-4) & + & (+2) \end{array}$$

Para restar un número (positivo o negativo) de otro se suma el número opuesto.

Ejercicio 2.8 Convierta las siguientes sustracciones en adiciones y calcule.

a) $(+6) - (-3)$ b) $(+4) - (-7)$ c) $(+5) - (-2)$ d) $(+3) - (-6)$

e) $(-7) - (+2)$ f) $(-2) - (-6)$ g) $(-7) - (+3)$ h) $(-1) - (-4)$

Ejemplo 2.16

Calcule.

a) $0-(+3)$ b) $0-(-3)$ c) $(+3)-0$ d) $(-3)-0$

Solución:

a) $0-(+3)=0+(-3)=-3$

b) $0-(-3)=0+(+3)=+3$

c) $(+3)-0= +3$

d) $(-3)-0= -3$

Ejercicio 2.9 Calcule.

a) $(+6)-0$ b) $0-(+8)$ c) $0-(+4)$

d) $(-7)-0$ e) $0-(-5)$ f) $0-(-10)$

Sección 5: *Planteamiento sólo con adición*

Como se ha visto en la sección anterior, se puede convertir una sustracción en una adición. Aplicando esta conversión varias veces, se puede convertir un PO con adición y sustracción en un PO sólo con adición.

Ejemplo 2.17 Convierta a un PO solo con adición.

$(+3)-(+5)+(-8)-(-9)$

Solución:

$(+3)-(+5)+(-8)-(-9)=(+3)+(-5)+(-8)+(+9)$

Se llama **término** a cada número de un PO que está representado sólo con adición.

En el ejercicio anterior los términos son $+3$, -5, -8 y $+9$.

Ejercicio 2.10 Convierta en adición y escriba los términos de los siguientes PO.

a) $(-2) + (+7) - (-5)$

b) $(-5) - (-1) - (+2)$

c) $(-6) + (+4) - (+5) - (-3)$

d) $(+7) - (-8) - (+4) - (+3)$

Después de convertir un PO con adición y sustracción en un PO solo con adición, se suman los términos positivos y los términos negativos separadamente.

Ejemplo 2.18

Convierta a un PO solo con adición y calcule $(+3) - (+5) + (-8) - (-9)$

$$\begin{aligned}(+3) - (+5) + (-8) - (-9) &= (+3) + (-5) + (-8) + (+9)\\ &= [(+3) + (+9)] + [(-5) + (-8)]\\ &= (+12) + (-13)\\ &= -1\end{aligned}$$

Ejercicio 2.11 Convierta a un PO solo con adición y calcule.

a) $(-2) + (+7) - (-5)$

b) $(-5) - (-1) - (+2)$

c) $(-6) + (+4) - (+7) - (-3)$

d) $(+7) - (-8) - (+4) + (+3)$

Sección 6: Adición y sustracción combinadas

Para eliminar paréntesis en adición y sustracción combinadas.
Si el paréntesis viene precedido del signo “+”, se suprime dejando los sumandos del interior con sus signos.
Si el paréntesis viene precedido del signo “−”, al suprimirlo se transforman los signos de los sumandos del interior, cada uno se cambia por el opuesto.

Ejemplo 2.19

Calcule

a) $(+3) + (+5)$

b) $(+3) - (+5)$

c) $(+5) + (+3) + (-2)$

Solución:

a) $(+3) + (+5) = 3 + 5$
$= 8$

Solo se colocan los números como están dentro del paréntesis.

b) $(+3) - (+5) = 3 - 5$
$= -2$

$3 + (-5) = 3 - 5$

c) $(+5) + (+3) + (-2) = 5 + 3 - 2$
$= 8 - 2$
$= 6$

Recuerde que $+5 = 5$, entonces
$+5 + 3 - 2 = 5 + 3 - 2$

Ejercicio 2.12 Calcule.

a) $(+6) + (+4)$

b) $(+8) - (+3)$

c) $(+5) - (+9)$

d) $(+6) + (+3) + (-7)$

e) $(+3) + (+4) - (-3)$

f) $(-4) + (-8) + (+6)$

Ejemplo 2.20

Calcule $-5 + 2$.

Solución:
$-5 + 2$ significa $(-5) + (+2)$ por tanto
$-5 + 2 = -3$

$\boxed{-5}$ $+2$

Se suman estos números

Ejercicio 2.13 Calcule.

a) $-6 + 3$ b) $-2 + 5$ c) $-8 + 4$ d) $-1 + 7$

Ejemplo 2.21

Calcule $-2 - 6$.

Solución:
$-2 - 6$ significa $(-2) + (-6)$ por tanto
$-2 - 6 = -8$

$\boxed{-2}$ -6

Se suman estos números

Ejercicio 2.14 Calcule.

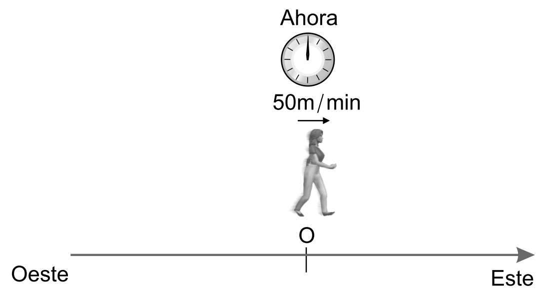
a) $-3 - 4$ b) $-6 - 3$ c) $-2 - 6$ d) $-7 - 3$

Lección 3: Multiplicación y división de números positivos y negativos

Sección 1: Multiplicación

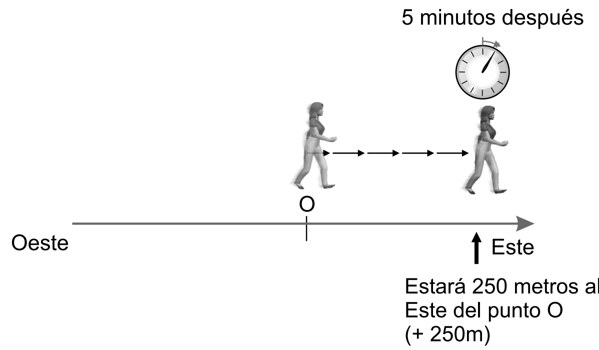
Ejemplo 3.1

María camina a 50 metros por minuto hacia el Este en una carretera. Ahora está en el punto O. Después de 5 minutos, ¿dónde estará?



Respuesta: María estará 250 metros al Este del punto O.

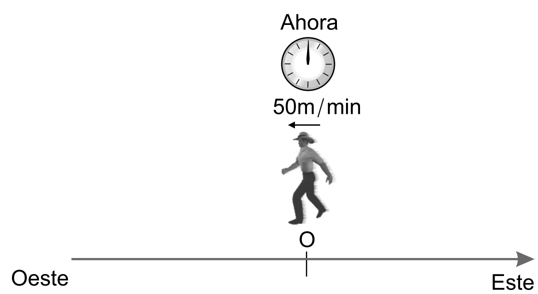
Se puede expresar el PO como :
$(+50) \times (+5) = +250$



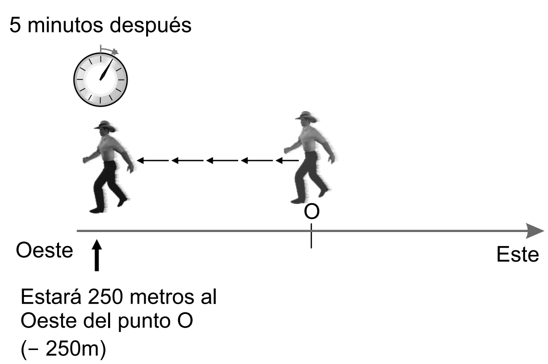
Ejemplo 3.2

José camina a 50 metros por minuto hacia el Oeste y ahora está en el punto O.

¿Dónde estará después de 5 minutos?



Respuesta: José estará 250 metros al Oeste del punto O.



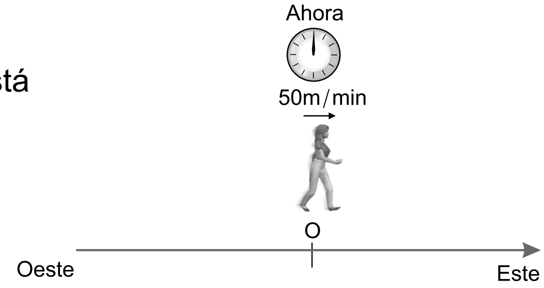
Caminar a 50 metros por minuto hacia el Oeste se interpreta como "caminar a −50 metros por minuto" y se expresa la posición de 5 minutos después con la multiplicación $(-50) \times (+5) = -250$.

−250 significa 250 metros al Oeste del punto O.

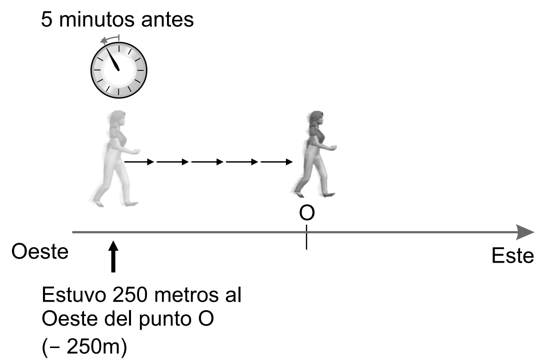
Ejemplo 3.3

Siguiendo el Ejemplo 3.1. Ahora María está en el punto O.

¿Dónde estaba María 5 minutos antes?



Respuesta: María estaba 250 metros al Oeste desde el punto O.

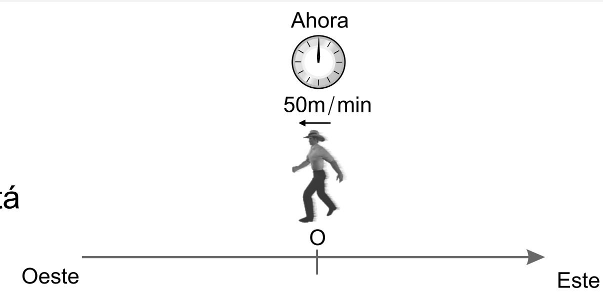


5 minutos antes se interpreta como −5 y se expresa la posición de esos 5 minutos con la multiplicación: $(+50) \times (-5) = -250$.

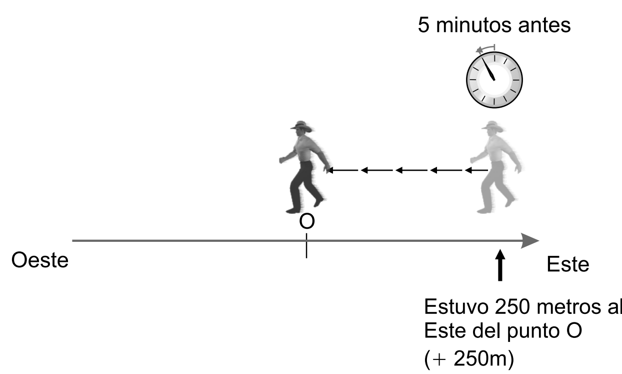
Ejemplo 3.4

Siguiendo el Ejemplo 3.2. Ahora José está en el punto O.

¿Dónde estaba José 5 minutos antes?



Respuesta: José estaba 250 metros al Este desde el punto O.



Se expresa la posición con la multiplicación $(-50) \times (-5) = +250$.

Observamos los PO de los **Ejemplo 3.1 ~ 3.4**.

1) PO: $(+50) \times (+5) = +\ 250$
2) PO: $(-50) \times (+5) = -\ 250$
3) PO: $(+50) \times (-5) = -\ 250$
4) PO: $(-50) \times (-5) = +\ 250$

De los PO y las respuestas de los ejemplos anteriores se puede concluir lo siguiente:

Multiplicación de dos números positivos y/o negativos

Según el signo:
Si los dos números tienen el mismo signo, el producto lleva el signo positivo.
Si los dos números tienen diferente signo, el producto lleva el signo negativo.

Según el valor absoluto:
El valor absoluto es el producto de los valores absolutos de los dos números.

Ejemplo 3.5

Calcule.

a) $(+2) \times (+3)$ b) $(-2) \times (-3)$

Solución:

a) $(+2) \times (+3) = +\ (2 \times 3)$
$= +6$

b) $(-2) \times (-3) = +\ (2 \times 3)$
$= +6$

$(+) \times (+) = (+)$
$(-) \times (-) = (+)$

Ejercicio 3.1 Calcule.

a) $(+4) \times (+2)$ b) $(-5) \times (-3)$ c) $(+6) \times (+2)$ d) $(-4) \times (-3)$
e) $(+2) \times (+5)$ f) $(-6) \times (-3)$ g) $(+7) \times (+3)$ h) $(-8) \times (-4)$

Ejemplo 3.6

Calcule.

a) $(+2) \times (-3)$ b) $(-2) \times (+3)$

Solución:

a) $(+2) \times (-3) = -\ (2 \times 3)$
$= -6$

b) $(-2) \times (+3) = -\ (2 \times 3)$
$= -6$

$(+) \times (-) = (-)$
$(-) \times (+) = (-)$

Ejercicio 3.2 Calcule.

a) $(+4) \times (-2)$ b) $(-5) \times (+3)$ c) $(+6) \times (-2)$ d) $(-4) \times (+2)$
e) $(-2) \times (+5)$ f) $(+6) \times (-3)$ g) $(-3) \times (+7)$ h) $(+8) \times (-4)$

Ejemplo 3.7

Compare los productos con los números $+1$ y -1.

1. Productos con $+1$

a) $(+3) \times (+1)$ b) $(+1) \times (+3)$

c) $(-3) \times (+1)$ d) $(+1) \times (-3)$

Respuesta:

a) $+3$ b) $+3$ c) -3 d) -3

$\blacksquare \times (+1) = \blacksquare$

$(+1) \times \blacksquare = \blacksquare$

2. Productos con -1

a) $(+3) \times (-1)$ b) $(-1) \times (+3)$

c) $(-3) \times (-1)$ d) $(-1) \times (-3)$

Respuesta:

a) -3 b) -3 c) $+3$ d) $+3$

$\blacksquare \times (-1) = -\blacksquare$

$(-1) \times \blacksquare = -\blacksquare$

El producto de un número positivo o negativo por $+1$ es el mismo número.

El producto de un número positivo o negativo por -1 es su número opuesto .

Ejercicio 3.3 Calcule.

a) $(+2) \times (+1)$ b) $(-1) \times (+7)$ c) $(-5) \times (+1)$ d) $(-1) \times (-8)$

e) $(+5) \times (-1)$ f) $(+1) \times (+9)$ g) $(-4) \times (-1)$ h) $(+1) \times (-6)$

Ejemplo 3.8 Usando la situación del Ejemplo 3.2 y Ejemplo 3.3, encuentre $(-50) \times 0$ y $0 \times (-5)$.

Solución: $(-50) \times 0$ representa la posición de José después de 0 minutos, es decir, ahora, por lo tanto equivale a 0.
$0 \times (-5)$ representa la posición de una persona que permanece en el punto O, por lo tanto equivale a 0.

Un número positivo o negativo multiplicado por cero es igual a cero.

$\blacksquare \times 0 = 0$ $0 \times \blacksquare = 0$

Ejercicio 3.4 Calcule.

a) $(+3) \times 0$ b) $0 \times (+2)$ c) $(-8) \times 0$ d) $0 \times (-6)$

e) $(-10) \times 0$ f) $0 \times (-7)$ g) $(+12) \times 0$ h) $0 \times (-4)$

Ejemplo 3.9

Compare el resultado de $(+3) \times (-4)$ y $(-4) \times (+3)$.

Solución:

$(+3) \times (-4) = -(3 \times 4)$ $\quad$ $(-4) \times (+3) = -(4 \times 3)$

$= \boxed{-12}$ $\quad$ $= \boxed{-12}$

Son iguales

Respuesta: Son iguales.

Como el signo y el valor absoluto del producto de números no dependen del orden de los números, se tiene para los números positivos y negativos la siguiente propiedad.

Propiedad conmutativa de la multiplicación.

■ × ▲ = ▲ × ■

Ejemplo 3.10

Compare el resultado de $[(+3) \times (-4)] \times (-2)$ y $(+3) \times [(-4) \times (-2)]$.

Solución:

$[(+3) \times (-4)] \times (-2) = (-12) \times (-2)$ $\quad$ $(+3) \times [(-4) \times (-2)] = (+3) \times (+8)$

$= \boxed{+24}$ $\quad$ $= \boxed{+24}$

Son iguales

Respuesta: Son iguales.

Propiedad asociativa de la multiplicación.

(■ × ●) × ▲ = ■ × (● × ▲)

Con estas propiedades se pueden calcular el producto de varios números en cualquier orden.

Ejemplo 3.11

Encuentre el siguiente producto aplicando las propiedades.

$$\begin{aligned}(-5) \times (+3) \times (+2) &= (-5) \times (+2) \times (+3)\\ &= [(-5) \times (+2)] \times (+3)\\ &= (-10) \times (+3)\\ &= -30\end{aligned}$$

$(-5) \times (+2) = -10$
es más fácil de calcular.

Ejercicio 3.5 Encuentre los siguientes productos.

a) $(-2) \times (-5) \times (+4)$

b) $(+3) \times (-4) \times (+2)$

c) $(+5) \times (+3) \times (-6)$

d) $(-5) \times (+4) \times (-3)$

Sección 3: División

Ejemplo 3.12

Encuentre el número que va en la casilla.

a) $\square \times (+3) = +12$ b) $\square \times (+3) = -12$

c) $\square \times (-3) = +12$ d) $\square \times (-3) = -12$

Respuesta: a) $+4$ b) -4 c) -4 d) $+4$

En 3er se aprendió que se puede expresar la multiplicación como división.

$(+4) \times (+3) = +12 \longrightarrow (+12) \div (+3) = +4$

$(-4) \times (+3) = -12 \longrightarrow (-12) \div (+3) = -4$

$(-4) \times (-3) = +12 \longrightarrow (+12) \div (-3) = -4$

$(+4) \times (-3) = -12 \longrightarrow (-12) \div (-3) = +4$

$(+4) \times (+3) = +12$ también se puede expresar como $(+12) \div (+4) = +3$

$\blacksquare \times \blacktriangle = \bullet$, entonces $\bullet \div \blacktriangle = \blacksquare$

Observando los casos anteriores, se puede concluir lo siguiente:

División de dos números positivos y/o negativos

Según el signo:
Si el signo de los dos números es el mismo, el signo del cociente es positivo $(+)$.
Si el signo de los dos números es diferente, el signo del cociente es negativo $(-)$.

Según el valor absoluto:
El valor absoluto es el cociente de la división de los valores absolutos de los dos números.

Signos iguales

$(+) \div (+) = (+)$

$(-) \div (-) = (+)$

Signos distintos

$(-) \div (+) = (-)$

$(+) \div (-) = (-)$

Así que para el signo, en caso de la división se puede pensar de la misma manera que en la multiplicación.

Para calcular el cociente, se escribe el signo y después el cociente de los valores absolutos de los números.

Si $\blacktriangle$ representa un número diferente de 0, $0 \div \blacktriangle = 0$ porque $0 \times \blacktriangle = 0$.
La división entre cero no está definida.

Ejemplo 3.13

Calcule.

a) $(+18) \div (+3)$ b) $(-18) \div (-3)$

$(+) \div (+) = (+)$

$(-) \div (-) = (+)$

Solución:

a) $(+18) \div (+3) = +(18 \div 3)$
$= +6$

b) $(-18) \div (-3) = +(18 \div 3)$
$= +6$

Ejercicio 3.6 Calcule.

a) $(+15) \div (+3)$ b) $(-15) \div (-3)$

c) $(+18) \div (+6)$ d) $(-18) \div (-6)$

Ejemplo 3.14

Calcule.

a) $(+18) \div (-3)$ b) $(-18) \div (+3)$

$(+) \div (-) = (-)$

$(-) \div (+) = (-)$

Solución:

a) $(+18) \div (-3) = -(18 \div 3)$
$= -6$

b) $(-18) \div (+3) = -(18 \div 3)$
$= -6$

Ejercicio 3.7 Calcule.

a) $(+15) \div (-3)$ b) $(-15) \div (+3)$

c) $(+18) \div (-6)$ d) $(-18) \div (+6)$

En la división de números enteros donde el cociente no es un número entero, se puede expresar el cociente de dos números como una fracción.

Ejemplo 3.15

Calcule $(-5) \div (+3)$.

Solución:

Se deja expresado en forma de fracción.

$(-5) \div (+3) = -(5 \div 3) = -\frac{5}{3}$

$\blacksquare \div \blacktriangle = \frac{\blacksquare}{\blacktriangle}$

$-\frac{5}{3} = -1\frac{2}{3}$, pero en este libro vamos a usar fracciones impropias en lugar de fracciones mixtas.

Observe que la división se puede expresar como fracción, entonces podemos concluir lo siguiente:

$(-5) \div (+3) = \frac{-5}{3} = -\frac{5}{3}$

De la misma forma $\frac{5}{-3} = 5 \div (-3) = -(5 \div 3) = -\frac{5}{3}$

Generalmente el signo del numerador o denominador se coloca antes de la fracción.

$\frac{-\blacksquare}{\blacktriangle} = -\frac{\blacksquare}{\blacktriangle}$ $\frac{\blacksquare}{-\blacktriangle} = -\frac{\blacksquare}{\blacktriangle}$

A partir de ahora se omite el signo $+$ de los números positivos

> Recuerde que $+5 = 5$

Ejemplo 3.16 Calcule $(-2) \div 3$

Solución:

$$(-2) \div 3 = -(2 \div 3) = -\frac{2}{3}$$

> $\blacksquare \div \blacktriangle = \frac{\blacksquare}{\blacktriangle}$

Si se utiliza esta relación se calcula rápidamente la conversión de fracciones en números decimales.

Ejemplo 3.17

Convierta en número decimal.

a) $\frac{2}{5}$ b) $-\frac{3}{8}$ c) $\frac{2}{3}$

Solución:

a) $\frac{2}{5} = 0.4$ b) $-\frac{3}{8} = -0.375$ c) $\frac{2}{3} = 0.666...$

$$\begin{array}{r} 0.4 \\ 5\overline{)\,2.0} \\ \underline{2\,0} \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0.375 \\ 8\overline{)\,3.0} \\ \underline{2\,4} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0.666 \\ 3\overline{)\,2.0} \\ \underline{1\,8} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 2 \end{array}$$

a) Es un número decimal exacto porque el residuo es cero.

b) Decimal exacto.

c) Es un número decimal inexacto porque su residuo no es cero.

> Al número o números que se repiten, se les llama período.

Ejercicio 3.8 Convierta a su equivalente decimal. Si no es exacta, entonces hasta encontrar el período.

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $-\frac{1}{3}$ d) $\frac{4}{33}$

Cuando la división de los números no es exacta, se expresará como una fracción.
Ejemplo $7 \div 3 = \frac{7}{3}$

Ejemplo 3.18 Calcule.

a) $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}$

b) $\frac{1}{4} \times 4$

$4 = \frac{4}{1}$

Solución:

a) $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \times \overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{3}} \times \underset{1}{\cancel{2}}} = \frac{1}{1} = 1$

b) $\frac{1}{4} \times 4 = \frac{1}{4} \times \frac{4}{1} = \frac{1 \times \overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \times 1} = \frac{1}{1} = 1$

Un número es **recíproco** de otro número cuando al multiplicarse ambos números el producto es 1.

En caso del Ejemplo 3.18 $\frac{3}{2}$ es el recíproco de $\frac{2}{3}$ ya que $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$.
4 es el recíproco de $\frac{1}{4}$ ya que $\frac{1}{4} \times 4 = 1$.

También se puede decir $\frac{2}{3}$ es el recíproco de $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{4}$ es el recíproco de 4.

El recíproco de $\frac{\bigcirc}{\triangle}$ *es* $\frac{\triangle}{\bigcirc}$.

(por que $\frac{\bigcirc}{\triangle} \times \frac{\triangle}{\bigcirc} = 1$)

recíproco | recíproco
$\frac{2}{3}$ ⇄ $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{4}$ ⇄ 4
recíproco | recíproco

Ejemplo 3.19

Encuentre el recíproco de los siguientes números.

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{3}$ c) 8 d) $-\frac{3}{4}$

Solución:

a) $\frac{2}{5} \times \boxed{\frac{5}{2}} = 1$ Respuesta: $\frac{5}{2}$

b) $\frac{1}{3} \times \boxed{3} = 1$ Respuesta: 3

c) $8 \times \boxed{\frac{1}{8}} = 1$ Respuesta: $\frac{1}{8}$

d) $\left(-\frac{3}{4}\right) \times \boxed{\left(-\frac{4}{3}\right)} = 1$ Respuesta: $-\frac{4}{3}$

Para que el producto sea 1, ponga atención al signo.
$(-) \times (-) = (+)$

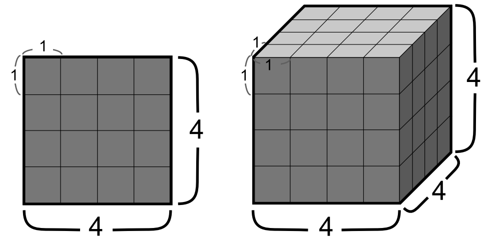
Ejercicio 3.9 Encuentre el recíproco de los siguientes números.

a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{1}{9}$ c) 7

d) $-\frac{4}{3}$ e) $-\frac{1}{4}$ f) -6

Ejemplo 3.20

Observe y analice los siguientes dibujos y exprese el área del cuadrado y el volumen del cubo.



Solución:

Como área: base $\times$ altura entonces,

Área : 4×4

Como volumen: área de la base $\times$ altura entonces,

Volumen : $4 \times 4 \times 4$

El producto de multiplicar un número por sí mismo 2 ó más veces se representa de la siguiente manera:

$$4 \times 4 = 4^2 \qquad 4 \times 4 \times 4 = 4^3$$

Los números 4^2 ó 4^3 están se expresados como potencia.

Ejercicio 3.10 Escriba en forma de potencia.

a) 7×7 b) $2 \times 2 \times 2$ d) $5 \times 5 \times 5$

Ejemplo 3.21

Calcule las siguientes potencias.

a) $(-3)^2$ b) -3^2 c) $(-2)^3$

Respuesta:

a) $(-3)^2 = (-3) \times (-3)$
$= 9$

b) $-3^2 = -(3 \times 3)$
$= -9$

c) $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2)$
$= -8$

-3^2 no es igual a $(-3)^2$

$(-3)^2$ se lee "-3 al cuadrado" o "-3 elevado a la dos"

$(-2)^3$ se lee "-2 al cubo" o "-2 elevado a la tres"

Un número negativo elevado a otro número debe encerrarse en un paréntesis.
Una fracción positiva o negativa elevada a un número debe encerrarse en un paréntesis. Ejemplo: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ (con paréntesis)

$\frac{1^2}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$ (sin paréntesis)

Ejercicio 3.11 Calcule las siguientes potencias.

a) $(-8)^2$ b) -8^2 c) 5^3 d) $(-5)^3$

Ejemplo 3.22

Se calcula un PO con multiplicación y división convirtiéndolo en un PO sólo con multiplicación.

a) $5 \div \left(-\frac{2}{3}\right) \times 8$

b) $(-12) \times (-6) \div \frac{4}{3}$

Respuesta:

a) $5 \div \left(-\frac{2}{3}\right) \times 8$

$= 5 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times 8$

$= -\left(5 \times \frac{3}{\underset{1}{\cancel{2}}} \times \overset{4}{\cancel{8}}\right)$

$= -60$

b) $(-12) \times (-6) \div \frac{4}{3}$

$= (-12) \times (-6) \times \frac{3}{4}$

$= +\left(\overset{3}{\cancel{12}} \times 6 \times \frac{3}{\underset{1}{\cancel{4}}}\right)$

$= 54$

Si en el PO aparecen multiplicaciones y divisiones, se cambia todo a multiplicación.

Ejercicio 3.12 Calcule convirtiendo a un PO solo con multiplicación.

a) $(-3) \div \left(-\frac{2}{5}\right) \times 4$

b) $6 \times (-10) \div \frac{2}{3}$

Si en un PO aparecen multiplicaciones, divisiones, adiciones, sustracciones y signos de agrupación, el orden de las operaciones es el siguiente:

1. Calcular lo que está dentro de signos de agrupación.
2. Las multiplicaciones y divisiones (de izquierda a derecha).
3. Por último, las adiciones y sustracciones (de izquierda a derecha).

Ejemplo 3.23

Calcule $4 \times 3 - (8 + 6) \div 2$.

Respuesta:

$4 \times 3 - \underbrace{(8 + 6)}_{1} \div 2 = \underbrace{4 \times 3}_{2} - \underbrace{14 \div 2}_{2}$

$= \underbrace{12 - 7}_{3}$

$= 5$

1 Calcular lo que está dentro del paréntesis

2 Multiplicación y división

3 Efectuando la suma

Primero 1
Segundo 2
Tercero 3

Ejercicio 3.13 Calcule.

a) $(12 \div 3) \times 4 - 2 \times 6$

b) $15 \div (5 - 2) + 4 \times 3$

c) $[60 \div (-12)] + 5 \times 3 - 16 \div 2$

Sección 8: Propiedad distributiva

Ejemplo 3.24

Compare los resultados.

a) $4 \times (-5 + 3)$ con $4 \times (-5) + 4 \times 3$

b) $(-7 + 4) \times (-2)$ con $(-7) \times (-2) + 4 \times (-2)$

Solución:

a) $4 \times (-5 + 3) = 4 \times (-2) = -8$ $\qquad$ $4 \times (-5) + 4 \times 3 = -20 + 12 = -8$

Respuesta: Los resultados son iguales.

b) $(-7 + 4) \times (-2) = -3 \times (-2) = 6$ $\qquad$ $(-7) \times (-2) + 4 \times (-2) = 14 + (-8) = 6$

Respuesta: Los resultados son iguales.

La propiedad distributiva es válida con números positivos y negativos.

$$(\blacksquare + \bullet) \times \blacktriangle = \blacksquare \times \blacktriangle + \bullet \times \blacktriangle$$

$$\bullet \times (\blacksquare + \blacktriangle) = \bullet \times \blacksquare + \bullet \times \blacktriangle$$

Ejemplo 3.25

Calcule aplicando propiedad distributiva.

$1.4 \times 5 + 1.6 \times 5$

La propiedad distributiva también es válida en los números decimales.

Solución:

$$\begin{aligned} 1.4 \times 5 + 1.6 \times 5 &= (1.4 + 1.6) \times 5 \\ &= 3 \times 5 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Ejercicio 3.14 Calcule aplicando la propiedad distributiva.

a) $5 \times 2 + 5 \times 3$ $\qquad$ b) $8 \times 4 - 3 \times 4$

c) $1.8 \times 10 + 1.2 \times 10$ $\qquad$ d) $2.5 \times 6 + 0.5 \times 6$

Ejemplo 3.26

La cantidad de personas que se permiten en un elevador se calcula suponiendo que el peso de una persona es 70 kg. Dados los datos siguientes:

78 kg, 65 kg, 67 kg, 58 kg, 70 kg, 72 kg, 64 kg, 83 kg

a) Utilice 70 kg como punto de referencia para comparar el peso de cada persona. Luego exprese la cantidad de kg que sobran y faltan utilizando el número positivo ó negativo.

b) Averigüe si en un elevador con capacidad para 8 personas pueden entrar las 8 personas con los pesos dados anteriormente.

Solución:

a) Se representa el peso de cada persona tomando 70 kg como punto de referencia.

Respuesta: 8 kg, −5 kg, −3 kg, −12 kg, 0 kg, 2 kg, −6 kg, 13 kg

b) La suma de pesos anteriormente dados es:

$8 + (-5) + (-3) + (-12) + 0 + 2 + (-6) + 13 = -3$

Esto significa que el peso total es 3 kg menos que el límite.

Respuesta: Sí pueden entrar.

Ejercicio 3.15 Para que un alumno apruebe la asignatura necesita un promedio mínimo de 70%. Un alumno obtuvo las cuatro calificaciones siguientes:

64%, 80%, 70% y 66%.

¿Aprobó la asignatura?

Ejemplo 3.27

A un tanque que tiene 600 ℓ de agua le agregan 15 ℓ por minuto, pero al mismo tiempo gastan 40 ℓ por minuto para el regadío de la finca. ¿Cuántos litros de agua habrá al pasar 20 minutos?

Solución:

Al tanque se le agregan $15 \times 20 = 300$ (ℓ) y gasta $40 \times 20 = 800$ (ℓ)

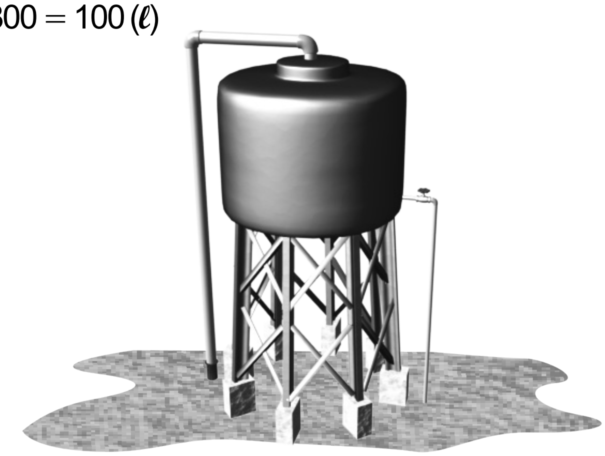
Al pasar 20 minutos quedan: $600 + 300 - 800 = 100$ (ℓ)

Respuesta: 100 ℓ

Otra solución:

Por cada minuto que pasa el tanque pierde 25 ℓ pues $15 - 40 = -25$ (ℓ).

En 20 minutos pierde 500 ℓ porque $-25 \times 20 = -500$ (ℓ).
Quedan entonces
$600 + (-500) = 100$ (ℓ)



Ejercicios

1 Exprese las siguientes situaciones con números positivos o negativos.

a) Si se expresa 7 °C más alta que 0 °C con +7 °C,
¿cómo se expresa 10 °C más baja que 0 °C?

b) Si se expresa 1500 m de altura sobre el nivel del mar con +1500 m,
¿cómo se expresa 800 m bajo el nivel del mar?

c) Si se expresa 5 km al Oeste desde el punto O con −5 km,
¿cómo se expresa 3 km al Este del punto O?

d) Si se expresa 670 m al Norte desde el punto O con +670 m,
¿cómo se expresa 250 m al Sur desde el punto O?

e) Si se expresa 2 semanas antes de ahora con −2 semanas,
¿cómo se expresa 1 semana después de ahora?

f) Si se expresa 8 días de transcurso al pasado con −8 días,
¿cómo se expresa 5 días de transcurso al futuro?

2 ¿Qué otras situaciones conoce con las cuales se pueda explicar el sentido de los números negativos y positivos?

3 Expresе los siguientes números con signo positivo o negativo.

a) 5 mayor que cero

b) 8 menor que cero

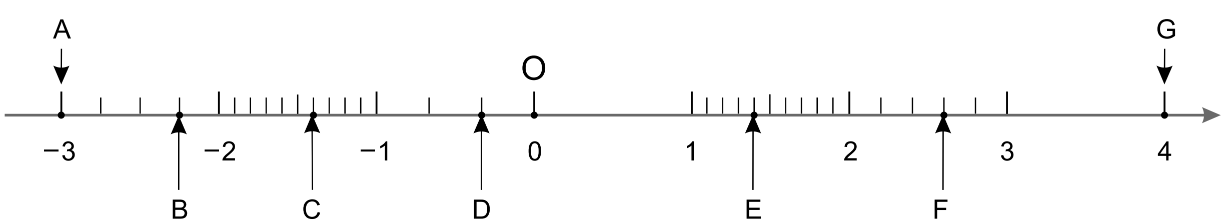
c) $\frac{4}{3}$ menor que cero

d) $\frac{5}{8}$ mayor que cero

e) 0.8 mayor que cero

f) 1.4 menor que cero

4 Escriba los números que corresponden a los siguientes puntos.



5 Grafique en una recta numérica los siguientes números.

a) $-\frac{2}{3}$ b) -0.4 c) -2 d) $\frac{11}{5}$ e) 2.7 f) 2

6 Exprese la relación de orden de los números de cada una de las siguientes parejas. (Escriba el signo < ó > para cada pareja de números.)

a) -8 ___ -9 b) 4 ___ 3 c) -7 ___ 6 d) -14 ___ 10

e) $-\frac{1}{2}$ ___ 0 f) 0 ___ $-\frac{2}{3}$ g) -0.4 ___ -1.3 h) -34 ___ -63

7 Calcule.

a) $(+4) + (-9)$ b) $(-3) + (-2)$ c) $(-2) + (+5)$

d) $(-8) + (+2)$ e) $(+6) - (+4)$ f) $(-2) - (+5)$

g) $(+4) - (-3)$ h) $(-7) - (-2)$

8 Calcule.

a) $3 - 8$ b) $-2 + 6$ c) $-7 + 4$

d) $-5 - 2$ e) $-5 + 9$ f) $2 - 7$

g) $-3 - 6$ h) $-8 + 6$

9 Plante con un PO sólo con adición y calcule.

a) $(-5) - (+2) - (-3)$

b) $7 - (+5) - (-4)$

10 Calcule.

a) $(-3) \times (-2)$

b) $3 \times (-4)$

c) $(-5) \times 2$

d) $(-4) \times (-5)$

11 Calcule.

a) $(-8) \div 4$

b) $15 \div (-3)$

c) $(-18) \div (-2)$

d) $(-12) \div 6$

12 Encuentre el recíproco de los siguientes números.

a) $\frac{4}{3}$ b) $-\frac{3}{2}$ c) 3 d) $-\frac{1}{7}$

13 Calcule las siguientes potencias.

a) 3^2 b) $(-2)^3$ c) -4^2 d) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ e) $(-1)^2$

14 Convierta a un PO solo con multiplicación y calcule.

a) $3 \div \left(-\frac{3}{2}\right) \times 4$

b) $(-5) \times (-3) \div \frac{5}{2}$

15 Calcule.

a) $(15 \div 3) \times 2$

b) $3 \times 2 - 5 \times 2$

c) $-2 \times 4 + (5 + 3) \times 3$

16 Resuelva empleando un PO con multiplicación.

a) ¿Cuánto se ahorra un aficionado del fútbol si deja de ir al estadio 3 veces y la entrada tiene un costo de 90 lempiras?

b) Un carro sale de un lugar y se dirige hacia el Este durante 3 horas. Después regresa hacia el Oeste en línea recta durante 4 horas. El carro mantuvo la velocidad constante durante todo el recorrido a 80 km por hora.
¿Cuál es la posición del carro en relación al lugar de partida?

Unidad 2

Variables y expresiones

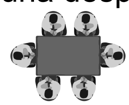
Unidad 2 Variables y expresiones

Lección 1: Variables y expresiones

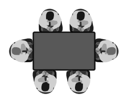
Sección 1: Expresión algebraica

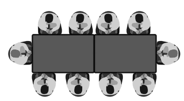
Ejemplo 1.1

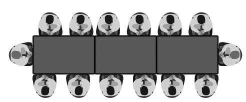
Se van a formar varias mesas unidas una después de otra.

Se tiene una mesa como la siguiente  en la que se pueden sentar 6 personas.
Si se unen varias mesas una después de otra, ¿Cuántas personas pueden sentarse en 1, 2 y 3 mesas?

Solución:

En una mesa  6 personas

Si se unen dos mesas  10 personas

Si se unen tres mesas  14 personas

Observando la cantidad de personas que se pueden sentar, se puede expresar como lo siguiente:

En $\boxed{1}$ mesa se sientan $4 \times \boxed{1} + 2 = 6$ personas.

En $\boxed{2}$ mesas se pueden sentar $4 \times \boxed{2} + 2 = 10$ personas.

En $\boxed{3}$ mesas se pueden sentar $4 \times \boxed{3} + 2 = 14$ personas.

Cantidad de personas que se pueden sentar se representa:

$4 \times \boxed{\text{número de mesas}} + 2$

Ejercicio 1.1 Complete la tabla y responda ¿Cuántas personas se pueden sentar en 4, 5 y 6 mesas?

Nº de mesas	1	2	3	4	5	6
Cantidad de personas	$4 \times \boxed{1} + 2$ $= 6$ personas	$4 \times \boxed{2} + 2$ $= 10$ personas	$4 \times \boxed{3} + 2$ $= 14$ personas	$4 \times \boxed{} + 2$ $= \boxed{}$ personas	$\boxed{}$ $= \boxed{}$ personas	$\boxed{}$ $= \boxed{}$ personas

Usando una letra "a" en lugar de $\boxed{\text{número de mesas}}$, se expresa la cantidad de personas que se pueden sentar:

$4 \times a + 2$

Ejemplo 1.2

¿Cuál es el precio de $\boldsymbol{n}$ cuadernos donde cada uno cuesta 20 lempiras?

Solución:

Cantidad de cuadernos	1	2	3	...	n
Precio total (lempiras)	20×1	20×2	20×3		$20 \times n$

Respuesta: El precio total en su forma general es $20 \times \boldsymbol{n}$ (lempiras) donde $\boldsymbol{n}$ es la cantidad de cuadernos.

Se llama variable a aquello que puede asumir uno o diferentes valores y la representamos por una letra.

No confunda x con $\times$
x ... variable
$\times$... signo "por" para multiplicación

Ejercicio 1.2 ¿Cuál es el precio de $\boldsymbol{y}$ camisetas si cada una cuesta 90 lempiras?

Ejemplo 1.3

¿Cuál es el precio total de $\boldsymbol{a}$ cuadernos que cuestan 20 lempiras cada uno y $\boldsymbol{b}$ bolígrafos que cuestan 15 lempiras cada uno?

Solución:

a: cantidad de cuadernos
b: cantidad de bolígrafos

Si se sabe que cada cuaderno cuesta 20 lempiras, el precio es $20 \times a$ y si se sabe que cada bolígrafo cuesta 15 lempiras, el precio es $15 \times b$, entonces el precio total es la suma del precio de cuadernos y el precio de bolígrafos.

Respuesta: $20 \times a + 15 \times b$ (lempiras)

Se llama expresión algebraica a la combinación de números y variables (letras) unidos por los signos de las operaciones.

Ejercicio 1.3 a)¿Cuál es el precio total de c cuadernos si cuestan 80 lempiras cada uno y d bolígrafos que cuestan 20 lempiras cada uno?

b)¿Cuál es el precio total de y camisas si cuestan 150 lempiras cada una y z camisetas que cuestan 60 lempiras cada una?

Ejemplo 1.4

Si expresamos la edad de Carlos con la letra b, ¿cuál será la edad de Carlos dentro de 5 años?

Solución:

b: edad de Carlos

Como la palabra dentro significa después, lo que indica una suma $(+)$, entonces la edad de Carlos dentro de 5 años se expresa como $b + 5$.

Respuesta: $b + 5$ (años)

Ejemplo 1.5

Si la edad de José la representamos con la letra a, ¿cuál era la edad de José hace 5 años?

Solución:

a: edad de José

Como la palabra hace significa pasado, lo que indica una resta $(-)$, entonces la edad de José hace 5 años se expresa como $a - 5$.

Respuesta: $a - 5$ (años)

Ejercicio 1.4

a) Si expresamos la edad de Donaldo con la letra b, ¿cuál será la edad de Donaldo dentro de 6 años?
b) Si la edad de Gustavo la representamos con la letra c, ¿cuál era su edad hace 10 años?

Las letras mayúsculas y minúsculas son variables diferentes.
Ejemplo: $2 \times n + 3$ no es lo mismo que $2 \times N + 3$

Ejemplo 1.6

Identifique la variable en cada expresión algebraica.

a) $3 \times m + 1$ b) $5 + 2 \times n$

Respuesta: a) La variable es m b) La variable es n

Ejercicio 1.5

Complete la tabla.
Identifique la variable en cada expresión algebraica.

Expresión algebraica	Variable
$2 + c + 7$	
$5 \times d - 3$	
$3 - z + 5$	
$4 \times e - \frac{3}{4}$	
$3 + 6 \times a$	

Variable

$$\underbrace{2 \times \boxed{c} - 1}_{\text{Expresión algebraica}}$$

Ejemplo 1.7

¿Cómo escribiríamos brevemente $a \times b$?

Respuesta: $a \times b$ la escribiríamos como ab.

Observe que no lleva ahora el signo $\times$.

Para expresar la multiplicación en una expresión algebraica se aplican las siguientes reglas:

1. Se escribe primero el número antes de la variable.
2. En productos con la misma variable se escribe en forma de potencia.
3. Se omite el signo por ($\times$) cuando un número está fuera del paréntesis.
4. En expresiones con dos o más variables, las variables se escriben por lo general en orden alfabético.

Ejemplo 1.8

Escriba las siguientes expresiones omitiendo el signo $\times$.

a) $a \times 5$ b) $a \times a$ c) $2 \times (a + b)$ d) $c \times b \times a$

Solución:

a) $a \times 5 = 5a$

b) $a \times a = a^2$

c) $2 \times (a + b) = 2(a + b)$

d) $c \times b \times a = abc$

Por la propiedad conmutativa el producto no cambia si se altera el orden de los factores. $a \times 5 = 5 \times a = 5a$

$(a + b) \times 2 = 2 \times (a + b) = 2(a + b)$

$b \times a$ es ba, en orden alfabético se escribe ab.

Ejercicio 1.6 Escriba las siguientes expresiones omitiendo el signo $\times$.

a) $d \times c$ b) $d \times 4$ c) $a \times a \times a$ d) $3 \times (b + c)$

Ejemplo 1.9

Aplicando la regla de la multiplicación calcule:

a) $1 \times a$ b) $-1 \times a$

Solución:

a) $1 \times a$ es $1a$ sin embargo se escribe solo a

b) $-1 \times a$ es $-1a$ sin embargo se escribe solo $-a$

Ejercicio 1.7 Aplique la regla de la multiplicación.

a) $1 \times b$ b) $c \times 1$ c) $-1 \times d$ d) $e \times (-1)$

Ejercicio 1.8 Escriba con el signo $\times$ las expresiones.

a) $5m$ b) b^2 c) $2y^2$ d) $-c$

La división en una expresión algebraica se escribe como fracción.

Ejemplo 1.10

¿Cómo podemos expresar $a \div 5$ y $(a+b) \div 5$ en forma de fracción?

Solución:

Ahora $a \div 5$ escrito como fracción es $\frac{a}{5}$ y $(a+b) \div 5 = \frac{a+b}{5}$.

Al dividir $a \div 5$ es igual, $a \times \frac{1}{5}$ entonces $\frac{a}{5} = \frac{1}{5}a$ y $\frac{a+b}{5} = \frac{1}{5}(a+b)$.

Ejercicio 1.9 Escriba como fracción las siguientes expresiones algebraicas.

a) $b \div 3$ b) $3 \div b$

c) $x \div y$ d) $(x+y) \div 4$

Ejercicio 1.10 Escriba las siguientes expresiones con el signo $\div$.

a) $\frac{y}{5}$ b) $\frac{2}{x}$

c) $\frac{x+y}{2}$ d) $\frac{a-b}{5}$

Ejemplo 1.11

En la expresión $3 \times a + b \div 2$ omita el signo $\times$ y $\div$.

Solución:

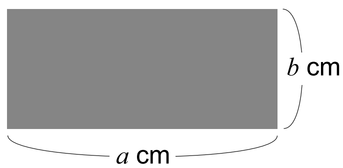
$3a + \frac{b}{2}$

Ejercicio 1.11 En las siguientes expresiones omita el signo $\times$ y $\div$.

a) $10 \times m + n \div 5$ b) $x \div 2 - y \times 2$

Ejemplo 1.12

Exprese el área y el perímetro de un rectángulo cuyo largo mide a cm y ancho mide b cm.



Rectángulo
Área: (largo) $\times$ (ancho)
Perímetro: 2 (largo) + 2 (ancho)

Solución:

Área: $a \times b = ab$

Respuesta: ab (cm^2)

Perímetro: $2 \times a + 2 \times b = 2a + 2b$

Respuesta: $2a + 2b$ (cm)

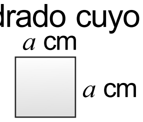
Pensemos en la forma de expresar cantidades con variables.

Ejemplo 1.13

¿Cuál es el área y el perímetro de un cuadrado cuyo lado mide a cm?

Solución:

Dibuje un cuadrado cuyo lado mide a cm.



Dado que el cuadrado tiene a cm por lado, el área se expresa: $a \times a = a^2$

Respuesta: a^2 (cm^2)

Como el cuadrado tiene 4 lados iguales entonces el perímetro: $a \times 4 = 4a$

Respuesta: $4a$ (cm)

Ejercicio 1.12 ¿Cuál es el perímetro de un pentágono regular (lados iguales) cuyos lados miden y cm?

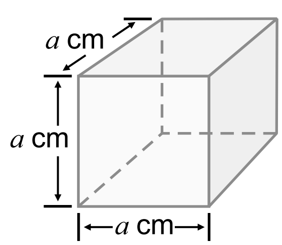
Ejemplo 1.14

¿Cuál es el volumen de un cubo de a cm de lado?

Solución:

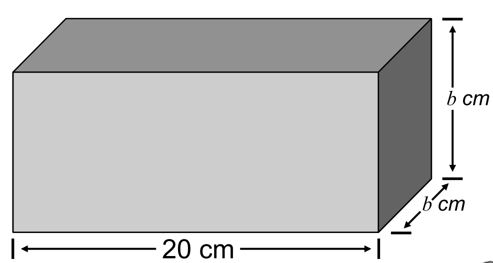
$a \times a \times a = a^3$

Respuesta: a^3 (cm^3)



Fórmula del volumen de un prisma rectangular:
largo $\times$ ancho $\times$ altura

Ejercicio 1.13 Encuentre el volumen de una caja que tiene las medidas que se muestran en la figura de la derecha.



Ejemplo 1.15

¿Cómo se expresaría el costo total de la compra de a cuadernos si cada uno cuesta 30 lempiras?

Solución:
a: cantidad de cuadernos

Si un cuaderno cuesta 30 lempiras el costo total es $30 \times a$

Respuesta: $30a$ (lempiras)

Ejercicio 1.14 Si tenemos n huevos y cada uno cuesta 3 lempiras. ¿Cómo se expresaría el costo total?

Ejemplo 1.16

José tiene que repartir un premio de m lempiras en partes iguales a 10 niños. ¿Cuántos lempiras recibiría cada niño?

Solución:
m: cantidad de lempiras que José tiene

Cantidad de niños: 10 niños

Si tengo que repartir m lempiras a 10 niños entonces divido la cantidad de lempiras entre 10, $m \div 10$.

Respuesta: $\frac{m}{10}$ (lempiras)

Ejercicio 1.15 Pedro va repartir n lempiras en partes iguales a 20 niños ¿Cómo expresaría la cantidad dada a cada niño?

Ejemplo 1.17

Compré un cordón de 50 cm, corté 3 veces b cm y sobró cordón. ¿Cuál es la longitud de la parte que sobra?

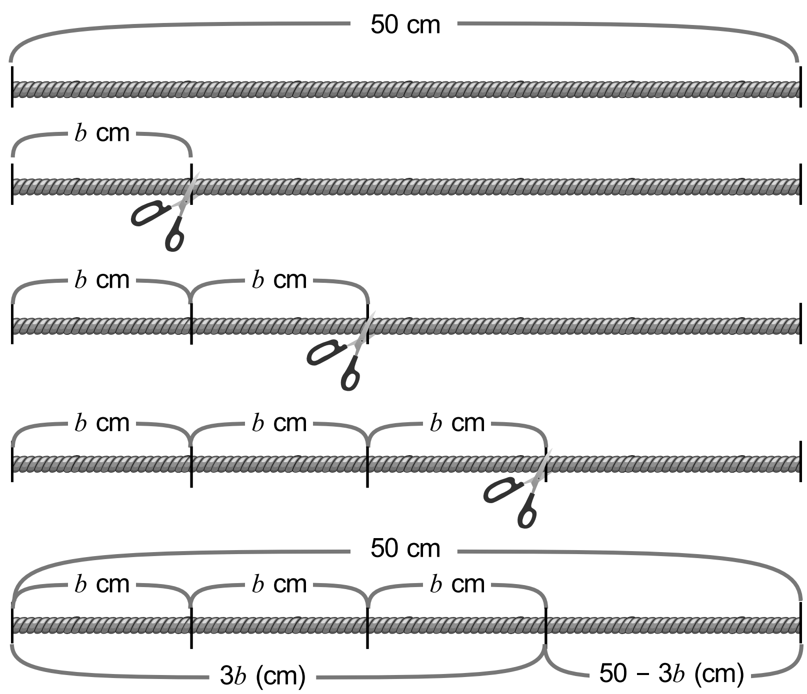
Dibuje un cordón de 50 cm

Primer corte de b cm

Segundo corte de b cm

Tercer corte de b cm

Lo que sobró del cordón



Respuesta: $50 - 3b$ (cm)

Ejemplo 1.18

Dolores compró 5 bolígrafos negros por $\boldsymbol{a}$ lempiras cada uno y 7 bolígrafos azules por $\boldsymbol{b}$ lempiras cada uno. ¿Cuánto pagó en total por todo?

Solución:

$\boldsymbol{a}$ lempiras (bolígrafos negros), $\boldsymbol{b}$ lempiras (bolígrafos azules)

$a \times 5$ (lempiras)
5 veces a

$b \times 7$ (lempiras)
7 veces b

Entonces la unión de ambos bolígrafos indica una suma $a \times 5 + b \times 7 = 5a + 7b$.

Respuesta: $5a + 7b$ (lempiras)

Ejercicio 1.16 Exprese en forma algebraica los siguientes enunciados:

a) ¿Cuál es la cantidad de naranjas que quedan en el árbol si se cosechan b naranjas de a naranjas que habían?

b) De una cinta que mide 60 cm de longitud se cortan 4 pedazos que miden y cm de longitud cada uno y sobra cinta. ¿Cuál es la longitud de la parte que sobra?

c) ¿Cuál es el número cuya decena es a y cuya unidad es b?

d) José compró x bolígrafos azules por 4 lempiras cada uno y y bolígrafos rojos por 3 lempiras cada uno. ¿Cuánto gastó en total?

e) En una empresa, a trabajadores ganan 300 lempiras diarios y b trabajadores ganan 400 lempiras diarios. ¿Cuánto debe pagar la empresa en total al día?

Ejemplo 1.19

Sea a el pago diario que recibe un obrero, si gasta 80 lempiras durante un día
a) ¿Cómo se expresa algebraicamente la ganancia diaria?
b) Si al obrero se le paga 300 lempiras durante un día de trabajo. ¿Cuánto dinero le queda al día si gasta 80 lempiras diariamente?

Solución:
a) a el pago diario y la palabra gasta nos indica una resta, entonces a lo que recibe como pago diario le resto lo que gasta.

Respuesta: $a - 80$ (lempiras)

b) "a" pago diario que recibe un obrero, ahora $a = 300$ (lempiras) y si gasta 80 (lempiras) durante el día entonces $a - 80 = 300 - 80 = 220$

Respuesta: 220 (lempiras)

El valor numérico de una expresión algebraica es el valor obtenido al sustituir las variables por los números.

Ejercicio 1.17 Sea a el pago diario que recibe un obrero, si recibe una bonificación de 150 lempiras. ¿Cuánto recibe de salario al día? Si:

a) $a = 200$ b) $a = 300$

Ejemplo 1.20

Dada la expresión $4x - 8$ encuentre el valor numérico si:

En caso de sustituir por un valor negativo no olvide escribir ( ).
Correcto $4 \times (-3) - 8$
Incorrecto $4 \times -3 - 8$

a) Si $x = 2$ b) Si $x = -3$

Solución:

a) Si $x = 2$
$$\begin{aligned} 4x - 8 &= 4 \times x - 8 \\ &= 4 \times 2 - 8 \\ &= 8 - 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

b) Si $x = -3$
$$\begin{aligned} 4x - 8 &= 4 \times x - 8 \\ &= 4 \times (-3) - 8 \\ &= -12 - 8 \\ &= -20 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.18 Encuentre el valor numérico de $10 - 2x$ cuando:

a) $x = 6$ b) $x = -6$

Ejemplo 1.21

Con la expresión $-a$ encuentre el valor numérico si $a = -3$.

Solución:

Si $a = -3$,
$$\begin{aligned} -a &= (-1) \times a \\ &= (-1) \times (-3) \\ &= 3 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.19 Encuentre el valor numérico de la expresión $-a-3$ cuando:

a) $a = 3$ b) $a = -4$

Ejemplo 1.22

Encuentre el valor numérico de la expresión $\frac{6}{a}$ si $a = -2$.

Solución:

Si $a = -2$ sustituyendo en $\frac{6}{a} = \frac{6}{-2}$

$$= -\frac{6}{2}$$

$$= -3$$

Ejercicio 1.20 Si $x = -2$, encuentre el valor numérico con las expresiones.

a) $\frac{12}{x}$ b) $-\frac{14}{x}$

Ejemplo 1.23

En las expresiones a^2 y $-a^2$, encuentre el valor numérico si $a = -3$.

Solución:

a) $a^2 = a \times a$
$= (-3) \times (-3)$
$= 9$

b) $-a^2 = (-1) \times a^2$
$= (-1) \times a \times a$
$= (-1) \times (-3) \times (-3)$
$= -9$

También se puede expresar como:

a) $a^2 = (-3)^2$
$= 9$

b) $-a^2 = -(-3)^2$
$= -[(-3) \times (-3)]$
$= -9$

Ejercicio 1.21 Con la expresión a^2 y $-a^2$, encuentre el valor numérico.

a) Si $a = 2$ b) Si $a = -1$

Ejemplo 1.24

En la expresión $2x + 3y$, encuentre el valor numérico si $x = 4$, $y = 5$.

Solución:

Si $x = 4$, $y = 5$ sustituyendo estos valores en $2x + 3y$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 2 \times x + 3 \times y \\ &= 2 \times 4 + 3 \times 5 \\ &= 8 + 15 \\ &= 23 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.25

Para la expresión $-3x - 2y$, encuentre el valor numérico si $x = 4$, $y = -5$.

Solución:

$$\begin{aligned} -3x - 2y &= -3 \times x - 2 \times y \\ &= -3 \times 4 - 2 \times (-5) \\ &= -12 + 10 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Otra manera de escribir es utilizando paréntesis para encontrar el valor al sustituir las variables por un número.

Si $x = 4$, $y = -5$

$$\begin{aligned} -3x - 2y &= -3(4) - 2(-5) \\ &= -12 + 10 \\ &= -2 \end{aligned}$$

$-3(4)$ significa -3×4
$-2(-5)$ significa $-2 \times (-5)$

Ejercicio 1.22 Si $a = -2$ y $b = 6$, encuentre el valor numérico en las expresiones.

a) $2a + b$

b) $2a - 3b$

c) $-a + b$

d) $\frac{5}{2}a + b$

Ejercicio 1.23 Si $a = 3$ y $b = -6$, encuentre el valor numérico en las expresiones.

a) $2a + 3b$

b) $a - b$

c) $a - 2b$

d) $-2a + \frac{1}{2}b$

Lección 2: Operaciones con expresiones algebraicas

Sección 1: Términos y coeficientes en las expresiones algebraicas

La expresión algebraica $4x + 2$ observamos que está separada por el signo (+), $4x$ y 2 se llaman término.

Un término algebraico se separa de otro con el signo (+).

En la unidad 1, aprendimos que se puede convertir una sustracción en una adición. Es decir $5x - 3 = 5x + (-3)$ los términos son $5x$ y -3.

Las partes del término algebraico $5x$ son: $5x$ → Variable
→ Coeficiente

Ejemplo 2.1

Complete la tabla.

Expresión	Términos	Variable	Coeficiente
$x - 6y + 2$			
$\frac{a}{2} - b$			

$\frac{a}{2} = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2} \times a$

$-b = (-1) \times b$

El coeficiente de b es -1

Solución:

La expresión $x - 6y + 2$ convertido como una adición $x + (-6y) + 2$

Respuesta: x, $-6y$, -2 son los términos con variable x, y.
1 es el coeficiente de la variable x,
-6 es el coeficiente de la variable y.

Expresión	Términos	Variable	Coeficiente
$x - 6y + 2$	x	x	1
	$-6y$	y	-6
	2		
$\frac{a}{2} - b$	$\frac{a}{2}$	a	$\frac{1}{2}$
	$-b$	b	-1

La expresión $\frac{a}{2} - b$ convertido como una adición $\frac{a}{2} + (-b)$.

Respuesta: $\frac{a}{2}$, $-b$ son términos con variable a y b.
$\frac{1}{2}$ es el coeficiente de la variable a,
-1 es el coeficiente de la variable b.

Se llama **término** a toda expresión algebraica que está separada por el signo de la operación suma; la parte numérica del término con variable se llama coeficiente.

Ejercicio 2.1 ¿Cuáles son los términos y el coeficiente de la variable en cada expresión algebraica?

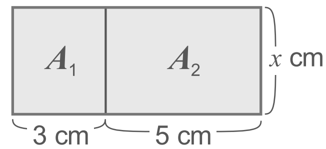
a) $3x + 2$ b) $x - 5$

c) $\frac{x}{4} - 3y$ d) $x - 2y + 8$

$x = 1 \times x$
1 es el coeficiente

Ejemplo 2.2

Encuentre el área del rectángulo resaltado.



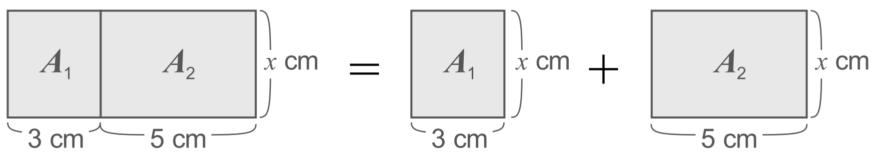
Solución:

El área del rectángulo resaltado tiene 8 cm de base y x (cm) de altura, como área $=$ base $\times$ altura.

Entonces el área del rectángulo resaltado es $8x$ (cm^2)

Respuesta: $8x$ (cm^2)

Observando el rectángulo resaltado se puede separar en dos rectángulos A_1 y A_2.
El área A_1 es $3x$ (cm^2) y el área de A_2 es $5x$ (cm^2).



La suma de las Áreas A_1 y A_2 es igual al área del rectángulo resaltado que es $8x$ (cm^2).
Entonces podemos concluir lo siguiente:

$$\begin{aligned} 3x + 5x &= (3 + 5)x \\ &= 8x \end{aligned}$$

Dos o más términos son **semejantes** si tienen la misma variable con el mismo exponente.

Ejemplo 2.3

Simplifique los términos semejantes en un solo término.

a) $2a - 4a = (2 - 4)a = -2a$ b) $4b - b = (4 - 1)b = 3b$

Ejercicio 2.2 Simplifique los términos semejantes a un solo término.

a) $4x + 3x$ b) $x - 6x$ c) $-2y + 9y$

d) $-4a - 7a$ e) $y + y$

Ejemplo 2.4

Simplifique los términos que son semejantes.

$8a + 4 - 6a + 2$

$= 8a - 6a + 4 + 2$ ... Agrupar los términos semejantes

$= 2a + 6$ ... Sumar separadamente

Simplificar una expresión algebraica consiste en agrupar los términos semejantes y calcular separadamente.

Ejercicio 2.3 Simplifique las siguientes expresiones.

a) $5a + 4 + 3a + 1$ b) $-5x + 7 + 4x - 3$

c) $2x - 8 - 4x + 7$ d) $-9x - 5 + 9x - 2$

e) $12y - 3 + 5y + 1$ f) $-6 - a + 5 + 2a$

Ejemplo 2.5

Calcule $3a + (5a - 2)$.

Solución:

$$\begin{aligned} 3a + (5a - 2) &= 3a + 5a - 2 \\ &= 8a - 2 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.4 Calcule.

a) $2x + (3 - x)$ b) $6y - 2 + (-4y - 2)$

Ejemplo 2.6

Calcule $3a - (5a - 2)$.

Solución:

$$\begin{aligned} 3a - (5a - 2) &= 3a - 5a + 2 \\ &= -2a + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(5a - 2) &= (-1) \times [5a + (-2)] \\ &= (-1) \times 5a + (-1) \times (-2) \\ &= -5a + 2 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.5 Calcule.

a) $4x - (x - 1)$ b) $6y - (-5y + 2)$

Pensemos en la adición de expresiones algebraicas.

Ejemplo 2.7

Calcule de la forma vertical $(3a + 4) + (5a - 6)$.

Solución:

$$\begin{array}{r} 3a + 4 \\ +)\ 5a - 6 \\ \hline 8a - 2 \end{array}$$

$3a + 5a = 8a$
$4 + (-6) = -2$

Ejercicio 2.6 Calcule de forma vertical.

a) $(5x + 3) + (8x - 2)$

b) $(4x + 2) + (x - 2)$

c) $(-8m + 4) + (m - 9)$

d) $(3x - 7) + (-3x - 5)$

Pensemos en la sustracción de expresiones algebraicas.

Ejemplo 2.8

Calcule $(5a + 6) - (3a + 2)$.

Solución:

$$\begin{aligned} (5a + 6) - (3a + 2) &= 5a + 6 - 3a - 2 \\ &= 5a - 3a + 6 - 2 \\ &= 2a + 4 \end{aligned}$$

$-(3a + 2) = (-1) \times (3a + 2)$
$= -3a - 2$
Cambia de signos los términos de la expresión $3a + 2$.

Ejemplo 2.9

Calcule $(3a + 4) - (5a - 6)$.

Solución:

$$\begin{aligned} (3a + 4) - (5a - 6) &= 3a + 4 - 5a + 6 \\ &= 3a - 5a + 4 + 6 \\ &= -2a + 10 \end{aligned}$$

$-(5a - 6) = -5a + 6$
Cambian de signo los términos que están dentro del paréntesis.
$-(5a) = -5a$, $-(-6) = 6$

Ejercicio 2.7 Calcule.

a) $(5x + 3) - (8x - 2)$

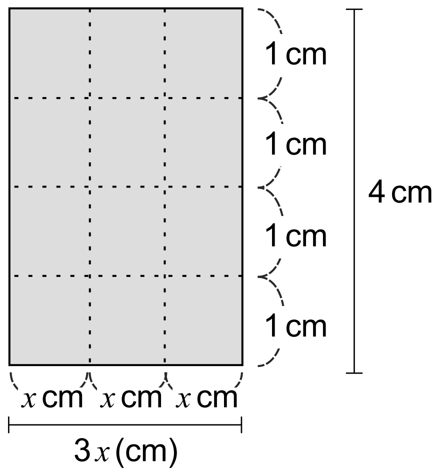
b) $(4x + 2) - (x - 2)$

c) $(-8m + 4) - (m - 9)$

d) $(3x - 7) - (-3x - 5)$

Ejemplo 2.10

Encuentre el área del siguiente rectángulo.



Solución:

$$\begin{aligned} 3x \times 4 &= 3 \times x \times 4 \\ &= 3 \times 4 \times x \\ &= 12x \end{aligned}$$

Respuesta: $12x$ (cm^2)

Ley de los signos de la multiplicación.

$(+) \times (+) = (+)$ $\quad$ $(+) \times (-) = (-)$

$(-) \times (-) = (+)$ $\quad$ $(-) \times (+) = (-)$

Ejemplo 2.11

Calcule el producto.

a) $2a \times 5$ $\qquad$ b) $6x \times (-2)$

Solución:

a) $$\begin{aligned} 2a \times 5 &= 2 \times a \times 5 \\ &= 2 \times 5 \times a \\ &= 10a \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 6x \times (-2) &= 6 \times x \times (-2) \\ &= 6 \times (-2) \times x \\ &= -12x \end{aligned}$$

Para multiplicar una expresión algebraica de un término por un número, se multiplica el coeficiente del término por el número y se copia la variable.

$3x \times 4 = 12x$

Ejercicio 2.8 Calcule el producto.

a) $5m \times 3$ $\qquad$ b) $8t \times (-2)$ $\qquad$ c) $-a \times (-7)$

d) $-5b \times 3$ $\qquad$ e) $-5x \times (-6)$

$-a = (-1) \times a$

Ejemplo 2.12

Dividir $6a$ entre 3.

Solución:

$6a \div 3$ escrito como fracción queda de la forma:

$$\frac{6a}{3} = \frac{\overset{2}{\cancel{6}} \times a}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 2a$$

$a \div b = \frac{a}{b}$

Ejercicio 2.9 Calcule.

a) $14x \div 7$ b) $18x \div (-3)$ c) $(-8a) \div (-2)$ d) $-5t \div 5$

Ejemplo 2.13

Calcule $4x \div \left(-\frac{2}{3}\right)$.

$a \div \frac{m}{n} = a \times \frac{n}{m}$

Solución:

$$\begin{aligned} 4x \div \left(-\frac{2}{3}\right) &= 4x \times \left(-\frac{3}{2}\right) \\ &= \overset{2}{\cancel{4}} \times \left(-\frac{3}{\underset{1}{\cancel{2}}}\right) \times x \\ &= -6x \end{aligned}$$

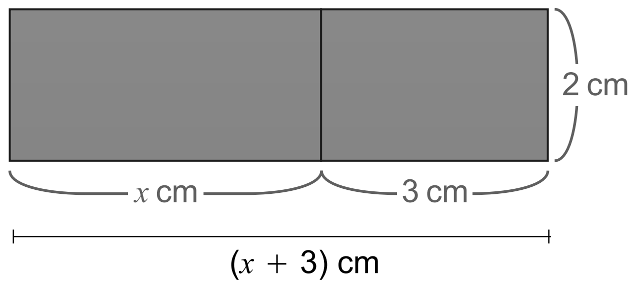
Ejercicio 2.10 Calcule.

a) $9x \div \left(-\frac{3}{2}\right)$ b) $9y \div \frac{3}{4}$

De ahora en adelante cuando una expresión algebraica tiene la forma de fracción se simplificará a su mínima expresión.

Ejemplo 2.14

¿Cómo se puede expresar el área de la siguiente figura?



$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$

Solución:

La base del rectángulo sombreado es (x + 3) cm y su altura 2 cm.

Área = base × altura

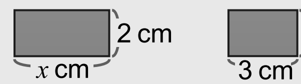
$= (x+3) \times 2$

$= x \times 2 + 3 \times 2$

$= 2x + 6$

Respuesta: $2x + 6$ (cm²)

Separando en dos rectángulos.



Área: $2x$ (cm²) Área: 6 (cm²)

Entonces puede decir que el área total es $2x + 6$ (cm²).

Ejercicio 2.11 Calcule el producto.

a) $(2x + 8) \times 10$ b) $(5x + 3) \times 7$ c) $2(6x - 4)$

$(a + b) \times c = c \times (a + b)$

Ejemplo 2.15

Calcule el producto.

$$\begin{aligned}(2x - 4) \times (-3) &= [2x + (-4)] \times (-3)\\ &= 2x \times (-3) + (-4) \times (-3)\\ &= -6x + 12\end{aligned}$$

El cálculo también se puede hacer sin convertir la sustracción en una adición. Es decir: $(2x - 4) \times (-3) = 2x \times (-3) - 4 \times (-3) = -6x + 12$

Ejercicio 2.12 Calcule el producto.

a) $(4x - 1) \times (-8)$ b) $(2x - 1) \times (-1)$ c) $-2(2x + 4)$

Ejemplo 2.16

Calcule $\frac{3}{2}(6x-2)$.

Solución:

$$\frac{3}{2}(6x-2) = \frac{3}{\cancel{2}_1}\times \cancel{6}^{3}x - \frac{3}{\cancel{2}_1}\times \cancel{2}^{1}$$
$$= 9x - 3$$

Otra forma de calcular

$$\frac{3}{2}(6x-2) = \frac{3}{\cancel{2}_1}\times \cancel{6}^{3}x + \frac{3}{\cancel{2}_1}\times (-\cancel{2}^{1})$$
$$= 9x - 3$$

Ejercicio 2.13 Calcule.

a) $\frac{2}{3}(12x-6)$ b) $(-4x+6)\times\frac{1}{2}$

Ejemplo 2.17

Calcule.

a) $(6a+12)\div(-3)$ b) $(12x-18)\div\frac{3}{2}$

Solución:

a) $(6a+12)\div(-3) = \frac{6a+12}{-3}$
$$= -\frac{6a+12}{3}$$
$$= -\left(\frac{\cancel{6}^{2}a}{\cancel{3}_1}+\frac{\cancel{12}^{4}}{\cancel{3}_1}\right)$$
$$= -(2a+4)$$
$$= -2a-4$$

$$= \frac{\cancel{6}^{2}a+\cancel{12}^{4}}{-\cancel{3}_1}$$
$$= -2a-4$$

b) $(12x-18)\div\frac{3}{2} = (12x-18)\times\frac{2}{3}$
$$= \cancel{12}^{4}x\times\frac{2}{\cancel{3}_1} - \cancel{18}^{6}\times\frac{2}{\cancel{3}_1}$$
$$= 8x-12$$

$$\frac{(\cancel{12}^{4}x-\cancel{18}^{6})\times 2}{\cancel{3}_1}$$
$$= (4x-6)\times 2$$
$$= 8x-12$$

Puede calcular de la manera que más le guste.

Ejercicio 2.14 Calcule.

a) $(8a+6)\div 2$ b) $(6x-9)\div(-3)$

c) $(27a-6)\div\frac{3}{2}$ d) $(-6x+8)\div\left(-\frac{2}{5}\right)$

Ejemplo 2.18

Calcule $6 \times \dfrac{3a + 4}{3}$.

$(3a + 4) \times 2 = 6a + 8$

Solución:

$$6 \times \frac{3a + 4}{3} = \overset{2}{\cancel{6}} \times \frac{(3a + 4)}{\underset{1}{\cancel{3}}}$$

$$= 2 \times (3a + 4)$$

$$= 6a + 8$$

otra manera

$$\frac{6 \times (3a + 4)}{3} = \frac{6 \times 3a + 6 \times 4}{3}$$

$$= \frac{18a + 24}{3}$$

$$= \frac{\overset{6}{\cancel{18}}a}{\underset{1}{\cancel{3}}} + \frac{\overset{8}{\cancel{24}}}{\underset{1}{\cancel{3}}}$$

$$= 6a + 8$$

Ejercicio 2.15 Calcule.

a) $9 \times \dfrac{5m + 1}{3}$ b) $15 \times \dfrac{a - 1}{5}$ c) $\dfrac{-3x - 5}{6} \times 3$

Piense ahora en la adición de expresiones algebraicas que implican multiplicación.

Ejemplo 2.19

Calcule.

a) $2(x + 4) + 3(2x - 1)$ b) $2(3x - 4) - 4(2x - 1)$

$a(b + c) = a \times b + a \times c$

Solución:

a) $2(x + 4) + 3(2x - 1) = 2x + 8 + 6x - 3$

$= 2x + 6x + 8 - 3$

$= 8x + 5$

b) $2(3x - 4) - 4(2x - 1) = 6x - 8 - 8x + 4$

$= 6x - 8x - 8 + 4$

$= -2x - 4$

Ejercicio 2.16 Calcule.

a) $8(x - 2) + 4(2x + 6)$ b) $6(a + 5) + 3(a - 10)$

c) $5(x - 3) - (x + 1)$ d) $7(x - 1) - 9(x - 2)$

Ejercicios

1 Exprese con variables.

a) Si x es un número, un número aumentado en 6.
b) El perímetro del cuadrado cuyo lado mide a cm.
c) El perímetro de un triángulo equilátero cuyo lado mide c cm.
d) Sea x un número, un número disminuido en 20.

2 Escriba siguiendo la regla convencional de expresiones algebraicas.

a) $x \times (-7)$ b) $(x + 4) \times 3$ c) $100 - a \times 2$

d) $(x - 9) \div 4$ e) $(-2) \times a \div b$

3 Encuentre el valor numérico para los valores que se indican.

a) $5x$; $x = -2$ b) $5x + 2$; $x = 3$ c) $10 - 2x$; $x = -2$

d) $\frac{14}{x}$; $x = -7$ e) $4x - 6y$; $x = 2$, $y = 3$ f) $-3x - 1$; $x = -\frac{1}{3}$

4 Complete la tabla calculando valor numérico de las expresiones dadas.

n	-3	-2	-1	0	1	2	3
$2n$							
$2n + 1$							

5 Para cada una de las siguientes expresiones algebraicas identifique los términos y los coeficientes de cada variable.

a) $-3x + 2$
b) $-3x + 2y - 5z$
c) $-x + 1$
d) $-\frac{3}{2}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}$

6 Simplifique los términos semejantes.

a) $3y - 5y + 7y$
b) $3x - 6x$
c) $-9a - 6a$
d) $8x + 6 - 3x - 3$
e) $5x - 2 - 4x + 8$
f) $-x + 1 - 8x + 3$

7 Calcule.

a) $3x - (5x - 1)$
b) $2a + (3a - 4)$
c) $-2x + 7 - (6x - 8)$
d) $3a - 9 - (2a + 1)$

8 Calcule utilizando la forma vertical.

a) $(3x - 5) + (-6x - 8)$
b) $(-4a - 5) + (3a - 2)$
c) $(6y - 3) + (-4y - 3)$

9 Calcule.

a) $(-5a) \times (-2)$
b) $6b \div 8$
c) $12a \times (-4)$
d) $3a \div 5$
e) $(-14a) \div (-2)$
f) $-21b \div (-7)$
g) $10x \div \frac{2}{3}$
h) $-\frac{2}{3}a \div 2$
i) $-8m \div \left(-\frac{4}{7}\right)$

10 Calcule.

a) $3(-5a - 3)$
b) $-5(a - b)$
c) $(-20b - 14) \div 2$
d) $(200x - 300) \div 100$
e) $9\left(2 - \frac{x}{3}\right)$
f) $-\frac{2a + 3}{6} \times 12$
g) $\frac{7a + 6}{6} \times 4$
h) $7x + 2(4 - 5x)$
i) $6(y - 7) - 3(4y + 5)$
j) $(-6a - 9) \div \frac{3}{5}$
k) $3(2a - 1) - 6(a - 1)$

¡La magia de los números!

1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. Seleccione mentalmente un número de 1 hasta 9.

8 

 3

2. Quite 1 a ese número que usted seleccionó.

8 - 1 = 7 

 3 - 1 = 2

3. Doble el número que le resultó en el paso 2.

7 x 2 = 14 

 2 x 2 = 4

4. Agregue 3 al número que le quedó en el paso 3.

14 + 3 = 17 

 4 + 3 = 7

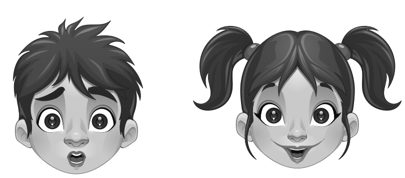
5. Quite el doble del número en el paso 1 del número que le quedó en el paso 4.

17 - 2 x 8 = ? 

 7 - 2 x 3 = ?

¡El número que tienen ahora es ... 1!

¡Tenemos el mismo número!



Unidad 3

Ecuaciones de primer grado en una variable

Lección 1: Ecuaciones de primer grado en una variable

Lección 2: Aplicación de las ecuaciones de primer grado

Unidad 3 Ecuaciones de primer grado en una variable

Lección 1: Ecuaciones de primer grado en una variable

Sección 1: Ecuaciones de primer grado

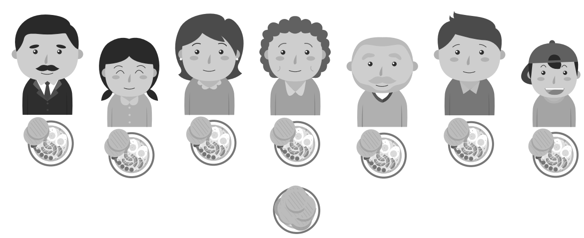
Ejemplo 1.1

La familia Hernández compró 45 tortillas para almorzar, cada miembro de la familia tiene la misma cantidad de tortillas en su plato, y hay 24 tortillas en una canasta sobre la mesa. Si la familia tiene 7 miembros en total ¿Cuántas tortillas tiene cada miembro en su plato?

Solución:

Para poder resolver el problema primero se debe identificar los datos del problema.

Los datos son:
La familia compró 45 tortillas.
Hay 24 tortillas en la canasta.
La familia tiene 7 miembros.



La interrogante es la cantidad de tortillas que tiene cada miembro de la familia en su plato, por lo tanto se va a expresar con la variable x.

Observe que puede decir que:

Cantidad de tortillas repartidas en los 7 platos.	$+$	Tortillas en la canasta.	$=$	Total de tortillas.
$7x$	$+$	24	$=$	45

A la expresión anterior se le llama ecuación de primer grado en una variable. En una ecuación el valor de la variable x es desconocido.

Una ecuación es una igualdad con una o más variables cuyo valor o valores deben encontrarse.

Toda ecuación tiene 2 miembros, el lado izquierdo de la ecuación se llama primer miembro y el lado derecho se llama segundo miembro.

Ejemplo: $\underbrace{7x + 24}_{\text{primer miembro}} = \underbrace{45}_{\text{segundo miembro}}$

Si se sustituye el valor de $x = 3$ en $7x + 24$, se obtiene:

$$\begin{aligned} 7x + 24 &= 7\,(3) + 24 \\ &= 21 + 24 \\ &= 45 \end{aligned}$$

El valor del primer miembro es igual al valor del segundo miembro de la ecuación.

Respuesta: Cada miembro de la familia tiene 3 tortillas en su plato.

Al comprobar sí se cumple $7x + 24 = 45$ cuando $x = 3$, se expresa como lo siguiente.

$$\begin{aligned} 7x + 24 &= 45 \qquad \text{cuando } x = 3 \\ 7(3) + 24 &\stackrel{?}{=} 45 \\ 21 + 24 &\stackrel{?}{=} 45 \\ 45 &\stackrel{\checkmark}{=} 45 \end{aligned}$$

Se escribe $\stackrel{\checkmark}{=}$ al final, pero antes de llegar a esta conclusión se expresa como $\stackrel{?}{=}$, porque todavía no sabe sí se cumple o no.

Solución de una ecuación son los valores que hacen que la igualdad sea verdadera.

Resolver una ecuación es encontrar la solución de la ecuación.

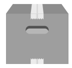
***Ejercicio* 1.1** Para cuáles de las siguientes ecuaciones, $x = 3$ es una solución.

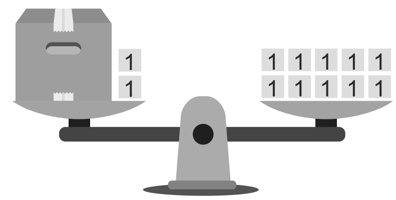
a) $x - 8 = 5$ b) $4x - 5 = 7$ c) $12 - x = 8$

Ejemplo 1.2

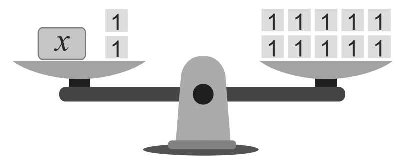
Encuentre el valor en gramos de la caja que hace que la balanza esté en equilibrio.

Solución:

Observe que la  equivale a una cantidad de gramos que se desconoce, y cada $\boxed{1}$ equivale a 1 gramo.

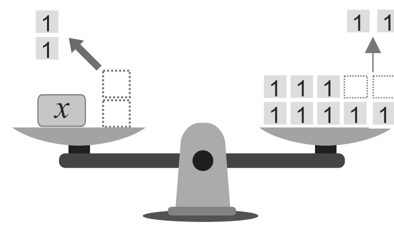


Como no se conoce el peso de la caja se puede expresar con una variable "x" y se representa en la balanza con $\boxed{x}$. Observe que en el lado izquierdo de la balanza se tiene $x + 2$ gramos y en el lado derecho 10 gramos.



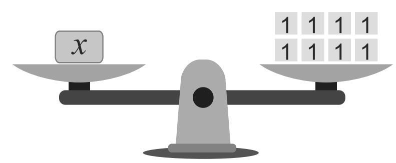
Como la balanza está en equilibrio se tiene que:

$$x + 2 = 10$$



Si lo que se quiere es conocer el valor de x se deben quitar 2 gramos del lado izquierdo pero a la vez se deben quitar 2 gramos del lado derecho para que la balanza se mantenga en equilibrio.

$$x + 2 - 2 = 10 - 2$$

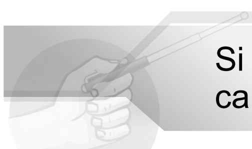


Por tanto si se quitan 2 gramos a ambos lados de la ecuación se obtiene

$$x = 8$$

Éste es el valor que debe tener la caja para que la balanza esté en equilibrio.

Respuesta: El valor de la caja es de 8 gramos.

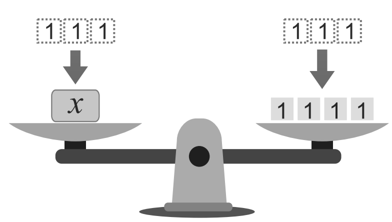


Si existe equilibrio en una balanza, se puede quitar o agregar la misma cantidad a cada lado de la balanza y esta seguirá en equilibrio.

Ejercicio 1.2

Seleccione que pasaría en la siguiente balanza si agregamos 3 gramos a cada uno de sus lados.

1. Se inclina a la izquierda
2. Se mantiene en equilibrio
3. Se inclina a la derecha



Ejemplo 1.3

Encuentre el valor de x que hace que la balanza esté en equilibrio.

Solución:

Utilizando la balanza se puede representar una ecuación de la siguiente manera

$$2x = 8$$

Ahora observe que cada plato tiene 2 partes iguales y si retiramos x en un plato corresponde retirar 4 gramos en el otro plato.

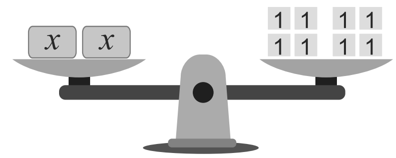
Para que la balanza se mantenga en equilibrio se sabe que x gramos equivalen a 4 gramos, por tanto se puede decir que:

$$x = 4$$

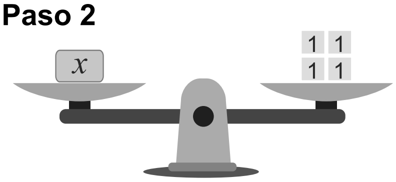
Hace que la balanza esté en equilibrio y así la ecuación sea verdadera.

Respuesta: El valor de x es 4 gramos.

Paso 1



Paso 2

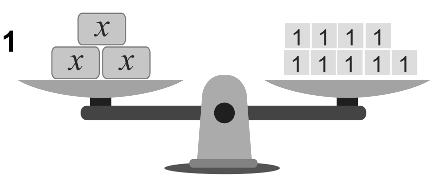


En los temas siguiente se aprenderá a resolver ecuaciones de primer grado utilizando estas propiedades que son conocidas como propiedades de igualdad.

Ejercicio 1.3

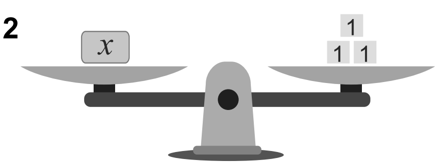
Observe la balanza, complete la ecuación en el **paso 1** y que significa x en el **paso 2**.

a) **Paso 1**



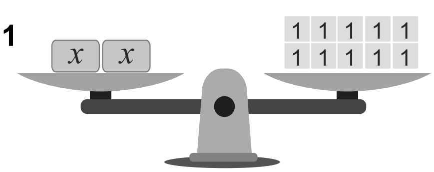
$\square\, x = 9$

Paso 2



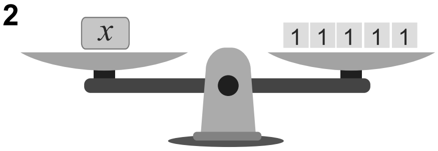
$x = \square$

b) **Paso 1**



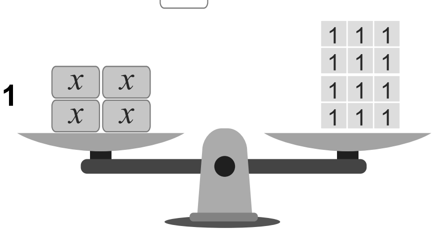
$\square\, x = 10$

Paso 2



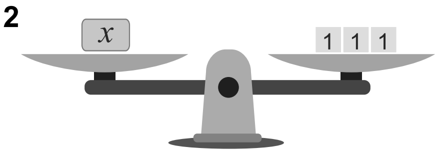
$x = \square$

c) **Paso 1**



$\square\, x = 12$

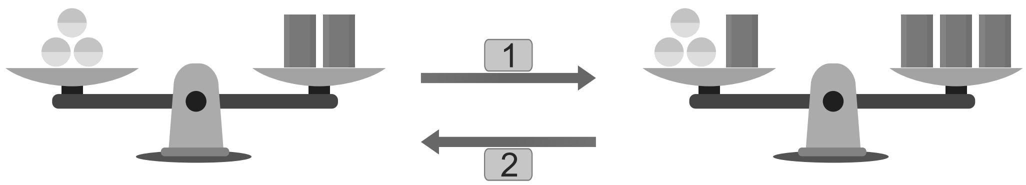
Paso 2



$x = \square$

Ejemplo 1.4

Describa la situación de la balanza de la derecha después de efectuar la operación $\boxed{1}$ y ¿qué hace la operación $\boxed{2}$?



Solución:

Observe que la balanza de la izquierda está en equilibrio y al efectuar la operación $\boxed{1}$ la balanza sigue en equilibrio.

➡ Observe que en la operación $\boxed{1}$ se le agrega a cada plato de la balanza de la izquierda el mismo peso, por lo cual se puede relacionar esta operación con la suma.

➡ Ahora observe que en la operación $\boxed{2}$ se le quita a cada plato de la balanza de la derecha el mismo peso, por lo cual se puede relacionar esta operación con la resta.

De lo anterior se establecen las **propiedades de la igualdad**:

1. Si se suma el mismo número o expresión a ambos lados de una igualdad, la igualdad se mantiene, es decir si $A = B$ entonces $A + C = B + C$
2. Si se resta el mismo número o expresión a ambos lados de una igualdad, la igualdad se mantiene, es decir si $A = B$ entonces $A - C = B - C$

Para resolver una ecuación con variable x se aplican las propiedades de la igualdad transformándola a la forma $x = \boxed{}$

Ejemplo 1.5

Resuelva la ecuación $x - 5 = 1$ aplicando la propiedad $\boxed{1}$ de la igualdad.

$5 - 5 = 0$
$-5 + 5 = 0$

Solución:

Aplicando la propiedad $\boxed{1}$ de la igualdad se obtiene

$$x - 5 = 1$$
$$x - 5 + 5 = 1 + 5 \quad \text{... Sumar 5 a ambos lados de la ecuación}$$
$$x = 6$$

Observe que lo que se quiere es dejar al lado izquierdo de la ecuación sólo la variable x.

Comprobación: Cuando $x = 6$

$$x - 5 = 1$$
$$6 - 5 \stackrel{?}{=} 1$$
$$1 \stackrel{\checkmark}{=} 1$$

Por lo tanto la solución es correcta.

Ejercicio 1.4 Resuelva las siguientes ecuaciones aplicando la propiedad $\boxed{1}$ de la igualdad.

a) $x - 4 = 3$ b) $x - 1 = 7$

Ejemplo 1.6

Resuelva la ecuación $x + 7 = 5$ aplicando la propiedad $\boxed{2}$ de la igualdad.

Aplicando la propiedad $\boxed{2}$ de la igualdad se obtiene

$$x + 7 = 5$$
$$x + 7 - 7 = 5 - 7 \quad \text{... Restar 7 a ambos lados de la ecuación}$$
$$x = -2$$

Una vez resuelta la ecuación es conveniente sustituir el valor de x en la ecuación original para asegurar que la solución es correcta.

Comprobación: Cuando $x = -2$,

$$x + 7 = 5$$
$$(-2) + 7 \stackrel{?}{=} 5$$
$$5 \stackrel{\checkmark}{=} 5$$

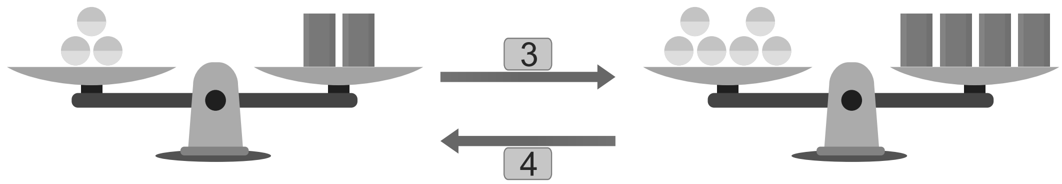
Por lo tanto la solución es correcta.

Ejercicio 1.5 Resuelva las siguientes ecuaciones aplicando la propiedad $\boxed{2}$ de la igualdad.

a) $x + 2 = 10$ b) $4 + x = 15$

Ejemplo 1.7

Describa la situación de la balanza de la derecha después de efectuar la operación $\boxed{3}$ y ¿qué hace la operación $\boxed{4}$?



Solución:

Observe que al efectuar la operación $\boxed{3}$ lo que se hace es duplicar el peso de cada plato de la balanza de la izquierda.

Al efectuar la operación $\boxed{4}$ observe que se reduce a la mitad el peso que hay en cada plato de la balanza de la derecha.

También son **propiedades de la igualdad**:

$\boxed{3}$ Si se multiplica el mismo número o expresión a ambos lados de una igualdad, la igualdad se mantiene, es decir si $A = B$ entonces $A \times C = B \times C$

$\boxed{4}$ Si se divide el mismo número o expresión (diferente de cero) a ambos lados de una igualdad, la igualdad se mantiene, es decir si $A = B$, $C \neq 0$, entonces $A \div C = B \div C$

$C \neq 0$ quiere decir que C es distinto de cero

Observe que $A \div C = B \div C$ se puede expresar como $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$

Ejemplo 1.8

Resuelva la ecuación $\frac{x}{3} = 4$ aplicando la propiedad $\boxed{3}$ de la igualdad.

Solución:

Aplicando la propiedad $\boxed{3}$ de la igualdad se obtiene

$$\frac{x}{3} = 4$$

$$\frac{x}{3} \times \boxed{3} = 4 \times \boxed{3} \quad \text{... Multiplicar por 3 ambos lados de la ecuación}$$

$$x = 12$$

Para cambiar a la forma $x = \square$ cancelar el denominador

$$\frac{x}{\cancel{3}_1} \times \cancel{3}^1 = x$$

Ejercicio 1.6 Resuelva las siguientes ecuaciones aplicando la propiedad $\boxed{3}$ de la igualdad.

a) $\frac{x}{5} = -1$ b) $\frac{x}{4} = -3$ c) $\frac{x}{3} = 2$

Ejemplo 1.9

Resuelva la ecuación $2x = 6$, aplicando la propiedad $\boxed{4}$ de la igualdad.

Solución

Aplicando la propiedad $\boxed{4}$ de la igualdad se obtiene

$$2x = 6$$
$$2x \div \boxed{2} = 6 \div \boxed{2}$$ ... Dividir entre 2 ambos lados de la ecuación
$$x = 3$$

También lo podemos resolver de la siguiente forma:

$$2x = 6$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$$
$$x = 3$$

Ejercicio 1.7 Resuelva las siguientes ecuaciones aplicando la propiedad $\boxed{4}$ de la igualdad.

a) $5x = 40$

b) $7x = -21$

c) $-8x = -16$

Ejemplo 1.10

Resuelva las siguientes ecuaciones aplicando las propiedades de la igualdad.

a) $3x - 7 = 5$ b) $\frac{1}{3}x + 5 = 11$ c) $\frac{3x}{2} - 3 = 3$

Solución:

a) $3x - 7 = 5$

$3x - 7 + 7 = 5 + 7$ ... Propiedad 1 de la igualdad (sumar 7 a ambos lados)

$3x = 12$

$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$ ... Propiedad 4 de la igualdad (dividir entre 3 a ambos lados)

$x = 4$

b) $\frac{1}{3}x + 7 = 11$

$\frac{1}{3}x + 7 - 7 = 11 - 7$ ... Propiedad 2 (restar 7 a ambos lados)

$\frac{1}{3}x = 4$

$\frac{1}{3}x \times 3 = 4 \times 3$ ... Propiedad 3 (multiplicar por 3 ambos lados)

$x = 12$

c) $\frac{3x}{2} - 3 = 3$

$\frac{3x}{2} - 3 + 3 = 3 + 3$ ... Propiedad 1 (sumar 3 a ambos lados)

$\frac{3x}{2} = 6$

$\frac{3x}{2} \times 2 = 6 \times 2$ ... Propiedad 3 (multiplicar por 2 ambos lados)

$3x = 12$

$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$ ... Propiedad 4 (dividir entre 3 a ambos lados)

$x = 4$

Otra forma de resolverlo

$\frac{3x}{2} = 6$

$\frac{3x}{2} \times \frac{2}{3} = 6 \times \frac{2}{3}$

$x = 4$

Ejercicio 1.8 Resuelva aplicando las propiedades de la igualdad.

a) $6x + 3 = 21$ b) $4x - 1 = 7$ c) $\frac{1}{5}x + 2 = 4$

d) $\frac{x}{2} + 10 = 14$ e) $\frac{2x}{5} = 6$ f) $\frac{4x}{3} - 2 = 2$

Ejemplo 1.11 Resuelva la ecuación $x - 4 = 5$.

Solución:

$x - 4 = 5$

$x - 4 + 4 = 5 + 4$ ... Propiedad 1 de la igualdad (sumar 4 a ambos lados)

$x = 5 + 4$

$x = 9$

Observando:

caso 1

$x - 4 = 5$

$x - 4 + 4 = 5 + 4$

$x = 5 + 4$

$x = 9$

caso 2

$x - 4 = 5$

$x = 5 + 4$

$x = 9$

Se puede omitir un paso y directamente se puede pasar -4 a lado derecho cambiando su signo, quedando $+4$.

El proceso de trasladar un término de un lado de la ecuación al otro lado cambiando su signo se llama **transposición**.

Ejercicio 1.9 Resuelva las siguientes ecuaciones utilizando transposición. (observe el caso 2 del Ejemplo 1.11)

a) $x - 1 = 8$

b) $4x - 5 = 3$

Ejemplo 1.12 Resuelva la ecuación $5x = 4x + 12$.

Solución:

$5x = 4x + 12$

$5x - 4x = 4x - 4x + 12$ ... Propiedad 2 de la igualdad (restar $4x$ a ambos lados)

$5x - 4x = 12$

$x = 12$

Observando:

caso 1

$5x = 4x + 12$

$5x - 4x = 4x - 4x + 12$

$5x - 4x = 12$

$x = 12$

caso 2

$5x = 4x + 12$

Transposición

$5x - 4x = 12$

$x = 12$

Se puede omitir un paso y directamente se puede pasar $4x$ a lado izquierdo cambiando su signo, quedando $-4x$.

Observe que también se puede aplicar la transposición a términos que tienen variables.

Ejercicio 1.10 Resuelva las siguientes ecuaciones utilizando transposición. (observe el caso 2 del Ejemplo 1.12)

a) $6x = -2x + 8$

b) $2x = 7x + 5$

Ejemplo 1.13 Resuelva la siguiente ecuación $5x - 4 = 3x + 6$ utilizando transposición.

Solución:

$$5x - 4 = 3x + 6$$
$$5x - 3x = 6 + 4$$
$$2x = 10$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$$
$$x = 5$$

Observe que se omitieron pasos

$$5x - 4 = 3x + 6$$
$$5x - 3x = 6 + 4$$

Observe que en la ecuación $5x - 4 = 3x + 6$ se transponen los términos que contienen x al lado izquierdo y los demás términos al lado derecho.

Ejercicio 1.11 Resuelva las siguientes ecuaciones utilizando transposición.

a) $2x - 5 = -4x + 7$ b) $4x + 1 = x + 4$

c) $6x - 5 = 2x + 7$ d) $-2x - 1 = 3x + 14$

Ejemplo 1.14

Resuelva la ecuación $7x - 3 = 9x + 23$ por medio de la transposición.

Solución:

$7x - 3 = 9x + 23$

$7x - 9x = 23 + 3$ ... Transponer $9x$ y -3

$-2x = 26$ ... Reducir los términos semejantes

$\frac{-2x}{-2} = \frac{26}{-2}$ ... Dividir entre -2 (propiedad 4)

$x = -13$

Observe que omitimos pasos

$$7x - 3 = 9x + 23$$
$$7x - 9x = 23 + 3$$

$$-2x = 26$$
$$x = \frac{\overset{13}{\cancel{26}}}{\underset{1}{\cancel{-2}}}$$
$$x = -13$$

Procedimiento para resolver una ecuación de primer grado

1. Transponer los términos con x al lado izquierdo y los otros al lado derecho.
2. Reducir los términos semejantes en cada lado y escribir la ecuación en la forma $ax = b$.
3. Dividir ambos miembros de la ecuación $ax = b$, entre a con $a \neq 0$ para encontrar el valor de x que es la solución de la ecuación.

Ejercicio 1.12 Resuelva las siguientes ecuaciones por transposición de términos.

a) $9x - 3 = 5x + 9$ b) $-3x + 5 = -x - 1$ c) $2x + 5 = 4x - 3$

d) $8x - 2 = 6x + 10$ e) $4x + 8 = 20 + 2x$ f) $9x + 4 = 25 + 2x$

Ejemplo 1.15

Resuelva la ecuación $2(x - 3) = -x + 9$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
2(x-3) &= -x+9 \\
2x-6 &= -x+9 && \text{... Eliminar paréntesis} \\
2x+x &= 9+6 && \text{... Transponer términos} \\
3x &= 15 && \text{... Reducir los términos semejantes} \\
\frac{3x}{3} &= \frac{15}{3} && \text{... Dividir entre 3 (propiedad } \boxed{4}\text{)} \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

Para resolver este tipo de ejercicio primero se deben eliminar los paréntesis aplicando la propiedad distributiva.

$2\,(x - 3) = 2x - 6$

Ejercicio 1.13 Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $3(5x - 4) = 10x + 8$

b) $3(x - 2) = -x + 6$

c) $4x - 2 = 3(x + 1)$

Ejemplo 1.16

Resuelva la ecuación $4(x - 2) + 1 = -5\,(x - 5) -5$.

Antes de hacer transposición, reduzca a cada lado términos semejantes.

Solución:

$$
\begin{aligned}
4(x-2)+1 &= -5\,(x-5)-5 \\
4x-8+1 &= -5x+25-5 && \text{... Eliminar paréntesis a ambos lados} \\
4x-7 &= -5x+20 && \text{... Reducir los términos semejantes en cado lado} \\
4x+5x &= 20+7 && \text{... Transponer términos} \\
9x &= 27 && \text{... Reducir términos semejantes} \\
\frac{9x}{9} &= \frac{27}{9} && \text{... Dividir entre 9 (propiedad } \boxed{4}\text{)} \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

.

Ejercicio 1.14 Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $5(3x - 2) = 2(x + 3) - 3$

b) $5 - 4(3x + 1) = 1 + 4(2x + 20)$

Ejemplo 1.17

Resuelva la ecuación $x + 0.6 = 0.2x + 3$.

Solución:

Comparando la ecuación con los ejemplos anteriores resulta mejor si fueran números enteros. Observe que se tienen números decimales hasta décimas por lo que se multiplica por 10, para poder eliminar los números decimales de la ecuación y convertirlos en números enteros.

$(0.2x + 3) \times 10 = 2x + 30$

Otra manera

$x + 0.6 = 0.2x + 3$

$x - 0.2x = 3 - 0.6$

$0.8x = 2.4$

$x = 3$

$x + 0.6 = 0.2x + 3$

$(x + 0.6) \times 10 = (0.2x + 3) \times 10$ ... Multiplicar por 10 a ambos lados (propiedad $\boxed{3}$)

$10x + 6 = 2x + 30$ ... Aplicar propiedad distributiva para eliminar paréntesis

$10x - 2x = 30 - 6$ ... Transponer términos

$8x = 24$ ... Reducir los términos semejantes

$x = 3$ ... Dividir entre 8 (propiedad $\boxed{4}$)

Ejercicio 1.15

Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $0.4x - 0.2 = 0.6$ b) $0.3x + 1.8 = 0.2x + 2.2$ c) $0.9x + 2 = x + 1.7$

Ejemplo 1.18

Resuelva la ecuación $-0.2x + 0.15 = -0.25x$.

Solución:

Observe que se tienen números decimales hasta centésimas por lo que se multiplica por 100 para poder eliminar los números decimales de la ecuación y convertirlos en números enteros.

$-0.2x + 0.15 = -0.25x$

$(-0.2x + 0.15) \times 100 = (-0.25x) \times 100$ ....Multiplicar por 100 a ambos lados (propiedad $\boxed{3}$)

$-20x + 15 = -25x$ ....Aplicar propiedad distributiva para eliminar paréntesis

$-20x + 25x = -15$ ....Transponer términos

$5x = -15$ ....Reducir términos semejantes

$\dfrac{5x}{5} = -\dfrac{15}{5}$ ....Dividir entre 5 (propiedad $\boxed{4}$)

$x = -3$

Cuando se multiplica un número decimal por 10, 100 o por 1000 se desplaza el punto decimal a la derecha según el número de ceros.

Cuando se tiene ecuaciones que tienen coeficientes y términos decimales se multiplica cada uno de los términos por 10, 100, 1000 tomando como referencia el término que tenga más cifras decimales para convertir los coeficientes de los términos de la ecuación a números enteros.

Ejercicio 1.16

Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $4x + 5 = 2 + 3.25x$ b) $2 + 1.25x = 10 - 2.75x$

Ejemplo 1.19 Resuelva $\frac{2}{3}x = \frac{1}{3}x - 1$.

Solución:

$$\frac{2}{3}x = \frac{1}{3}x - 1$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x = -1 \qquad \text{... Transponer los términos}$$

$$\frac{1}{3}x = -1 \qquad \text{... Reducir los términos semejantes}$$

$$x = -3 \qquad \text{... Multiplicar por 3 (propiedad } \boxed{3}\text{)}$$

Note que los coeficientes de x son fracciones por lo que se debe aplicar el método para restar fracciones con igual denominador.

Ejercicio 1.17 Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{3}{7}x = \frac{2}{7}x + 2$ b) $\frac{1}{9}x - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

Ejemplo 1.20 Resuelva $\frac{1}{2}x - 5 = -\frac{1}{3}x$.

Solución: Observe que se vuelve más sencillo si se quitan los denominadores y la convierte en una ecuación con números enteros. ¿Cómo lo haces? Encuentra el mínimo común múltiplo (m.c.m) de todos los denominadores que tiene la ecuación y luego multiplique toda la ecuación por ese número (m.c.m).

$$\frac{1}{2}x - 5 = -\frac{1}{3}x$$

$$\left(\frac{1}{2}x - 5\right) \times 6 = -\frac{1}{3}x \times 6 \qquad \text{... Multiplicar por el m.c.m de 2 y 3 que es 6 (propiedad } \boxed{3}\text{)}$$

$$\frac{1}{2}x \times 6 - 5 \times 6 = -\frac{1}{3}x \times 6 \qquad \text{... Propiedad distributiva}$$

$$3x - 30 = -2x \qquad \text{... Efectuar la multiplicación}$$

$$3x + 2x = 30 \qquad \text{... Transponer términos}$$

$$5x = 30 \qquad \text{... Reducir los términos semejantes}$$

$$x = 6 \qquad \text{... Dividir entre 5 (propiedad } \boxed{4}\text{)}$$

Múltiplo de 2: 2, 4, 6, 8, 10 ...
Múltiplo de 3: 3, 6, 9,12, 15 ...
Entonces m.c.m (2,3) = 6

Solución alternativa (transponiendo los términos)

$$\frac{1}{2}x - 5 = -\frac{1}{3}x$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 5 \qquad \text{... Transponer términos}$$

$$\frac{5}{6}x = 5 \qquad \text{... Reducir términos semejantes}$$

$$5x = 30 \qquad \text{... Multiplicar por 6 (propiedad } \boxed{3}\text{)}$$

$$x = 6 \qquad \text{... Dividir entre 5 (propiedad } \boxed{4}\text{)}$$

Note que se suman fracciones con distinto denominador.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Cuando se tienen ecuaciones con fracciones, una forma de resolverlas es multiplicar cada uno de los términos por el mínimo común múltiplo de todos sus denominadores para convertir los coeficientes de la ecuación a números enteros.

Ejercicio 1.18 Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{1}{2}x - 3 = \frac{1}{5}x$ b) $\frac{1}{4}x + 2 = \frac{1}{2}x$ c) $\frac{1}{3}x - 1 = \frac{1}{2}x$

Ejemplo 1.21

Resuelva $\frac{x-2}{3} = \frac{x+4}{6}$.

Solución:

> El m.c.m. de 3 y 6 es 6.

$$\frac{x-2}{3} = \frac{x+4}{6}$$

$\frac{x-2}{3} \times 6 = \frac{x+4}{6} \times 6$ ... Multiplicar por el m.c.m. de 3 y 6 (propiedad 3)

$(x-2) \times 2 = (x+4) \times 1$ ... Simplificar

$2x - 4 = x + 4$ ... Aplicar propiedad distributiva

$2x - x = 4 + 4$ ... Transponer términos

$x = 8$ ... Reducir términos semejantes

> En el proceso se puede realizar lo siguiente:
>
> $$\frac{x-2}{3} \times 6 = \frac{(x-2) \times \cancel{6}^{\,2}}{\cancel{3}_{\,1}}$$
> $$= (x-2) \times 2$$
> $$= 2x - 4$$

Ejercicio 1.19 Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{x-4}{2} = \frac{x+2}{4}$ b) $\frac{2x-7}{5} = \frac{x-5}{10}$ c) $\frac{5x-1}{6} = \frac{x+3}{2}$

Ejemplo 1.22

Resuelva $\frac{x-2}{4} - \frac{1}{2} = \frac{x-1}{3}$.

Solución:

> El m.c.m. de 4, 2 y 3 es 12.
> m.c.m. (4, 2, 3) = 12

$$\frac{x-2}{4} - \frac{1}{2} = \frac{x-1}{3}$$

$\frac{x-2}{4} \times 12 - \frac{1}{2} \times 12 = \frac{x-1}{3} \times 12$ ... Multiplicar por m.c.m. de 2, 3, 4 (propiedad 3)

$(x-2) \times 3 - 1 \times 6 = (x-1) \times 4$ ... Simplificar

$3x - 6 - 6 = 4x - 4$ ... Eliminar paréntesis

$3x - 12 = 4x - 4$ ... Reducir términos semejantes

$3x - 4x = -4 + 12$ ... Transponer términos

$-x = 8$ ... Reducir términos semejantes

$x = -8$ ... Dividir entre −1 o multiplicar por −1 (propiedad 4 o 3)

Ejercicio 1.20 Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{x+4}{7} + \frac{x-8}{2} = 3$ b) $\frac{5}{3} - \frac{x}{3} = \frac{1-x}{2}$ c) $\frac{x}{2} - 4 = \frac{x-6}{3}$

Lección 2: Aplicación de las ecuaciones de primer grado

Sección 1: Proceso de resolución de problemas con ecuaciones de primer grado

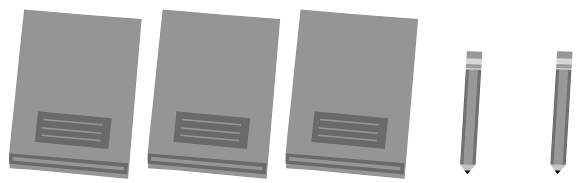
Ejemplo 2.1

Ana compró 3 cuadernos y 2 lápices, pagando un total de 41 lempiras. Si pagó 7 lempiras por cada lápiz, ¿cuál es el precio de un cuaderno?

Solución:

Para resolver este tipo de problemas vamos a encontrar una ecuación que represente los datos siguiendo los pasos.

1) Elaborar un dibujo que represente la situación del problema.



? lps ? lps ? lps 7 lps 7 lps $=$ 41 lps

2) Determinar los datos que nos dan y los datos buscados.

Datos dados: Ana compró 3 cuadernos y 2 lápices
1 lápiz vale 7 lempiras
En total pagó 41 lempiras.

Datos buscados: El precio de un cuaderno

3) Nombrar con la variable x el dato desconocido y expresar los otros datos en términos de x.

El precio de un cuaderno: x lps
El precio de 3 cuadernos se expresa $3x$ lps

4) Expresar una ecuación que represente la situación.

Precio de 3 cuadernos $+$ precio de 2 lápices $=$ Total

$$3x + 14 = 41$$

5) Resolver la ecuación.

$$\begin{aligned} 3x + 14 &= 41 \\ 3x &= 41 - 14 \\ 3x &= 27 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Respuesta: El precio de un cuaderno es 9 lempiras.

En la resolución del problema siguiente ya no es necesario escribir el nombre de cada paso.

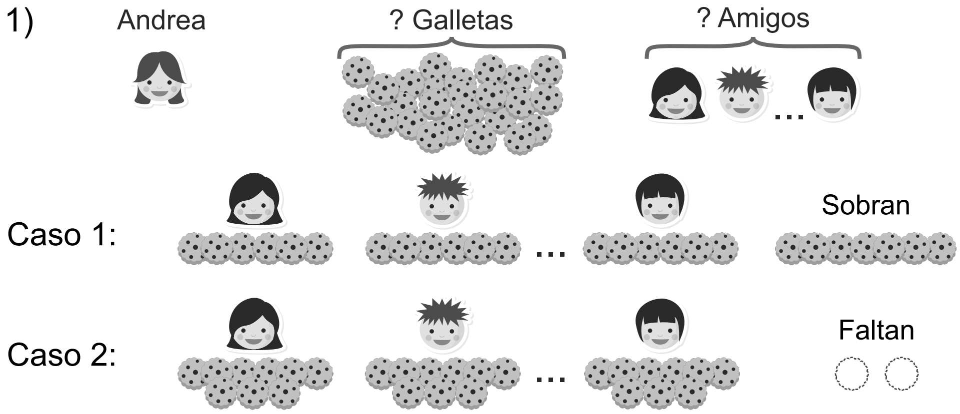
Ejercicio 2.1 Carlos compró 3 lápices y un cuaderno que vale 15 lempiras. Si pagó por todo 45 lempiras, ¿cuánto vale cada lápiz?

Ejemplo 2.2

Andrea quiere repartir galletas a sus amigos, si le da 6 galletas a cada uno le sobran 7, si le da 9 galletas a cada uno le hacen falta 2. ¿Entre cuántos amigos quiere repartir Andrea las galletas?

Solución:

1)



2) Datos dados: Si reparte 6 galletas a cada uno sobran 7
Si reparte 9 galletas a cada uno faltan 2

Datos buscados: cantidad de amigos de Andrea

3) Cantidad de amigos de Andrea: x
Si reparte 6 galletas a cada uno sobran 7, es decir la cantidad de galletas se expresa
$6x + 7$
Si reparte 9 galletas a cada uno faltan 2: es decir la cantidad de galletas se expresa $9x - 2$

> Observe que cuando sobran galletas estas se suman a la cantidad que se repartió y cuando hacen falta galletas se restan de la cantidad repartida.

4) Como la cantidad de galletas es igual en cada caso se puede escribir la siguiente ecuación: $9x - 2 = 6x + 7$

5) Resolviendo la ecuación anterior

$$\begin{aligned} 9x - 2 &= 6x + 7 \\ 9x - 6x &= 7 + 2 \\ 3x &= 9 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

> Observe que el total de galletas que Andrea tiene que repartir son 25 galletas.

Respuesta: Andrea quiere repartir las galletas entre 3 amigos.

Ejercicio 2.2

Se van a repartir confites a varios niños. Si se le dan 8 confites a cada uno hacen falta 3 y si se le dan 7 confites a cada uno sobran 4. ¿Cuántos niños hay en total?

Ejemplo 2.3

Gloria salió de su casa para la escuela, 6 minutos después su hermano Luis salió de la casa para la escuela.
Gloria camina a una velocidad de 50 m por minuto y Luis a 80 m por minuto.
Y si Luis alcanza a Gloria antes de llegar a la escuela, ¿después de cuántos minutos de la salida de Luis, él la alcanza?

Solución:

1) Datos dados:

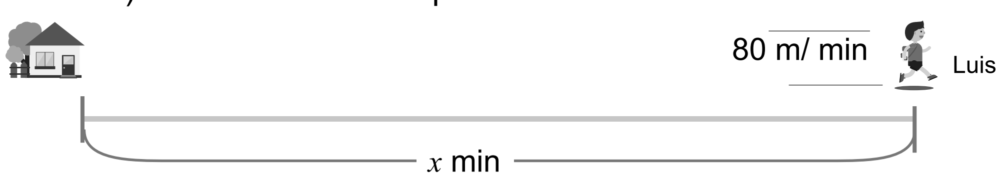
Velocidad de Gloria: 50 m/min
Velocidad de Luis: 80 m/min
Luis sale 6 minutos después que Gloria
x (minutos): Tiempo que tardará después de salir Luis de la casa hasta alcanzar a Gloria.

2) Distancia recorrida por Gloria.

Distancia recorrida
= velocidad × tiempo

Velocidad: 50 m/min
Tiempo: $6 + x$ (minutos)
Entonces: distancia recorrida $= 50\,(6 + x)$

3) Distancia recorrida por Luis



Velocidad: 80 m/min
Tiempo: x (minutos)
Entonces: distancia recorrida $= 80x$

4) Como las distancias recorridas son iguales podemos escribir la siguiente ecuación:

$$80x = 50\,(6 + x)$$

5) Resolviendo la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} 80x &= 50\,(6 + x) \\ 80x &= 300 + 50x \\ 80x - 50x &= 300 \\ 30x &= 300 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Observe que cuando las 2 personas se encuentren, ambos habrán recorrido la misma distancia.

Respuesta: Luis alcanza a Gloria después de 10 minutos

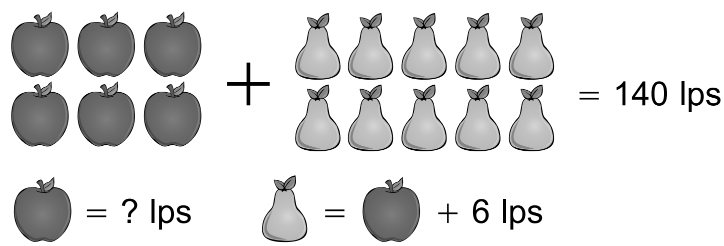
Ejercicio 2.3 Dos autos A y B salen de una misma ciudad. El auto A sale a una velocidad de 50 km/h. 2 horas después sale el auto B hacia la misma dirección a una velocidad de 70 km/h. ¿Después de cuántas horas de salida del auto B, el auto B alcanza al auto A?

Ejemplo 2.4

Carmen fue al mercado y compró 6 manzanas y 10 peras, gastando en total 140 lempiras. Si una pera cuesta 6 lempiras más que una manzana, ¿cuánto vale una manzana? y ¿cuánto vale una pera?

Solución:

1)



2) Datos dados: Carmen compró 6 manzanas y 10 peras
1 pera cuesta 6 lempiras más que una manzana
En total gastó 140 lempiras

Datos buscados: El precio de una manzana
El precio de una pera

3) El precio de una manzana: x lps

El precio de una pera: $(x + 6)$ lps

4) Podemos igualar el precio de las 6 manzanas y 10 peras al total del dinero que gastó.

Precio de 6 manzanas + precio de 10 peras = Total

$$6x \quad + \quad 10(x+6) \quad = \quad 140$$

5) Resolviendo la ecuación:

$$\begin{aligned} 6x + 10(x+6) &= 140 \\ 6x + 10x + 60 &= 140 \\ 16x &= 140 - 60 \\ 16x &= 80 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Para encontrar el precio de una pera, sustituye $x = 5$ en $x + 6$.

$$\begin{aligned} x + 6 &= 5 + 6 \\ &= 11 \end{aligned}$$

Respuesta: Una manzana vale 5 lempiras y una pera vale 11 lempiras.

Ejercicio 2.4 José necesita 2 cintas, una verde y una amarilla. El largo de la cinta verde es 10 cm más que la cinta amarilla, si la suma del largo de ambas cintas debe ser de 100 cm. ¿Cuánto debe medir la cinta amarilla? y ¿cuánto debe medir la cinta verde?

Ejercicios

1 Dadas las siguientes ecuaciones diga para cuáles de ellas $x = 2$ es solución o no.

a) $12x - 9 = 15$ b) $4 - 5x = 3x$

c) $9x + 5 = 20$ d) $-12x = 7x + 2$

2 Resuelva las siguientes ecuaciones aplicando las propiedades de la igualdad.

a) $x - 5 = 6$ b) $x + 3 = -8$ c) $-5x = 30$

d) $\frac{x}{4} = 6$ e) $-3x + 2 = 8$

3 Resuelva las siguientes ecuaciones usando transposición de términos.

a) $x + 2 = 2x - 7$ b) $7x + 3 = 11x - 13$ c) $2x - 17 = -2 + 5x$

4 Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $3(2x + 5) = 5x + 17$ b) $2(x - 2) = 3(x - 8) + 10$

c) $x + 0.3 = 0.7x + 2.4$ d) $2x + 0.9 = 3x - 3.1$

e) $\frac{x + 5}{3} = \frac{10 - x}{2}$ f) $\frac{1}{3}x + 1 = \frac{4}{3}x$

5 Resuelva aplicando ecuaciones de primer grado.

a) La suma de las edades de Carlos y Alicia es 44 años. Si Alicia tiene 8 años menos que Carlos. ¿Cuál es la edad de Carlos y Alicia?

b) Andrea fue al centro comercial y compró 4 camisas y 2 pantalones a 75 lempiras cada uno. Si en total le cobraron 290 lempiras, ¿cuál es el precio de una camisa?

c) El largo de un rectángulo mide el triple de lo que mide el ancho. Si el perímetro del rectángulo es 48 cm, ¿cuánto mide cada lado del rectángulo?

d) Gloria sale para ir a la casa de su abuela 9 minutos antes que su hermano Luis. Si se sabe que Gloria camina a una velocidad de 50 m por minuto y Luis a una velocidad de 80 m por minuto. ¿Después de cuántos minutos de la salida de Luis, él alcanza a Gloria?

¡La magia de los números!

Recordemos

1. Seleccione un número de 1 hasta 9.
2. Quite 1 a ese número que usted seleccionó.
3. Doble el número que le resultó en el paso 2.
4. Agregue 3 al número que le quedó en el paso 3.
5. Quite el doble del número en el paso 1 del número que le quedó en el paso 4.

Vamos a pensar por qué el resultado del cálculo es siempre “1”.
Utilizaremos una variable para generalizar.

1. Llame “a” al número que seleccionamos.

$8 \rightarrow a$

$3 \rightarrow a$

2. Quite 1 a “a”. .... $a - 1$

3. Doble $a - 1$ .... $2\,(a - 1) = 2a - 2$

4. Agregue 3 a $2a - 2$ .... $(2a - 2) + 3 = 2a + 1$

5. Quite el doble de “a” de $2a + 1$ $(2a + 1) - 2a = 1$

Entonces, no depende del número que se selecciona, el resultado siempre es “1”.

Hemos seleccionado un número natural de una cifra (1 a 9).
Pero, también se puede seleccionar cualquier número y el resultado es siempre 1.
Pruebe con los números: 101, -5, $\frac{4}{11}$, -1.3

Unidad 4

Conjunto de puntos

Lección 1: Puntos, rectas y planos

Lección 2: Rayos y segmentos

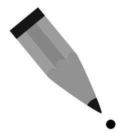
Unidad 4
Conjuntos de puntos

Lección 1: Puntos, rectas y planos

Sección 1: Puntos, rectas y planos

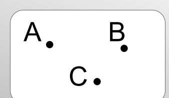
A continuación verá las representaciones de tres conceptos muy importantes en geometría, los cuales posiblemente ya había escuchado antes.

El primero de ellos se representa haciendo una marca con la punta de un lápiz sobre una hoja de papel.
Si no se mueve el lápiz, se obtiene:



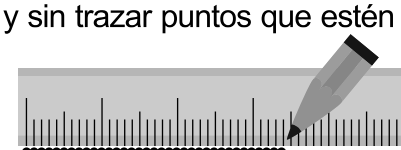
Esa marca es la representación de un **punto** en geometría. Ahora, imagine si se hubiera hecho la marca con una aguja, o con algo aún más fino, ¿podría decir cuál es el largo o ancho de ese punto?

Al no poder indicar el largo ni el ancho de un punto, se dice que éste **NO** tiene dimensiones y que solo representa una **posición**.
A los puntos los nombramos con letras mayúsculas.



El punto A, el punto B y el punto C.

El segundo concepto se puede obtener al trazar muchos puntos por el borde de una regla, cuidando siempre seguir el borde y sin trazar puntos que estén separados del mismo.
Se obtiene la siguiente figura:



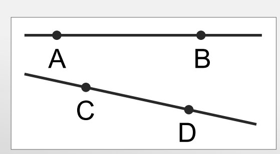
La anterior es una línea recta
Generalmente a las líneas rectas se les llama solo **rectas**, y las hacemos en un solo trazo y no punto por punto.

Imagine que esa recta se extiende de manera infinita, ¿podría decir cuál es el ancho y largo de esa recta?

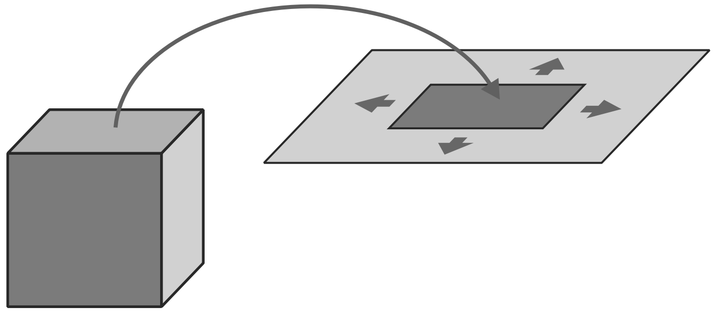
Las rectas carecen de ancho pero a diferencia del punto, las rectas si tienen largo, pero ese largo es **IMPOSIBLE** de medir, porque las rectas son ilimitadas por ambos extremos, es decir, **NO** tienen principio ni fin.
Las rectas se nombran de dos maneras:

Usando letras minúsculas: las rectas m y ℓ

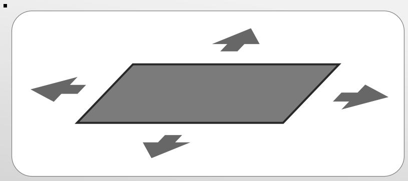
Nombrando dos puntos que estén en la recta: la recta AB y CD



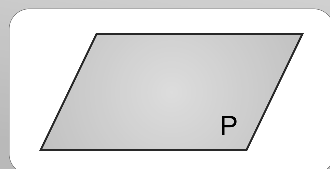
El tercer concepto se puede encontrar al observar una de las caras de un cubo. Ahora, imagine que la cara del cubo que usted observa se extiende ilimitadamente, ¿qué figura se obtiene?



A esta figura que se extiende ilimitadamente en todas las direcciones, se le llama **plano**.



A los planos, generalmente los representamos con cuadriláteros y los nombramos por letras mayúsculas: el **plano P**



Lección 2: Rayos y segmentos

Sección 1: Rayos y segmentos

Ejemplo 2.1

Dada la recta AB: 

a) ¿Qué figura se obtiene si no consideramos los puntos de la recta que están al lado izquierdo del punto A?

b) ¿Qué puede decir de los puntos que están a la derecha del punto B?

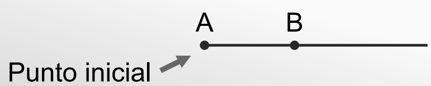
Respuesta

a) 

b) Los puntos que están a la derecha de punto B continúan hasta el infinito.

A esta figura se le conoce con el nombre de **rayo**.

El **rayo** es la parte de una recta que comienza en un punto y se extiende en un solo sentido.



Se nombra **rayo AB**, se escribe primero su punto inicial y luego uno de los puntos que esté en él.

Ejemplo 2.2

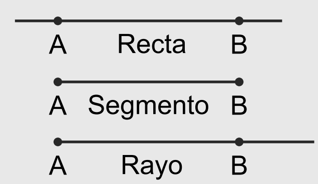
Siempre con la recta AB: 

a) ¿Qué figura obtiene si solo considera los puntos que están entre A y B incluyendo a ambos puntos?

b) Tomando como referencia la figura que se dibujo en a) ¿Qué puede decir de los puntos que están a la izquierda de A y a la derecha de B?

c) ¿Qué puede decir del punto A?, ¿y del punto B?

Los segmentos y rayos están contenidos en la recta que éstos mismos definen.



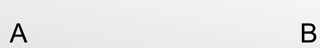
Respuesta:

a) 

b) Que no están en la figura.

c) Que el punto A es donde inicia la figura y el punto B es donde finaliza.

El **segmento** es la parte de una recta que está entre dos puntos llamados **extremos** del segmento.



Los puntos **A** y **B** son los extremos del segmento AB.

Los segmentos se simbolizan usando el nombre sus extremos.

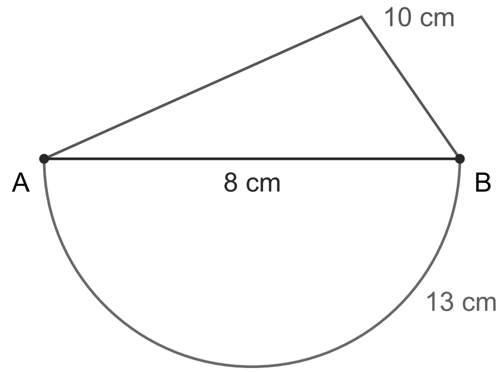
Para simbolizar el segmento AB se escribe $\overline{\mathbf{AB}}$.

Ejemplo 2.3

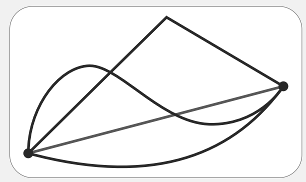
¿Cuál de los recorridos que se muestran en la figura de la derecha, es el más corto entre el punto A y el punto B?, ¿por qué?

a) La línea roja
b) El segmento
c) La línea verde

Respuesta: El segmento AB, porque mide menos que las demás líneas.

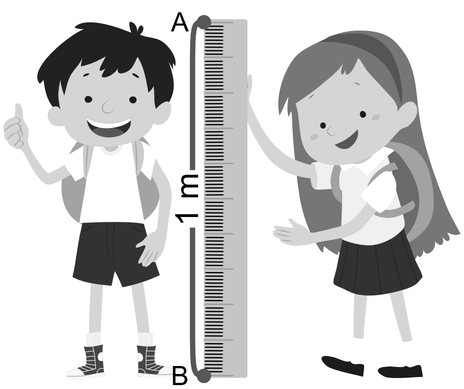


El recorrido más corto entre dos puntos cualesquiera está determinado por el segmento que los une. Ese segmento muestra la **distancia** entre esos dos puntos.

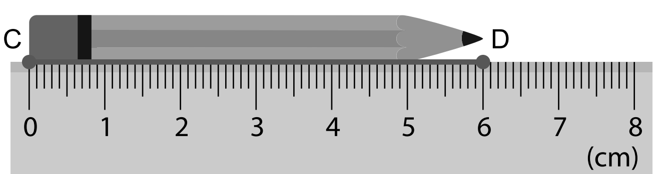


La distancia entre los puntos A y B del **Ejemplo 2.3** es 8 cm. Esa distancia también es la **longitud** del segmento AB, es decir, que la longitud del segmento AB es de 8 cm y se representa AB = 8 cm.

Al medir el largo o el ancho de algunos objetos, lo que en realidad hacemos es determinar la longitud del segmento que representa ese ancho y largo.



$\overline{AB}$ mide 1 m



$\overline{CD}$ mide 6 cm

$\overline{AB}$ y AB simbolizan dos cosas muy distintas.

$\overline{AB}$ significa segmento AB

AB significa longitud del segmento AB

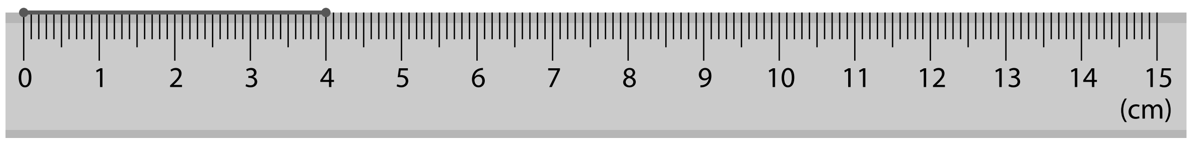
AB = 10 cm

Ejemplo 2.4

Trace el segmento FG con 4 cm de longitud.

> Medimos la longitud de segmentos usando instrumentos como regla, cinta métrica y otros.

Solución:
Con la ayuda de una regla mida 4 cm y trace el segmento.



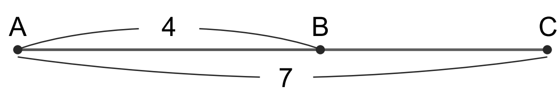
Luego marque los extremos y nómbrelos como F y G.

Ejercicio 2.1 Trace el segmento AB con 8 cm de longitud.

Ejemplo 2.5

El punto B está en el segmento AC, tal como se muestra en la figura. Si AC = 7 y AB = 4, ¿cuál es la longitud del segmento BC?

Solución:
La longitud del segmento AC es igual a la longitud del segmento AB más la longitud del segmento BC.



Entonces,

$AB + BC = AC$

$4 + BC = 7$ ... sustituir AC = 7 y AB = 4

$BC = 7 - 4$ ... trasponer términos

$BC = 3$

Respuesta: BC = 3

Ejercicio 2.2 El punto G está en el segmento FH, tal como se muestra en la figura. Si FH = 9 y GH = 2, ¿cuál es la longitud del segmento FG?

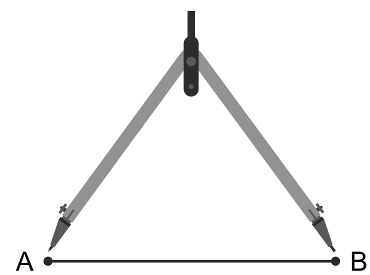
Ejemplo 2.6

Trace un segmento CD que tenga la misma longitud del segmento AB, utilizando regla y compás.

Solución:

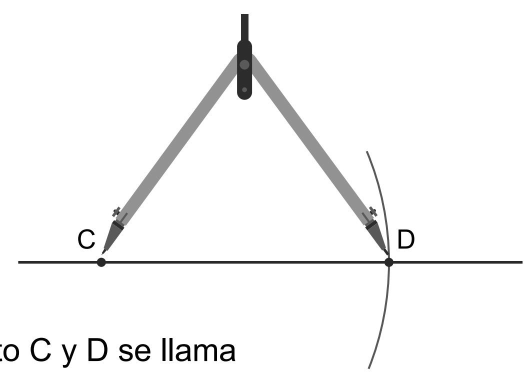
Paso 1: Con la regla se traza una recta cualquiera y se coloca el punto C sobre ella.

Paso 2: Se hace coincidir los extremos del compás con los extremos del segmento AB.



Se hace uso del compás para copiar, de manera más precisa, la longitud de segmentos pequeños.

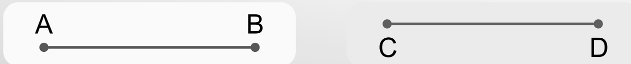
Paso 3: Con esa misma abertura se traza un arco con centro en C que corte a la recta. Al punto de corte llámelo D.



Ese segmento de recta limitado por el punto C y D se llama segmento CD y tiene la misma longitud que el segmento AB.

Dos o más segmentos son **congruentes** si tienen la misma longitud. Para simbolizar que dos segmentos son congruentes utilizamos el signo $\cong$.

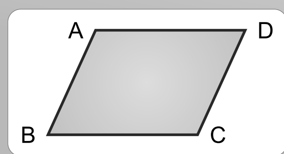
En el Ejemplo 2.6 los segmentos AB y CD son congruentes, porque tienen la misma longitud.



Los segmentos AB y CD tienen la misma longitud o sea, $AB = CD$

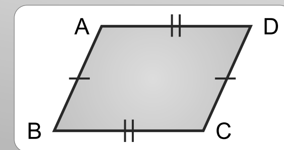
Entonces, los segmentos AB y CD son congruentes y se escribe $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Cuando dos segmentos son congruentes, por lo general, se coloca una misma marca en las figuras para indicarlo.
Por ejemplo:



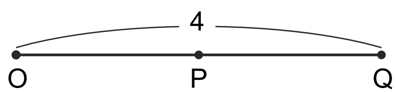
$AB = DC$

$BC = AD$, entonces

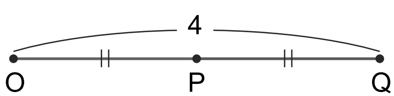


Ejemplo 2.7

El punto P está en el segmento OQ, tal como se muestra en la figura. Si $OQ = 4$ y $OP = PQ$. Encuentre OP y PQ.



Solución:
La longitud del segmento OQ es igual a la longitud del segmento OP más la longitud del segmento PQ.



Entonces

$OP + PQ = OQ$

$OP + OP = 4$ ... sustituir $OQ = 4$ y $OP = PQ$

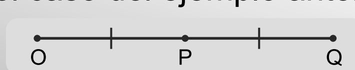
$2OP = 4$ ... reducir términos semejantes

$OP = \frac{4}{2}$

$OP = 2$

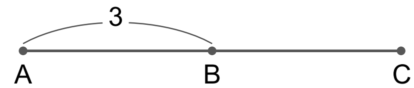
Respuesta: $OP = PQ = 2$

En el Ejemplo 2.7 observe que el punto P está a la misma distancia del punto O y del punto Q, por esta razón, se dice que el punto P es el punto medio de OQ.
El punto medio de un segmento, divide a éste en dos segmentos congruentes. En el caso del ejemplo anterior,



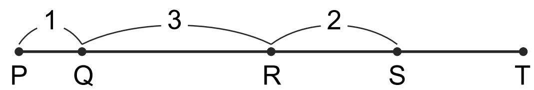
El **punto medio** de un segmento es aquel punto del segmento que dista lo mismo de los extremos del segmento.

Ejercicio 2.3 El punto B es el punto medio del $\overline{AC}$. Si $AB = 3$, encuentre la longitud del $\overline{AC}$.



Ejemplo 2.8

Si $PT = 8$ identifique cuál de los siguientes puntos es el punto medio. Explique por qué.

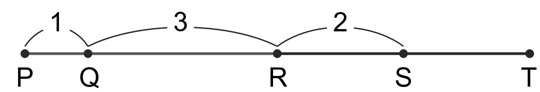


Solución:

El punto medio está a la mitad del $\overline{PT}$. Y la mitad de PT es

$8 \div 2 = 4$

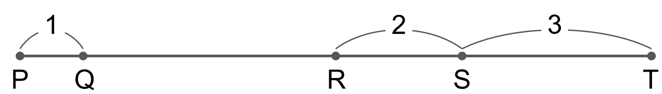
Por lo que el punto medio debe encontrarse a una distancia de 4 de cualquiera de los extremos del $\overline{PT}$.



$PQ + QR = 4$, es decir, la distancia de P a R es 4.

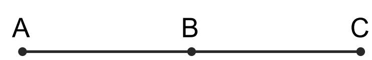
Respuesta: El punto medio del $\overline{PT}$ es R.

Ejercicio 2.4 Si $PT = 10$, identifique cuál de los siguientes puntos es el punto medio del segmento PT. Explique por qué.

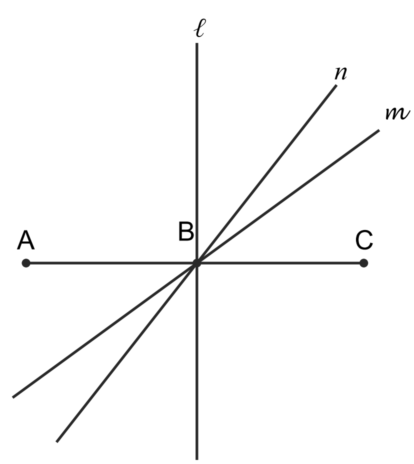


Ejemplo 2.9

El punto B es el punto medio del segmento AC. Trace a lo sumo 3 rectas que pasen por B.



Solución:



Cuando una recta pasa por el punto medio de un segmento, se dice que la recta biseca al segmento. En el **Ejemplo 2.9** las rectas ℓ, m y n bisecan al segmento AC.

La recta que biseca a un segmento se le llama **bisector** del segmento.

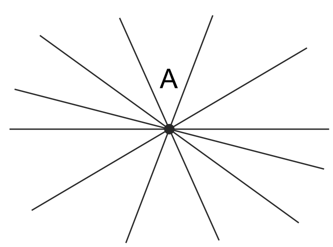
Ejercicio 2.5 El punto G es el punto medio del segmento FH. Trace a lo sumo 3 bisectores del segmento FH.

Por el siguiente **Ejemplo 2.10** se concluye que se pueden trazar infinitos bisectores.

Ejemplo 2.10

Dado el punto A, ¿cuántas rectas puede trazar que pasen por ese punto?

Solución:

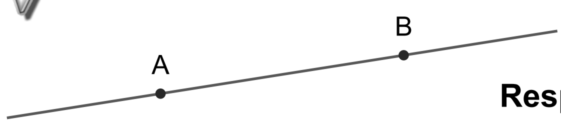


Respuesta: Pasan infinitas rectas.

Ejemplo 2.11

Ahora, dibuje dos puntos distintos A y B. ¿Cuántas rectas puede trazar que pasen por el punto A y B?

Solución:

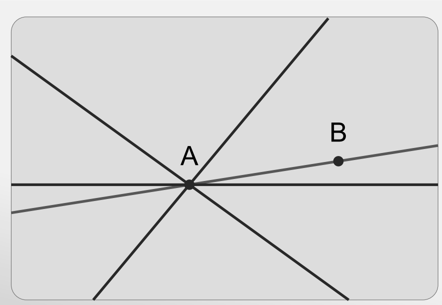


Respuesta: Solo una recta.

Por el **Ejemplo 2.10** y **Ejemplo 2.11** se concluye que,

Por un punto pasan infinitas rectas, pero dos puntos definen una y solo una recta.

A los puntos A y B se le conocen como puntos colineales, porque están en la misma recta AB.

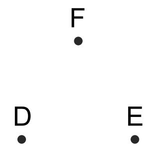


Dos o más puntos son colineales si están en una misma recta.

Ejemplo 2.12

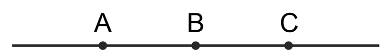
¿En cuál de los siguientes casos los tres puntos presentados son colineales?

a) 

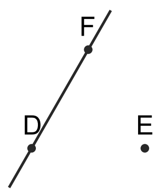
b) 

Solución:

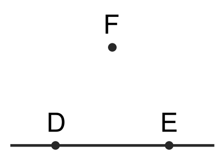
a) Para saber si varios puntos son colineales, basta con trazar una recta y si esa recta contiene esos puntos, entonces esos puntos son colineales.



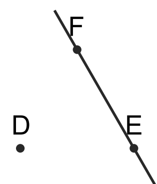
b) Al trazar una recta por el conjunto de puntos del inciso b) notamos que ninguna recta contiene a los tres puntos.



Queda fuera el punto E



Queda fuera el punto F

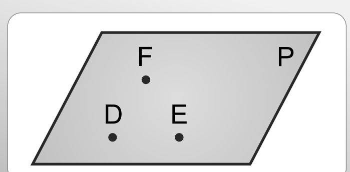


Queda fuera el punto D

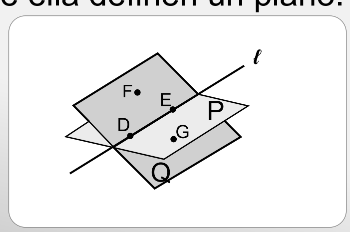
Respuesta: Los puntos del inciso a) todos son colineales.
Los puntos del inciso b) no todos son colineales.

Observando los puntos del inciso b) del ejemplo anterior se puede decir que,

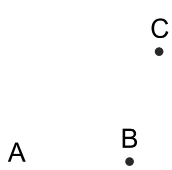
Tres puntos no colineales definen un plano.

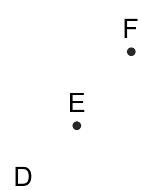


Una recta y un punto fuera de ella definen un plano.



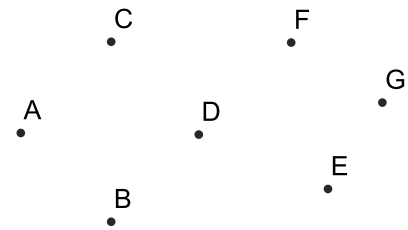
Ejercicio 2.6 ¿En cuál de los siguientes casos los tres puntos presentados son colineales?

a) 

b) 

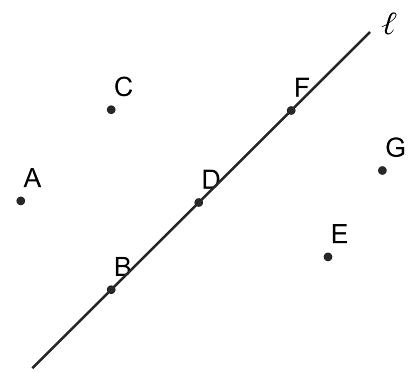
Ejemplo 2.13

Encuentre los tres puntos colineales y trace la recta que los contiene.

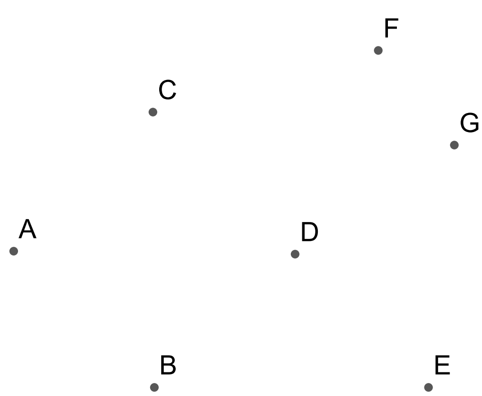


Solución:

La condición para trazar la recta es a través de tres puntos colineales, los únicos puntos que cumplen esa condición son los puntos B, D y F, entonces, se traza la recta ℓ a través de ellos.

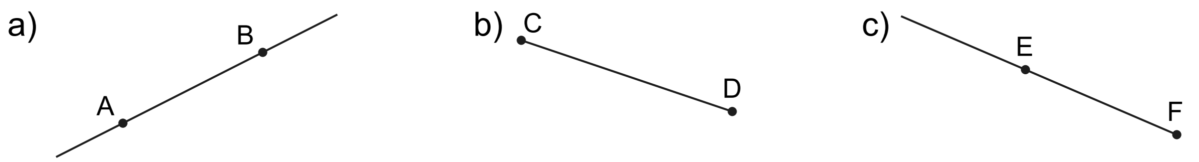


Ejercicio 2.7 Encuentre los tres puntos colineales y trace la recta que los contiene.



Ejercicios

1 Nombre cada una de las siguientes figuras.



2 Dibuje lo que a continuación se le pide:

a) Recta CD
b) Segmento ST
c) Rayo EF

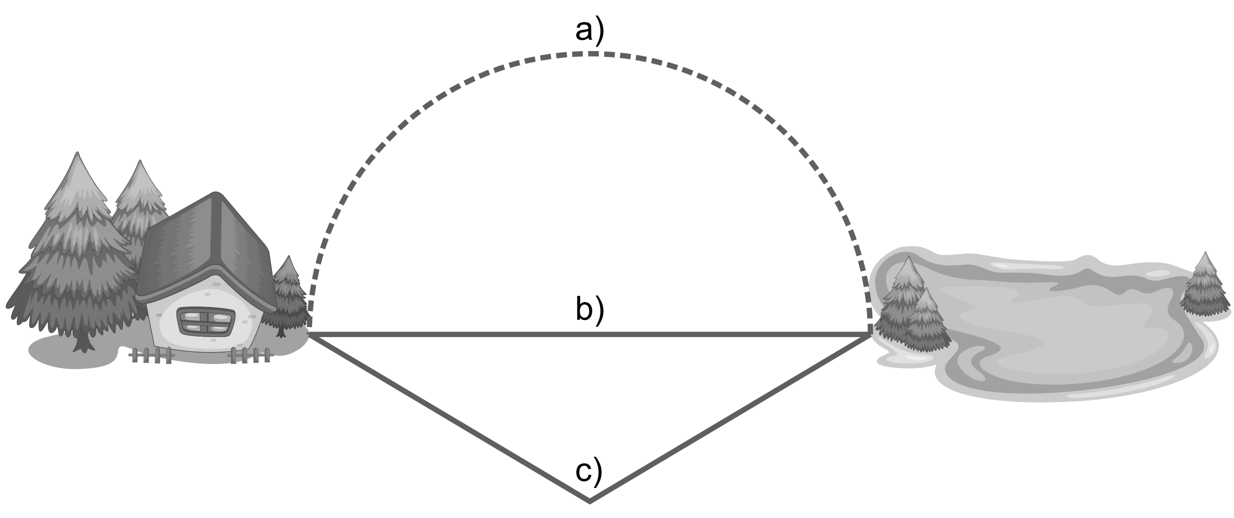
3 ¿Cuál de los siguientes se extiende indefinidamente?

a) Segmento
b) Recta
c) Punto

4 ¿Cuál de los siguientes tiene un punto medio?

a) Rayo
b) Recta
c) Segmento

5 ¿Cuál es el camino más corto para llegar de la casa al lago? Explique el por qué.



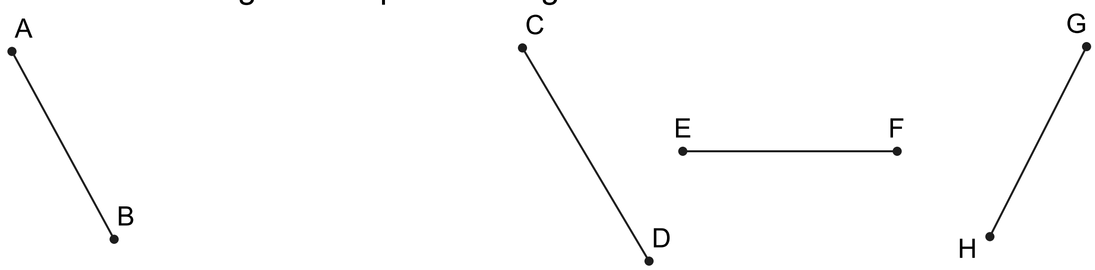
6 Dibuje los puntos A y C, luego trace $\overline{AC}$ y ubique un punto B en el segmento, de manera que B está entre A y C.

7 Encuentre la medida que falta si B está entre A y C.

a) $AB = 8$, $BC = 16$ y $AC =$ ______

b) $AB = 11$, $BC =$ ______ y $AC = 31$

8 Encuentre los segmentos que son congruentes con el $\overline{AB}$.



9 Encuentre la medida que falta si O es punto medio del segmento determinado por P y Q.

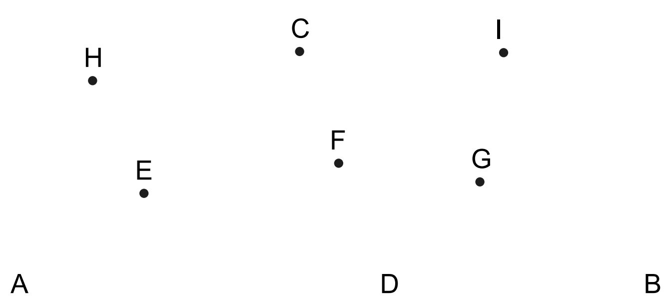
a) $PO = 8$, $PQ =$ ______

b) $PO =$ ______, $PQ = 20$

10 ¿Cuántas rectas determinan 4 puntos colineales?

11 ¿Cuántas rectas determinan 4 puntos donde no hay 3 colineales?

12 Encuentre los grupos de tres puntos que son colineales y trace la recta que los contiene.



Unidad 5

Ángulos

Lección 1: Ángulos

Lección 2: Construcción de ángulos

Lección 3: Perpendicularidad

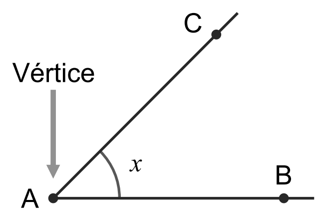
Unidad 5 Ángulos

Lección 1: Ángulos

Sección 1: Definición de ángulo, medida y congruencia

La definición de ángulo y los temas fundamentales sobre éste se estudiaron en 4to, 5to y 6to grado.

Recordando la definición de ángulo:
Un **ángulo** es la abertura que forman dos rayos (AB y AC) que se unen en un punto común (punto A) llamado **vértice**.

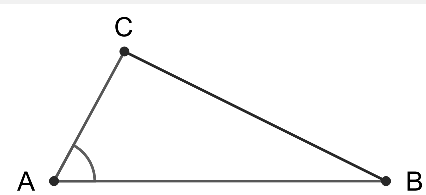


El ángulo mostrado se puede designar de varias maneras: $\angle$A, $\angle$BAC, $\angle$CAB ó $\angle x$.

No se debe confundir el símbolo del ángulo ($\angle$) con el símbolo menor que (<)

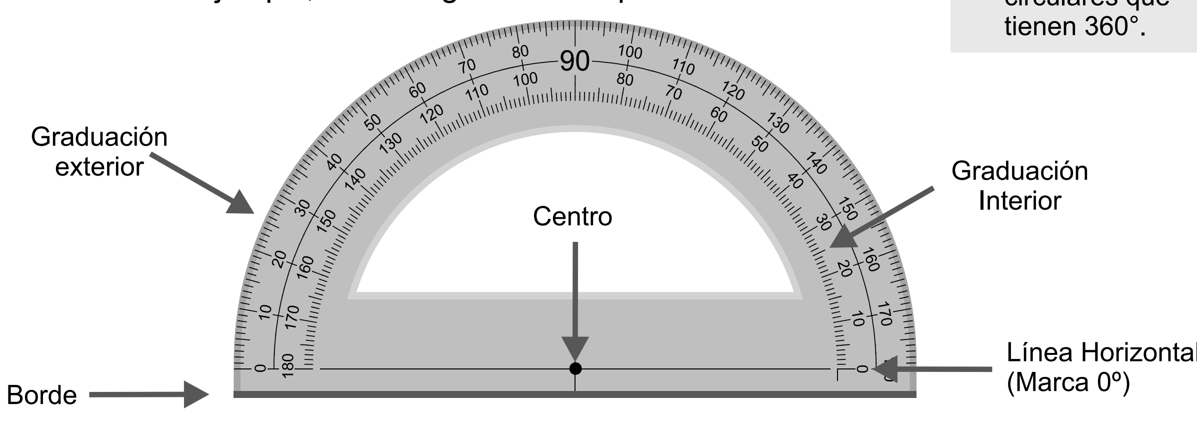
Recordando la definición de rayo:
Rayo: segmento de recta que comienza en un punto determinado y se extiende en una dirección. El rayo con extremo en A y que pasa por el punto B se escribe como "rayo AB"

En muchas situaciones se llama ángulo aún cuando está compuesto por segmentos en lugar de rayos.
En el triángulo de la derecha se observa el $\angle$A ($\angle$BAC ó $\angle$CAB) cuyos lados son los segmentos AC y AB.



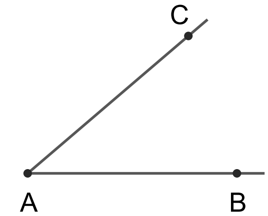
Para medir ángulos se usa el transportador. La unidad que utilizaremos para medir ángulos es el grado y se utiliza el símbolo "°". Por ejemplo, noventa grados se expresa como 90°.

También hay transportadores circulares que tienen 360°.



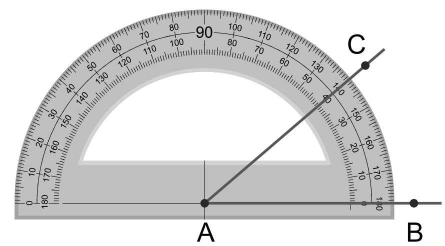
Ejemplo 1.1

Mida con el transportador el $\angle$BAC de la figura a la derecha:

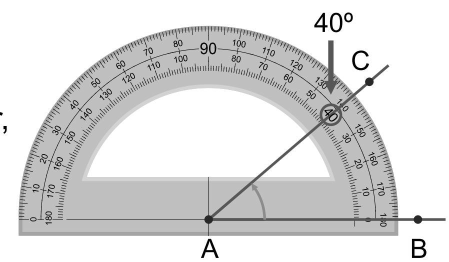


Solución:

Paso 1: Colocar y hacer coincidir el centro del transportador con el vértice del ángulo y ajustar la línea horizontal (marca 0°) sobre el rayo AB del ángulo.

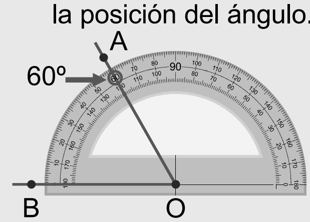


Paso 2: Se leen los grados de la graduación donde aparece la marca 0°, en este ejemplo se lee la graduación interior, hasta llegar al número por el que pasa el rayo AC. Este número es la medida del $\angle$BAC en grados.



De esta forma, la medida del $\angle$BAC es 40°.
Para expresar que la medida del $\angle$BAC es 40°, se escribe $m\angle\text{BAC} = 40°$.

El transportador cuenta con dos graduaciones de números, una interior y otra exterior, se comienza a leer desde la línea horizontal (marca 0°) sin importar la posición del ángulo.



La medida del $\angle$AOB se lee en la graduación exterior.
En este caso $m\ \angle\text{AOB} = 60º$

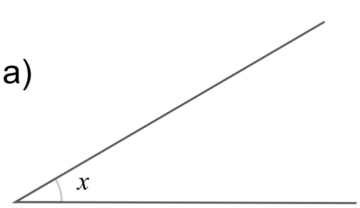
Dos ángulos que tienen la misma medida se llaman **ángulos congruentes**.
Si $\angle$A y $\angle$B son congruentes, se escribe $\angle A \cong \angle B$.

$m\ \angle A = m\ \angle B$, entonces, $\angle A \cong \angle B$.

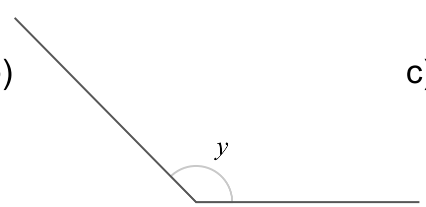
Ejercicio 1.1

Utilizando el transportador encuentre la medida de los ángulos x, y y z:

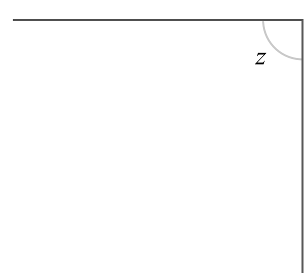
a)



b)



c)



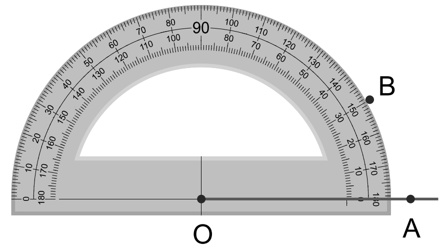
Se pueden trazar ángulos con una medida determinada con un proceso similar al utilizado en el *Ejemplo* **1.1** . Se debe tener cuidado de hacer una lectura en la graduación correcta.

***Ejemplo* 1.2**

Con la ayuda del transportador, trace el $\angle$AOB tal que $m\angle$AOB $=$ 30°.

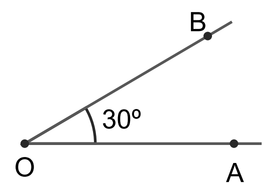
Solución:

Paso 1: Trazar el rayo OA.



Paso 2: Ajustar la línea horizontal del transportador (marca 0°) sobre el rayo OA. Utilizando la graduación interior, se busca el valor de la medida del ángulo, en este caso 30° y se marca el punto B.

Paso 3: Finalmente, quite el transportador y trace el rayo OB.



El ángulo trazado es el $\angle$AOB, cuya medida es 30º.

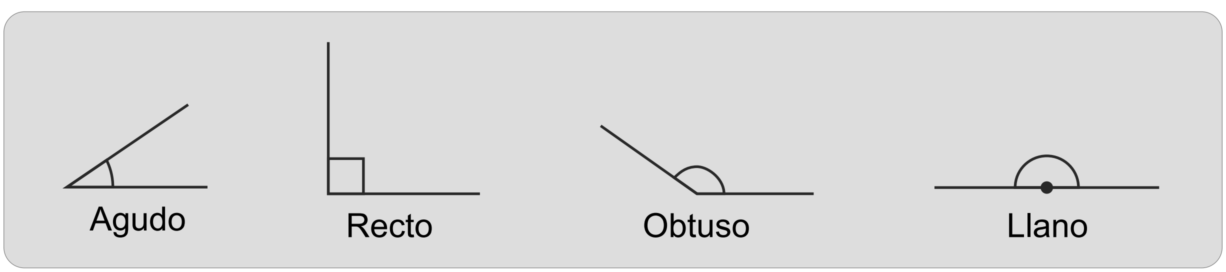
Esto es, $m\angle$AOB $=$ 30°

***Ejercicio* 1.2** Con la ayuda del transportador, trace los ángulos cuya medida sea la siguiente:

a) 45º b) 140º c) 160º

Sección 2: Clasificación de ángulos

Recuerde los tipos de ángulos según su medida que se estudiaron en 4to grado.



Los ángulos según su medida se clasifican en:

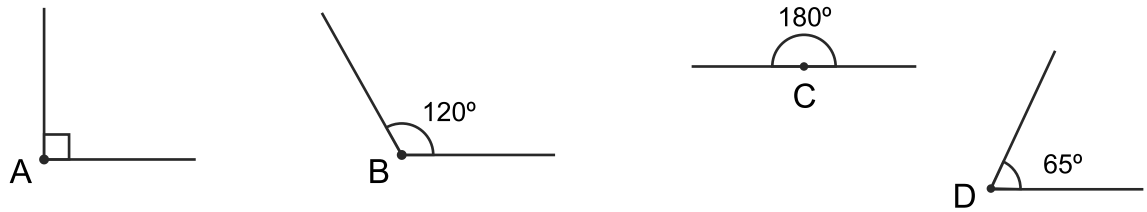
1) Si 0º $<$ $m\angle$ A $<$ 90°, entonces el $\angle$A es un **ángulo agudo**.
2) Si $m\angle$A $=$ 90°, entonces el $\angle$A es un **ángulo recto**.
3) Si 90° $<$ $m\angle$A $<$ 180°, entonces el $\angle$A es un **ángulo obtuso**.
4) Si $m\angle$A $=$ 180°, entonces el $\angle$A es un **ángulo llano**. En este caso se forma una recta.

Para indicar un ángulo recto en la figura, se utiliza el símbolo ⏋

Ejemplo 1.3

Escriba que tipo de ángulo es cada uno de los siguientes ángulos según su medida:

a) $\angle$A b) $\angle$B c) $\angle$C d) $\angle$D



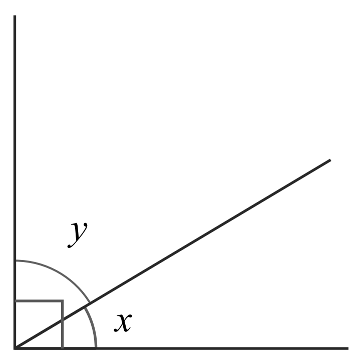
Respuesta: a) Ángulo recto b) Ángulo obtuso c) Ángulo llano d) Ángulo agudo

Ejercicio 1.3 Escriba que tipo de ángulo son $\angle$A , $\angle$B y $\angle$C según su medida:

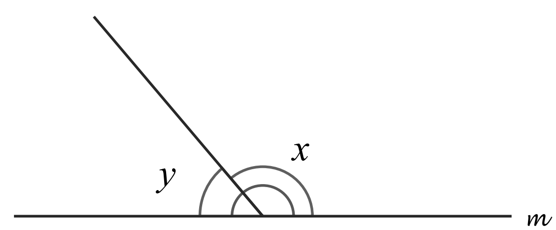
a) $m\angle$A $=$ 180º b) $m\angle$B $=$ 30º c) $m\angle$C $=$ 150º

Recuerde que en 5to grado también se definieron los ángulos complementarios y ángulos suplementarios.

Si $m\angle x + m\angle y = 90°$ se dice que los ángulos x y y son **ángulos complementarios**.



Si $m\angle x + m\angle y = 180°$ se dice que los ángulos x y y son **ángulos suplementarios**.



Ejemplo 1.4

Encuentre la medida del $\angle x$ si:

a) $\angle x$ es el ángulo complementario del ángulo cuya medida es 50º.

b) $\angle x$ es el ángulo suplementario del ángulo cuya medida es 160º.

Solución:

a) La suma de las medidas de dos ángulos complementarios es 90º.

$m\angle x + 50º = 90°$

$m\angle x = 90° - 50º$

$m\angle x = 40º$

Respuesta: $m\angle x = 40º$

b) La suma de las medidas de dos ángulos suplementarios es 180º.

$m\angle x + 160º = 180°$

$m\angle x = 180° - 160º$

$m\angle x = 20º$

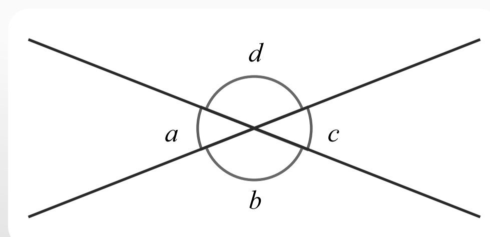
Respuesta: $m\angle x = 20º$

Ejercicio 1.4 Encuentre la medida del $\angle x$ si:

a) $\angle x$ es el ángulo complementario del ángulo cuya medida es 25º.

b) $\angle x$ es el ángulo suplementario del ángulo cuya medida es 50º.

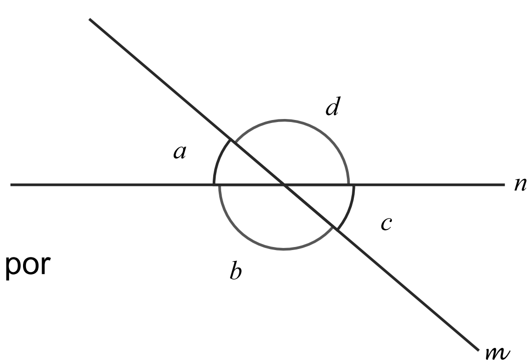
Si dos rectas, rayos o segmentos se cortan en un punto, se forman 4 ángulos. Los ángulos que están uno frente al otro se llaman **ángulos opuestos por el vértice**. En la figura, $\angle a$ y $\angle c$ son opuestos por el vértice, también $\angle b$ y $\angle d$ son opuestos por el vértice.



Analice qué propiedad tienen los ángulos opuestos por el vértice:

Ejemplo 1.5

En la figura de la derecha, si $m\angle a = 40°$, ¿Cuánto miden los ángulos b, c y d?



Solución:

En la figura anterior se observa que:

1) El $\angle a$ y el $\angle b$ son ángulos suplementarios por estar sobre la recta m, por lo tanto:

$m\angle a + m\angle b = 180°$, entonces:

$40° + m\angle b = 180°$

$m\angle b = 180° - 40°$

$m\angle b = 140°$

2) El $\angle b$ y el $\angle c$ son ángulos suplementarios por estar sobre la recta n, por lo tanto:

$m\angle b + m\angle c = 180°$, entonces:

$140° + m\angle c = 180°$

$m\angle c = 180° - 140°$

$m\angle c = 40°$

3) El $\angle c$ y el $\angle d$ son ángulos suplementarios por estar sobre la recta m, por lo tanto:

$m\angle c + m\angle d = 180°$, entonces:

$40° + m\angle d = 180°$

$m\angle d = 180° - 40°$

$m\angle d = 140°$

Respuesta: $m\angle b = 140°$, $m\angle c = 40°$, $m\angle d = 140°$.

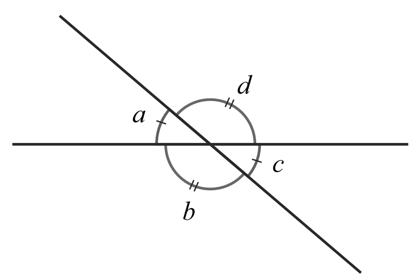
Observe que:

- El $\angle a$ es el ángulo opuesto por el vértice al $\angle c$ y $m\angle a = m\angle c$.
- El $\angle b$ es el ángulo opuesto por el vértice al $\angle d$ y $m\angle b = m\angle d$.

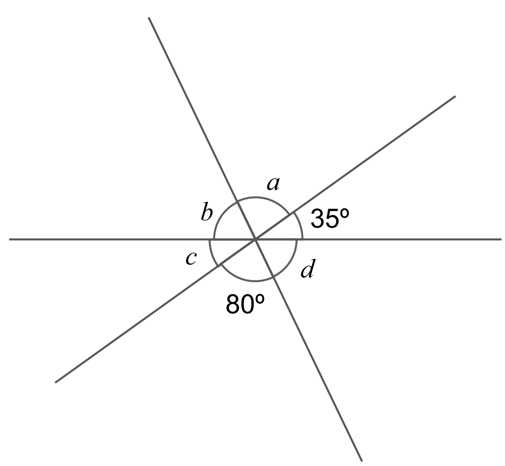
De lo anterior se concluye que: $\angle a \cong \angle c$ y $\angle b \cong \angle d$.

Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes. Es decir, los ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida.

Para indicar que dos o más ángulos son congruentes se trazan con un mismo símbolo como en la figura:



Ejercicio 1.5 Encuentre las medidas de los ángulos a, b, c y d.

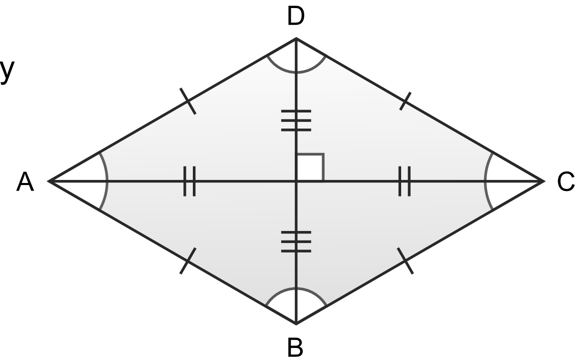


Lección 2: Construcción de ángulos

Sección 1: Construcción de la bisectriz

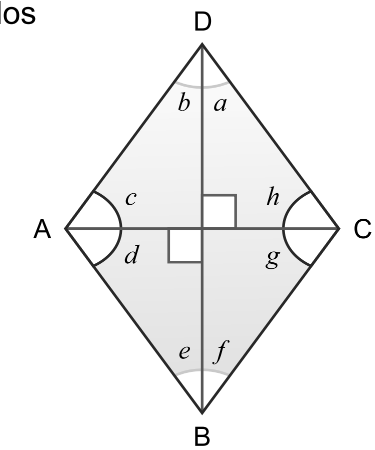
En 4to grado se estudió el rombo como el paralelogramo que tiene cuatro lados iguales y ángulos opuestos iguales. Sus características son las siguientes:

- Las diagonales se cortan a la mitad.
- Las diagonales se cortan formando ángulos rectos.



Ejemplo 2.1

Dado el rombo ABCD mida con el transportador los ángulos a, b, c y d y compare sus medidas.



Solución:

$m\angle a = m\angle b = 40°$

$m\angle c = m\angle d = 50°$

De igual manera, las medidas de los ángulos e, f, g y h son:

$m\angle e = m\angle f = 40°$

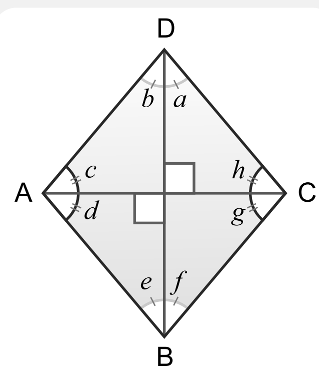
$m\angle g = m\angle h = 50°$

Observe que las diagonales del rombo dividen sus ángulos en dos ángulos de igual medida.

En 6to grado se aprendió que la línea que divide un ángulo en dos ángulos de igual medida se llama bisectriz del ángulo.

De lo anterior se puede concluir una característica del rombo: sus diagonales son bisectrices de los ángulos opuestos.

En el rombo ABCD, la diagonal AC es bisectriz del $\angle$A y del $\angle$C, la diagonal BD es la bisectriz del $\angle$B y del $\angle$D.



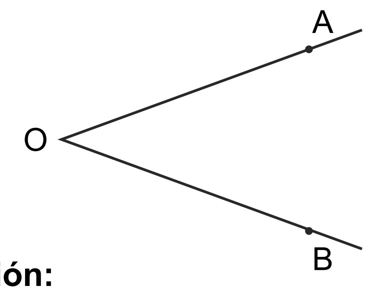
A continuación se hará la construcción de la bisectriz de un ángulo usando las propiedades del rombo.

Construir figuras es dibujarlas utilizando sólo regla y compás. La regla se usa para trazar rectas o segmentos y el compás se usa para trazar circunferencias con centro en un punto y trasladar medidas.

Definición de un rombo: es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados iguales.

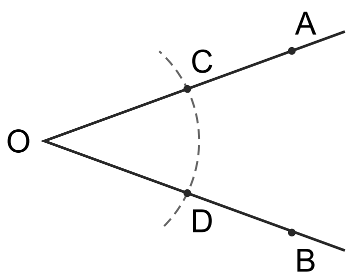
Ejemplo 2.2

Usando las propiedades del rombo construya la bisectriz del $\angle AOB$ con regla y compás.

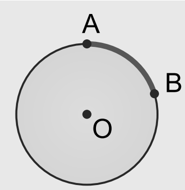


Solución:

Paso 1: Trazar un arco con centro en O y con cualquier radio, que corte los rayos OA y OB en los puntos C y D respectivamente.

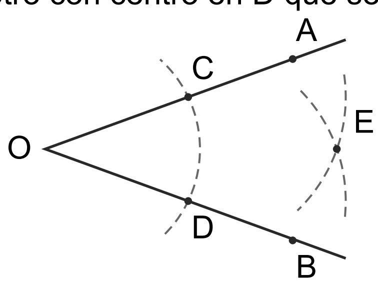


Arco es la porción de la circunferencia comprendida entre dos puntos de la misma.

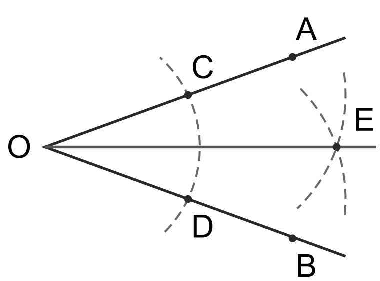


Arco AB

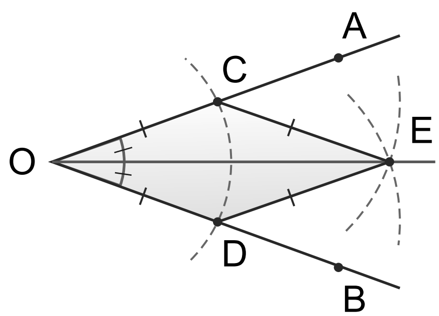
Paso 2: Con el mismo radio trazar dos arcos, uno con centro en C y otro con centro en D que se corten en el punto E.



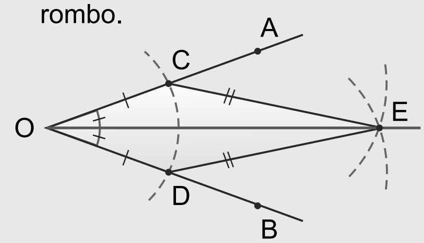
Paso 3: Trazar el rayo OE.



El cuadrilátero ODEC es un rombo y $\overline{OE}$ es una diagonal, por lo tanto $\angle$AOE y $\angle$BOE tienen la misma medida. Se concluye que el rayo OE es la bisectriz del $\angle$AOB.

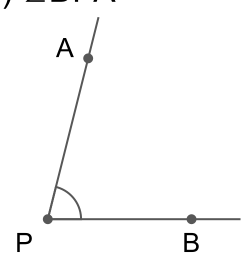


El radio de los arcos en el paso 2 del Ejemplo 2.2 puede ser de cualquier medida, pero el cuadrilátero formado no sería un rombo.

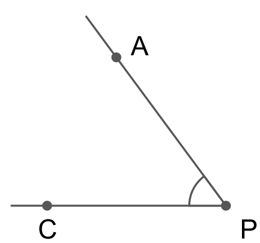


Ejercicio 2.1 Usando la propiedad vista del rombo, construya la bisectriz de los siguientes ángulos con regla y compás.

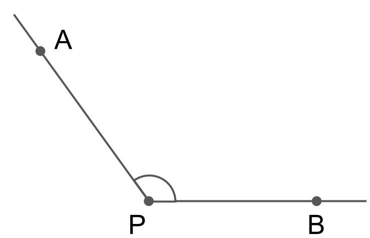
a) $\angle$BPA



b) $\angle$CPA



c) $\angle$BPA



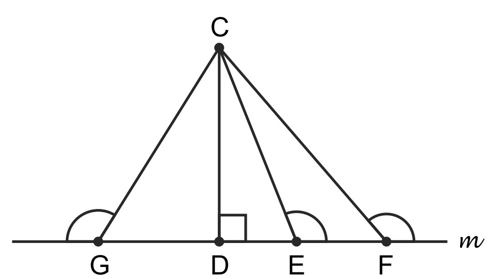
Lección 3: Perpendicularidad

Sección 1: Rectas perpendiculares y mediatriz de un segmento

Dos rectas, rayos o segmentos o combinaciones de éstas son perpendiculares cuando tienen un punto en común formando un ángulo recto.

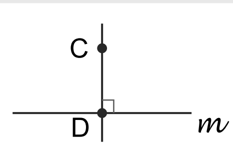
Ejemplo 3.1

En la figura de la derecha nombre el segmento perpendicular a la recta m.



Solución:

Respuesta: El segmento CD forma un ángulo recto con la recta m, por lo tanto es perpendicular a ésta.



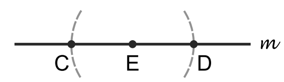
Para expresar que dos rectas, rayos, segmentos o combinaciones de éstas son perpendiculares, se expresará con el símbolo "$\perp$".
En la figura CD $\perp$ m.

Ejemplo 3.2

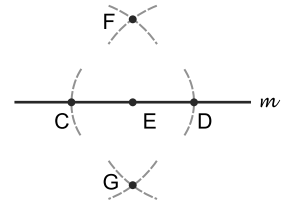
Construya la perpendicular a la recta m que pase por el punto E.

Solución:

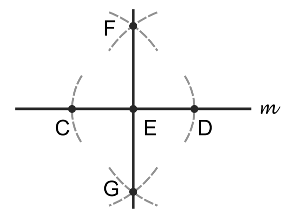
Paso 1: Trazar un arco de cualquier radio y centro en el punto E, que corte a la recta m en los puntos C y D.



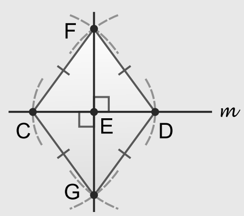
Paso 2: Con un radio mayor que el anterior, trazar dos arcos con centros en C y D que se corten en los puntos F y G.



Paso 3: Trazar la recta FG. La recta FG es perpendicular a la recta m, esto es, FG $\perp$ m.



Si se trazan los segmentos CG, GD, DF y FC observe que el cuadrilátero CGDF es un rombo y $\overline{CD}$ y $\overline{FG}$ son sus diagonales.



Las diagonales de un rombo se cortan formando ángulos rectos. Por lo tanto, FG $\perp$ CD.

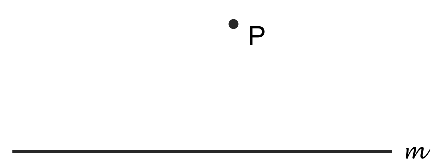
Recuerde que FG $\perp$ m expresa que el segmento FG $\perp$ m, el rayo FG $\perp$ m y también la recta FG $\perp$ m

Ejercicio 3.1

Construya la perpendicular a la recta m y que pase por el punto F.

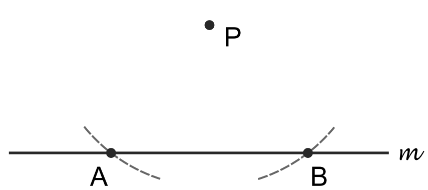
Ejemplo 3.3

Construya la perpendicular a la recta m que pasa por el punto P fuera de ella.

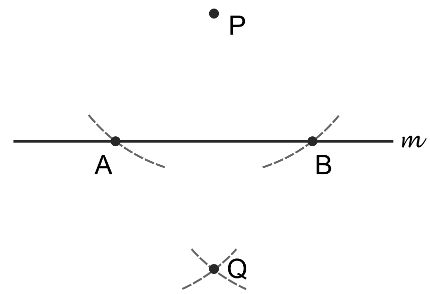


Solución:

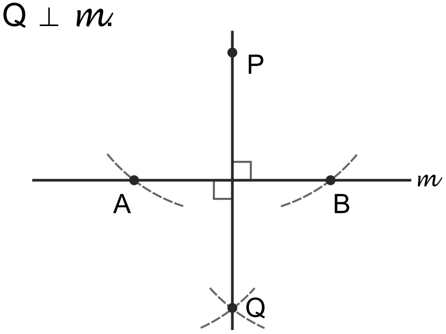
Paso 1: Trazar un arco de cualquier radio y centro en el punto P que corte a la recta m en los puntos A y B.



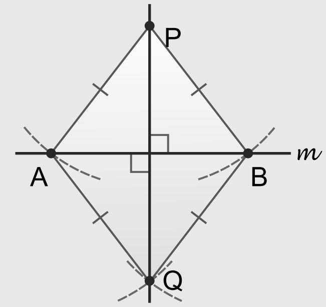
Paso 2: Trazar dos arcos con el mismo radio que el anterior con centro en los puntos A y B que se corten en el punto Q.



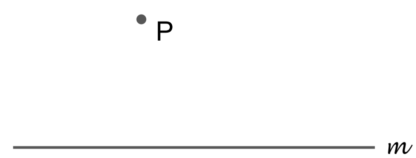
Paso 3: Trazar la recta PQ.
La recta PQ es perpendicular a la recta m, esto es, PQ $\perp$ m.



Los puntos A, Q, B y P determinan un rombo con AB $\perp$ PQ.

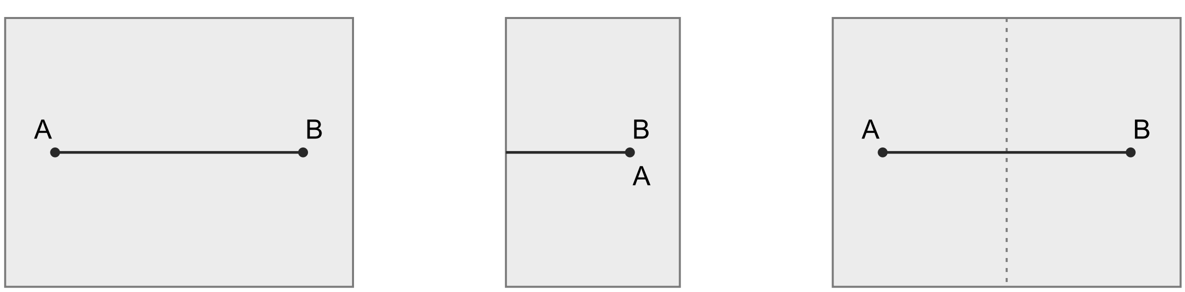


Ejercicio 3.2 Construya la recta perpendicular a la recta m que pasa por el punto P fuera de ella.



Sección 2: Construcción de la mediatriz

a) En una hoja de papel trace un segmento AB y dóblela de modo que el punto A se sobreponga con el punto B y desdóblela. Observe la relación entre el pliegue y el segmento AB y dónde corta el pliegue al segmento AB.



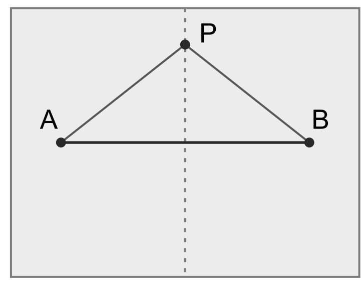
Al sobreponer el punto A con el punto B, se puede ver que la longitud de A al pliegue es la misma que la longitud del punto B al pliegue, por lo que se puede concluir que el pliegue pasa por el punto medio del segmento AB y si se miden los ángulos que se forman entre el segmento y el pliegue se puede ver que éste es perpendicular al segmento AB.

A este pliegue que es perpendicular al segmento AB y que pasa por su punto medio se le llama mediatriz del segmento AB.

La **mediatriz** de un segmento es la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio.

b) Marque un punto P en el pliegue, trace los segmentos PA y PB y compare sus longitudes.

Observe que al doblar la hoja por el pliegue el segmento PA coincide con el segmento PB, por lo que se puede decir que los segmentos tienen la misma longitud.

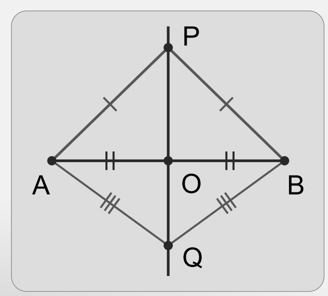


En general se puede concluir lo siguiente:
Las distancias entre un punto cualquiera de la mediatriz de un segmento y los dos extremos de éste, son iguales.

El pliegue es un eje de simetría del $\triangle PAB$.

Si la recta PQ es la mediatriz del segmento AB se concluye que las longitudes:

$$AP = BP$$
$$AO = BO$$
$$AQ = BQ$$



Recuerde que:
Si dos segmentos AP y BP tienen la misma longitud, se dice que son congruentes y se escribe $\overline{AP} \cong \overline{BP}$.

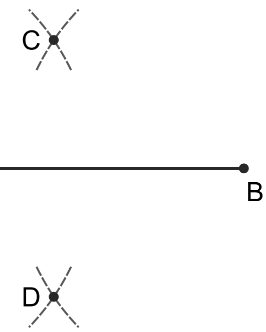
$AP = BP$, entonces, $\overline{AP} \cong \overline{BP}$

Ejemplo 3.4

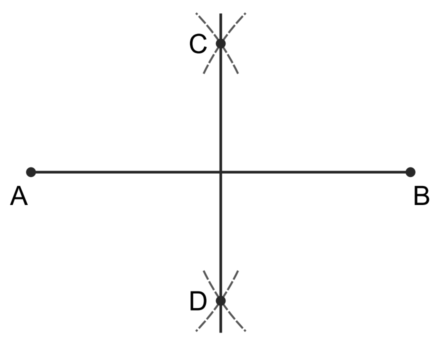
Construya con regla y compás la mediatriz del segmento AB:

Solución:

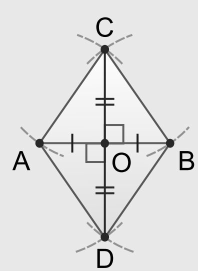
Paso 1: Con un mismo radio, mayor que la mitad aproximada del segmento AB, trace dos arcos con centro en los puntos A y B. Los puntos donde se cortan los arcos nombrarlos como C y D.



Paso 2: Trace la recta CD.
La recta CD es la mediatriz del segmento AB.



Los puntos A, D, B y C determinan un rombo con $\overline{AO} \cong \overline{BO}$.

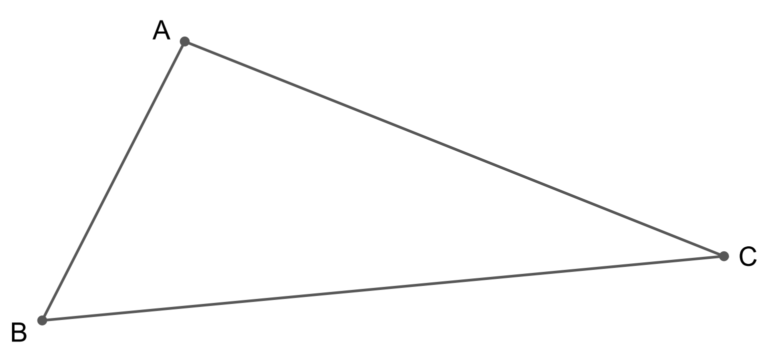


Las diagonales de un rombo se cortan a la mitad formando ángulos rectos, por lo tanto, $\overline{AB} \perp \overline{CD}$.

Este mismo procedimiento se aplica para encontrar el punto medio de un segmento.

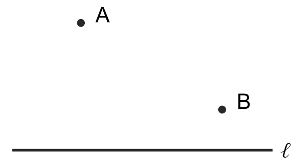
Ejercicio 3.3

Utilizando regla y compás trace la mediatriz del $\overline{BC}$ del $\triangle ABC$.



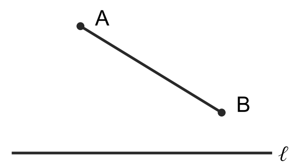
Ejemplo 3.5

Encuentre el punto P sobre la recta ℓ que dista lo mismo de los puntos A y B fuera de ella.

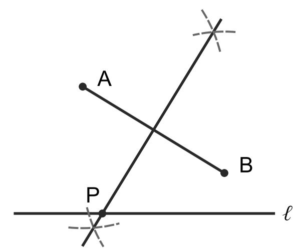


Solución:

Paso 1: Unir los puntos A y B con un segmento.

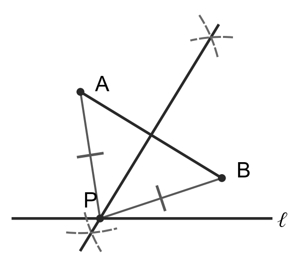


Paso 2: Trazar la mediatriz del $\overline{AB}$.

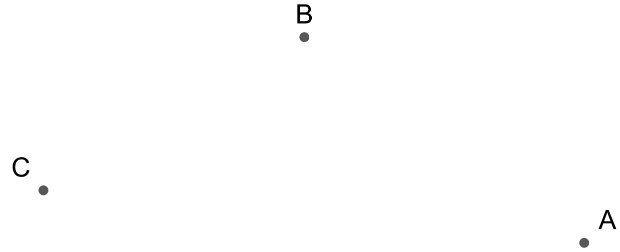


Se sabe que las distancias entre un punto cualquiera en la mediatriz de un segmento y los dos extremos de éste son iguales.

Paso 3: El punto de intercepción de la mediatriz del $\overline{AB}$ con la recta ℓ (punto P) es el punto que se busca.
El punto P en la recta ℓ dista lo mismo de los puntos A y B fuera de ella.



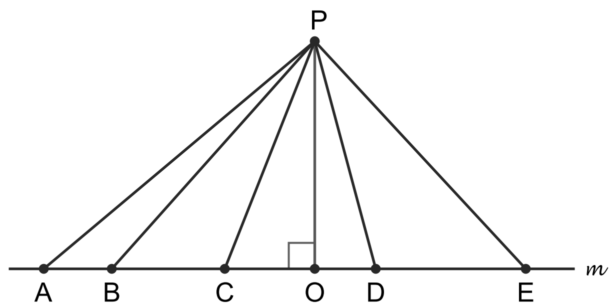
Ejercicio 3.4 Encuentre el punto O que dista lo mismo de los 3 puntos A, B y C.



Sugerencia: Trace $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ y construya sus mediatrices.

Sección 3: Construcción de una perpendicular usando la definición de mediatriz

En la figura de abajo, sea P un punto cualquiera que no está en la recta m y O un punto en la recta tal que $\overline{PO}$ es perpendicular a la recta m. Si se mide la distancia entre P y los puntos A, B, C, O, D, y E en la recta m.

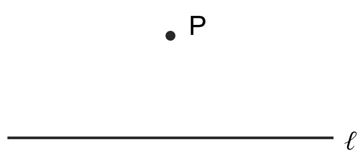


La longitud del segmento PO es la menor de las longitudes entre el punto P y un punto en la recta m.
De lo anterior, se sabe que PO es la longitud mínima entre el punto P y la recta m.

La **distancia** entre un punto y una recta es la longitud del segmento que une el punto con la recta y que es perpendicular a dicha recta.

Ejemplo 3.6

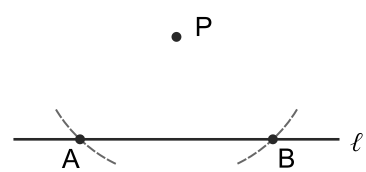
Encuentre el punto O en la recta ℓ tal que la longitud del $\overline{PO}$ sea la distancia entre el punto P y la recta ℓ.



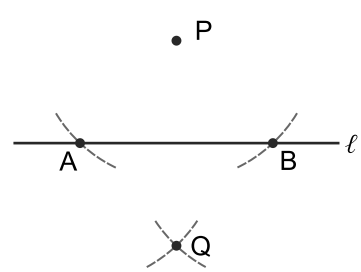
Utilice el procedimiento de la construcción de la perpendicular.

Solución:

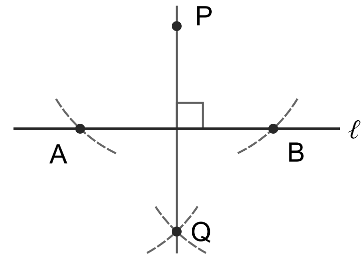
Paso 1: Trazar un arco de cualquier radio y centro en P que corte a la recta ℓ en los puntos A y B.



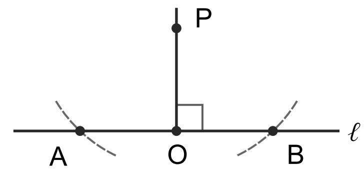
Paso 2: Trazar dos arcos con el mismo radio que el anterior con centro en los puntos A y B y que se corten en el punto Q.



Paso 3: Trazar la recta PQ.
La recta PQ es la perpendicular a la recta ℓ que pasa por el punto P.

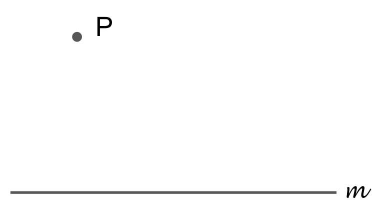


Si O es el punto donde se cortan la recta ℓ y la recta PQ, entonces la longitud del segmento PO es la distancia de P a la recta ℓ.



Ejercicio 3.5 Encuentre el punto O en la recta m tal que la longitud del $\overline{PO}$ sea la distancia entre el punto P y la recta m

a)



b)

Ejercicios

1 Con la ayuda del transportador trace los ángulos cuya medida sea la siguiente.

a) 55º b) 135º c) 170º

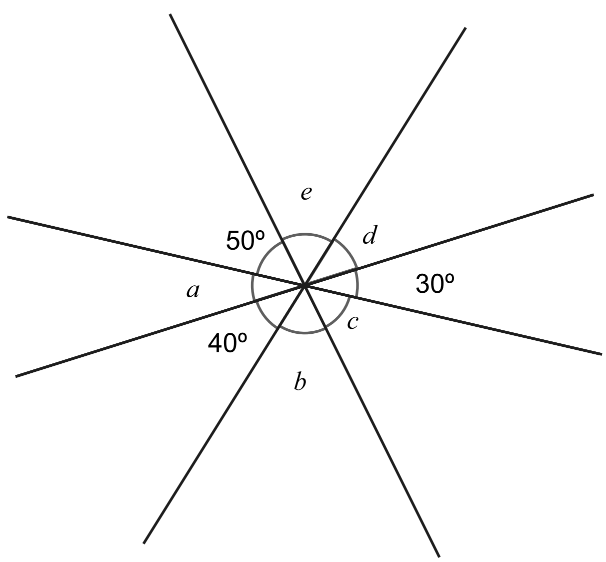
2 Encuentre la medida del complemento del ángulo cuya medida es la siguiente:

a) 45º b) 32º c) 72º

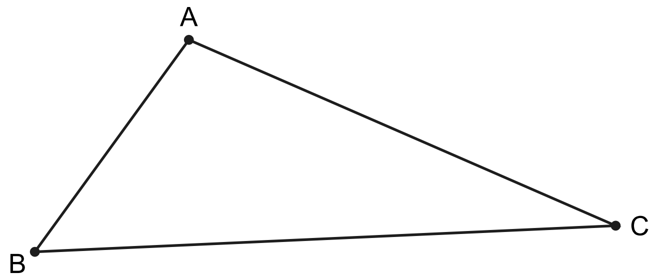
3 Encuentre la medida del suplemento del ángulo cuya medida es la siguiente:

a) 94º b) 121º c) 45º

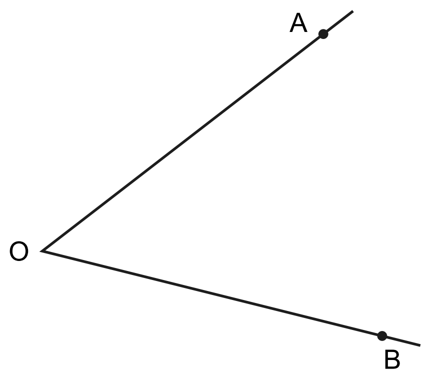
4 Encuentre la medida de los ángulos que faltan:



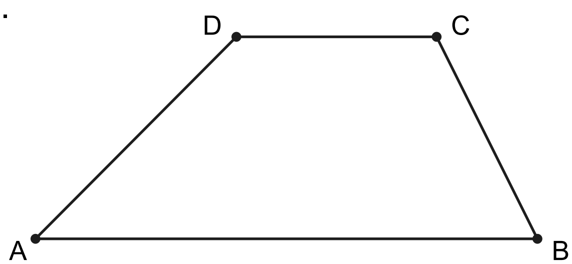
5 Construya la mediatriz de los lados AB y AC en el $\triangle ABC$.



6 Construya la bisectriz del $\angle AOB$.

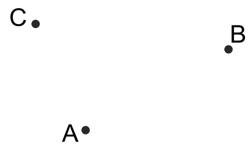


7 Encuentre el punto O en el lado AB, tal que la longitud del $\overline{DO}$ sea la distancia entre el punto D y el lado AB.



Aplicación de la mediatriz

Trace la circunferencia que pasa por tres puntos no colineales.



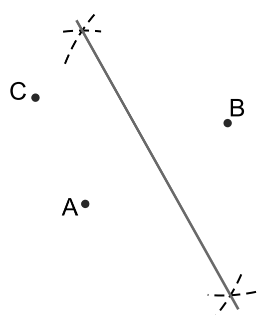
La circunferencia es el conjunto de puntos en un plano que están a la misma distancia de un punto llamado centro. Para trazar la circunferencia que pasa por tres puntos no colineales, vamos a buscar el centro O. Entonces, busquemos el punto O de manera que se cumpla que OA = OB = OC.

Por construcción de mediatriz:
Para cualquier punto P que está en la mediatriz del segmento AB, se cumple que PA = PB.
Para cualquier punto Q que está en la mediatriz del segmento AC, se cumple que QA = QC.

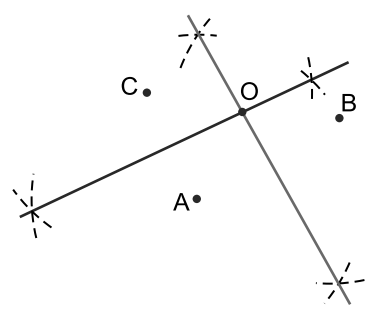
Por lo tanto, en la intersección de las mediatrices de los segmentos AB y AC (que llamaremos el punto R), se cumple que RA = RB = RC. Este punto R es el centro del círculo cuya circunferencia pasa por los tres puntos A, B y C, donde R corresponde al centro O.

Solución:

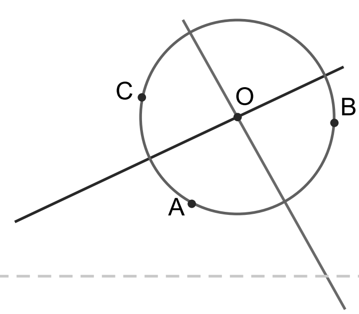
1. Trazar la mediatriz del segmento AB.



2. Trazar la mediatriz del segmento AC.
   Las mediatrices se intersecan en el punto O.



3. Trazar la circunferencia con centro en el punto O y radio OA (también puede ser radio OB o radio OC).



Unidad 6

Razón, proporcionalidad y porcentaje

Lección 1: Razones y proporciones

Lección 2: Proporcionalidad directa

Lección 3: Proporcionalidad inversa

Lección 4: Aplicación de la proporcionalidad

Lección 5: Porcentaje

Unidad 6

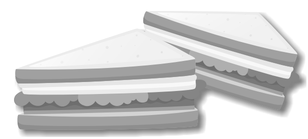
Razón, proporcionalidad y porcentaje

Lección 1: Razones y proporciones

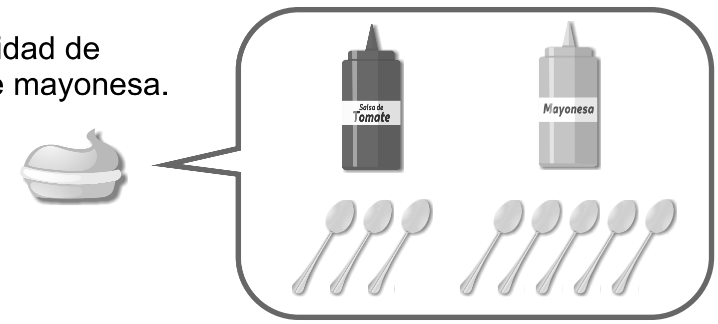
Sección 1: Razón y razón inversa

Ejemplo 1.1

Se quiere preparar una salsa rosada para emparedados de pollo.
Según la receta se deben mezclar por cada 3 cucharadas de salsa de tomate, 5 cucharadas de mayonesa.



Represente la relación entre la cantidad de cucharadas de salsa de tomate y de mayonesa.



Solución:

	Salsa de Tomate	Mayonesa
Cucharadas	3	5

La relación entre la cantidad de cucharadas de salsa de tomate y de mayonesa es 3 a 5.
Esta relación 3 a 5 se puede expresar como 3 : 5.
3 : 5 se llama **razón** y se lee “3 es a 5".
3 : 5 se dice que es la razón entre 3 y 5.

Ejemplo 1.2

Para preparar un termo de café con leche, se vierten 3 tazas de café y 1 taza de leche.
Exprese la razón entre el número de tazas de café y tazas de leche.

Términos de una razón

$a : b$

antecedente consecuente

3 : 1 se lee 3 es a 1

Respuesta: 3 : 1

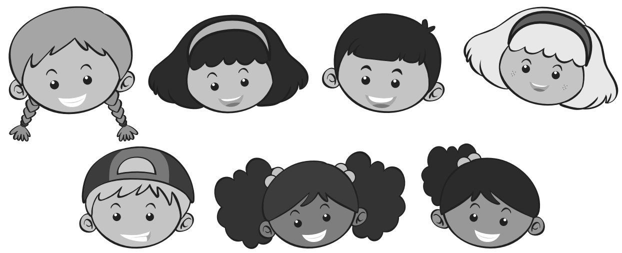
El orden en los términos de las razones es importante. En ocasiones es útil expresar las cantidades de una razón en el orden inverso.

Ejercicio 1.1 Exprese la razón entre el número de tazas de leche y tazas de café del **Ejemplo 1.2**

$b : a$ es la razón inversa de $a : b$

Ejemplo 1.3

En cada situación exprese la razón correspondiente en la forma $a:b$.



a) Por cada ☐ niñas, hay ☐ niños.
Razón entre niñas y niños ____.

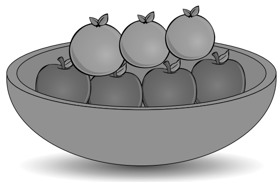
b) Por cada ☐ niños, hay ☐ niñas
Razón entre niños y niñas ____.

Solución:

a) Por cada $\boxed{5}$ niñas, hay $\boxed{2}$ niños.
Razón entre niñas y niños <u>5 : 2</u>.

b) Por cada $\boxed{2}$ niños, hay $\boxed{5}$ niñas.
Razón entre niños y niñas <u>2 : 5</u>.

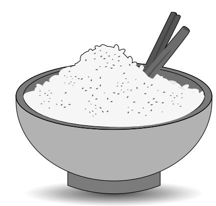
Ejercicio 1.2 En cada situación exprese la razón correspondiente en la forma $a:b$.



a.1) Por cada ☐ naranjas, hay ☐ manzanas.
Razón entre naranjas y manzanas ____.

a.2) Por cada ☐ manzanas, hay ☐ naranjas.
Razón entre manzanas y naranjas ____.

b) Para preparar arroz con leche, se utilizan 4 tazas de leche por cada taza de arroz.
Exprese la razón entre el número de tazas de arroz y tazas de leche.



c) Escriba 2 ejemplos de razones utilizadas en la vida cotidiana.

Ejemplo 1.4

En el **Ejemplo 1.1**, ¿cuántas veces el número de cucharadas de salsa de tomate es del número de cucharadas de mayonesa?

	Salsa de Tomate	Mayonesa
Cucharadas	3	5

La razón es 3:5, y para encontrar el número de veces, se divide $3 \div 5$, es decir, $\frac{3}{5}$.

Respuesta: $\frac{3}{5}$ veces

Dada la razón $a : b$, al dividir $a \div b = \frac{a}{b}$ se obtiene el valor de la razón.
$\frac{a}{b}$ es un número que expresa cuántas veces es a de b.

En este libro para expresar el valor de una razón se utilizarán números fraccionarios.

Ejemplo 1.5

Encuentre el valor de las siguientes razones:

a) 1 : 2 b) 6 : 8 c) 10 : 5

Solución:

a) 1 : 2 ⟶ $1 \div 2 = \frac{1}{2}$

b) 6 : 8 ⟶ $6 \div 8 = \frac{6}{8}$
$= \frac{3}{4}$

c) 10 : 5 ⟶ $10 \div 5 = \frac{10}{5}$
$= 2$

Ejercicio 1.3 a) Encuentre el valor de las siguientes razones:

a.1) 2 : 5 a.2) 6 : 9 a.3) 12 : 3

b) Escriba las razones de las siguientes situaciones y encuentre su valor:

b.1) Razón del largo al ancho de la piscina, si de largo mide 25 m y de ancho 10 m.

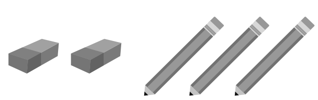
b.2) Razón entre el peso de 400 g de azúcar y 1000 g de harina.

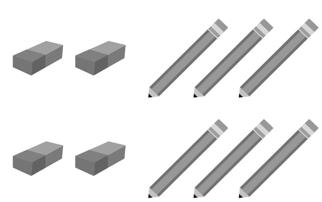
Cuando se dice "razón de a a b" es lo mismo que decir "razón entre a y b"

Sección 2: *Razones equivalentes y razón en su mínima expresión*

Ejemplo 1.6

Observe las figuras:





a) Utilizando la forma $a : b$, exprese las razones de borradores a lápices que corresponden.

b) Encuentre el valor de las razones halladas en el inciso a).

c) Compare el valor de las razones, ¿es diferente?, ¿es igual?

Solución:

a) 2 : 3 4 : 6

b) $2 : 3 \longrightarrow 2 \div 3 = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $4 : 6 \longrightarrow 4 \div 6 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

c) El valor de las razones es igual.

Puesto que 2 : 3 y 4 : 6 tienen el mismo valor de razón, se dice que son equivalentes y se expresa como $2 : 3 = 4 : 6$.

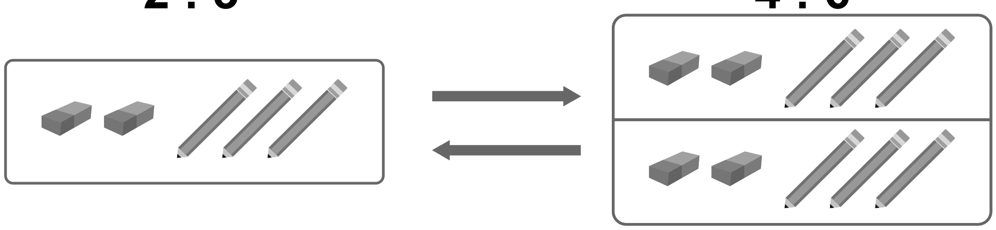
Dos o más razones son equivalentes si tienen el mismo valor.

Ejercicio 1.4 Encuentre el valor de las siguientes razones y determine si son o no razones equivalentes.

a) 4 : 8 y 8 : 16 $\qquad$ b) 3 : 9 y 6 : 8 $\qquad$ c) 5 : 15 y 10 : 30

A continuación se analizará la relación que hay entre las razones equivalentes del **Ejemplo 1.6** .

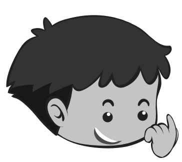
2 : 3 $\qquad\qquad$ **4 : 6**



Se tienen las siguientes representaciones de las razones

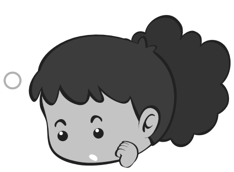
2 : 3 $\qquad\qquad$ **4 : 6**

Luego, los pensamientos de dos alumnos son:



Puedo multiplicar al 2 y al 3 por 2

Puedo dividir al 4 y al 6 entre 2



$$\overset{\times 2}{\overbrace{2 : 3 = 4 : 6}}$$
$$\underset{\times 2}{\underbrace{2 : 3 = 4 : 6}}$$

$$\overset{\div \boxed{2}}{\overbrace{2 : 3 = 4 : 6}}$$
$$\underset{\div \boxed{2}}{\underbrace{2 : 3 = 4 : 6}}$$

Observe que en el ◯ se encuentra el mismo número. Igual sucede en el $\square$.

Una razón es equivalente a otra si existe un número distinto de 0 tal que al multiplicar o dividir por ese número los términos de una, obtengo la otra.

$$a : b = (a \times n) : (b \times n)$$
$$a : b = (a \div \boxed{n}) : (b \div \boxed{n})$$

Ejemplo 1.7

Encuentre razones equivalentes de términos menores a 6 : 12.

Solución:
Haciendo uso de la conclusión anterior, puede verse que al dividir los dos términos de la razón 6 : 12 entre 2 se encuentra la razón equivalente 3 : 6.

$$\underset{\div \boxed{2}}{\overset{\div \boxed{2}}{\mathbf{6 : 12 = 3 : 6}}}$$

Luego, dividiendo ambos términos entre 3 se obtiene la razón equivalente 2 : 4.

$$\underset{\div \boxed{3}}{\overset{\div \boxed{3}}{\mathbf{6 : 12 = 2 : 4}}}$$

Luego, dividiendo ambos términos entre 6 se obtiene la razón equivalente 1 : 2.

$$\underset{\div \boxed{6}}{\overset{\div \boxed{6}}{\mathbf{6 : 12 = 1 : 2}}}$$

Respuesta: 3 : 6, 2 : 4, 1 : 2

Cuando se encuentra una razón equivalente donde ambos términos son números naturales los más pequeños posibles, a ésta se le llama **razón simplificada**.

1 : 2 es la razón simplificada de 6 : 12

Ejemplo 1.8

Encuentre la razón simplificada de:

a) 6 : 9 b) 12 : 18

Solución:

a) El Máximo Común Divisor de 6 y 9 es 3, por lo que

$6 : 9 = (6 \div 3) : (9 \div 3) = 2 : 3$

$$\underset{\div \boxed{3}}{\overset{\div \boxed{3}}{\mathbf{6 : 9 = 2 : 3}}}$$

Respuesta: 2 : 3

b) El Máximo Común Divisor de 12 y 18 es 6, por lo que

$12 : 18 = (12 \div 6) : (18 \div 6) = 2 : 3$

$$\underset{\div \boxed{6}}{\overset{\div \boxed{6}}{\mathbf{12 : 18 = 2 : 3}}}$$

Respuesta: 2 : 3

Otra forma de resolverlo es:

$12 : 18 = (12 \div 2) : (18 \div 2) = 6 : 9$ y se repite el proceso que se hizo en el inciso a)

Ejercicio 1.5 a) Encuentre la razón simplificada de:

a.1) 3 : 9   a.2) 8 : 20   a.3) 13 : 39   a.4) 18 : 36   a.5) 36 : 24

b) En el salón de clases hay 22 niños y 18 niñas, encuentre y simplifique la razón entre el número de niñas y niños.

Los términos de una razón pueden ser fracciones o decimales, pero al encontrar la razón simplificada, esta debe ser expresada con números naturales.

Ejemplo 1.9

Encuentre la razón simplificada de modo que sus términos sean números naturales.

a) 1.3 : 1.1   b) 1.3 : 2   c) 0.8 : 1.1   d) $\frac{1}{4} : \frac{3}{4}$

Solución:

a) $1.3 : 1.1 = (1.3 \times 10) : (1.1 \times 10) = 13 : 11$

1.3 tiene 1 cifra de decimal 1.1 tiene 1 cifra decimal para convertirlos a enteros se multiplican por 10.

b) $1.3 : 2 = (1.3 \times 10) : (2 \times 10) = 13 : 20$

$1.3 \times 10 = 13$
Mueva el punto decimal un lugar a la derecha.

c) $0.8 : 1.1 = (0.8 \times 10) : (1.1 \times 10) = 8 : 11$

$0.8 \times 10 = 8$

d) $\frac{1}{4} : \frac{3}{4} = (\frac{1}{4} \times 4) : (\frac{3}{4} \times 4) = 1 : 3$

Se multiplica por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Ejercicio 1.6 Encuentre la razón simplificada de modo que sus términos sean números naturales.

a) 1.3 : 1.7   b) 1.1 : 3   c) 0.9 : 1.4   d) $\frac{2}{3} : \frac{5}{3}$ e) $\frac{4}{5} : \frac{3}{5}$

De aquí en adelante, las respuestas se expresarán utilizando las razones en su forma simplificada.

Sección 3: Proporciones, términos de una proporción y propiedad fundamental de las proporciones

La igualdad de dos razones se llama **proporción.**
En el **Ejemplo 1.6** se tiene que 2 : 3 = 4 : 6, esta igualdad es una proporción.
La proporción 2 : 3 = 4 : 6 se interpreta como “el valor de la razón 2 : 3 es igual al valor de la razón 4 : 6”

A veces se utiliza el signo :: en lugar del =
En el **Ejemplo 1.6**, esto sería 2 : 3 :: 4 : 6

Con la proporción **2** : **3** = **4** : **6** se pueden hacer cálculos como el que se muestra al lado derecho:

2 : **3** = **4** : **6**
comparando los valores de las razones

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

multiplicando por 18

$$\frac{2}{3} \times 18 = \frac{4}{6} \times 18$$

resulta que

$$\frac{2}{\cancel{3}_{1}} \times \cancel{18}^{6} = \frac{4}{\cancel{6}_{1}} \times \cancel{18}^{3}$$

$$2 \times 6 = 4 \times 3$$

18 es el producto de los denominadores.

Como 2 : 3 = 4 : 6 entonces 2 × 6 = 4 × 3

En general, se sabe lo siguiente:

Propiedad Fundamental de las Proporciones

$$\underbrace{a : \overbrace{\boxed{b} = \boxed{c}}^{\text{Medios}} : d}_{\text{Extremos}} \Rightarrow a \times d = \boxed{b} \times \boxed{c}$$

En toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

En la proporción 2 : $\boxed{3}$ = $\boxed{4}$: 6 al multiplicar los medios y los extremos se tiene que:

Extremos 2 × 6 = 12

Medios $\boxed{3} \times \boxed{4}$ = 12

Son iguales

Si un término de una proporción es desconocido, se puede utilizar la propiedad fundamental de las proporciones para encontrarlo.

Ejemplo 1.10

Encuentre el valor de x en las siguientes proporciones.

a) $6 : 10 = 3 : x$ b) $1.8 : x = 3 : 2$

Solución:

Utilizando la propiedad fundamental de las proporciones, se iguala el producto de los extremos y el de los medios.

a) $6 : 10 = 3 : x$

$$6 \times x = 10 \times 3$$
$$6x = 30$$
$$x = 5$$

b) $1.8 : x = 3 : 2$

$$1.8 \times 2 = x \times 3$$
$$3.6 = 3x$$
$$3x = 3.6$$
$$x = 1.2$$

Si A = B
entonces B = A

Respuesta: $x = 5$ **Respuesta**: $x = 1.2$

Ejercicio 1.7 Encuentre el valor de x en las siguientes proporciones.

a) $4 : 5 = 8 : x$ b) $8 : x = 2 : 3$ c) $x : 12 = 3 : 9$

d) $1.1 : x = 2 : 6$ e) $2 : 3 = 1.4 : x$ f) $3 : 2 = x : 1.2$

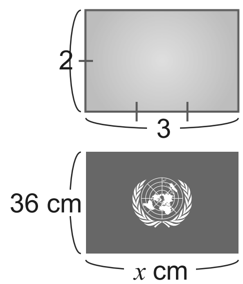
Sección 4: Aplicación de la proporción

Ejemplo 1.11

La bandera de las Naciones Unidas tiene la forma de un rectángulo. La razón de la longitud del largo al ancho de este rectángulo (Ver figura [a]) es 2 : 3. Si el ancho de la bandera de las Naciones Unidas (Ver figura [b]) es de 36 cm, ¿cuánto mide el largo?

[a]

[b]



Sea x el largo de la bandera en centímetros, entonces:

Figura	[a]	[b]
Ancho	2	36
Largo	3	x

$$2 : 3 = 36 : x$$
$$2 \times x = 3 \times 36$$
$$2x = 108$$
$$x = \frac{108}{2}$$
$$x = 54$$

Respuesta: 54 cm

La proporción también pudo haberse escrito como $2 : 36 = 3 : x$, la cual se resuelve de forma similar:

Figura	[a]	[b]
Ancho	2	36
Largo	3	x

$$2 : 36 = 3 : x$$
$$2 \times x = 36 \times 3$$
$$2x = 108$$
$$x = 54$$

Ejercicio 1.8 Resuelva los siguientes problemas.

a) 5 : 2 es la razón entre gramos de harina y azúcar para preparar un pastel. Si se tienen 150 g de harina, ¿cuántos gramos de azúcar se necesitan?

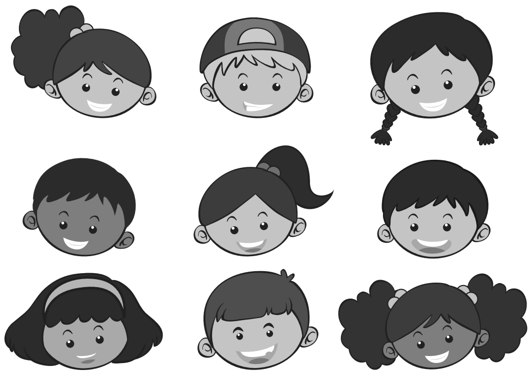
b) La razón entre la velocidad del tren y del avión es 2 : 15. Si la velocidad del avión es de 600 km/h, ¿cuál es la velocidad del tren?

c) Dos hermanos se reparten cierta cantidad de lempiras en una razón 3 : 4. Si el hermano menor recibió 180 lempiras que es la menor parte, ¿cuánto recibió el hermano mayor?

Utilizando razones equivalentes también se puede encontrar un término desconocido.

Ejemplo 1.12

En un salón de clases por cada 5 niñas hay 4 niños. Si en el salón hay 30 niñas, ¿cuántos niños hay?



Estudiantes	Cantidad	Cantidad
Niñas	5	30
Niños	4	x

$$\overset{\times 6}{5 : 4 = 30 : x}$$

$$\begin{aligned} x &= 4 \times 6 \\ &= 24 \end{aligned}$$

Respuesta: 24 niños

Ejercicio 1.9 Resuelva los siguientes problemas utilizando razones equivalentes.

a) Las edades de Juan y Pedro están a razón de 5 : 6. La edad de Pedro es 24 años, ¿cuál es la edad de Juan?

b) Dos números están en razón de 3 : 4, si el mayor es 32 ¿cuál es el menor?

c) En una fiesta la razón de niños a niñas es de 5 : 3. Si en total asistieron 30 niñas, ¿cuántos niños llegaron?

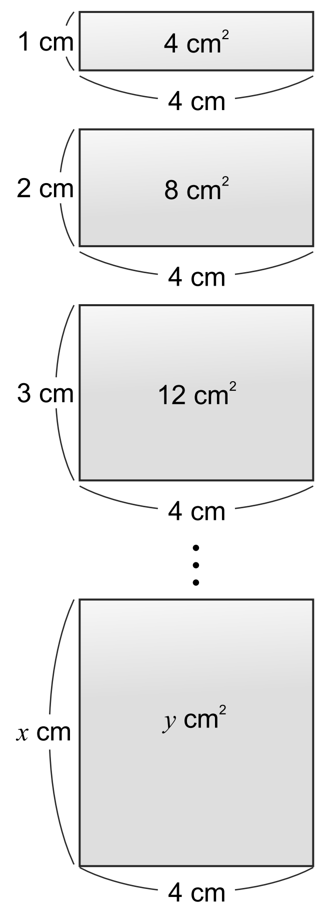
Lección 2: Proporcionalidad directa

Sección 1: Proporcionalidad directa

Ejemplo 2.1

La base de los siguientes rectángulos es de 4 cm, la altura es x cm y el área es y cm^2.
En la siguiente tabla, observe la relación entre la altura y el área de los rectángulos.
Exprese el área de los rectángulos en términos de su base y su altura x.

Altura x (cm)	0	1	2	3	···
Área y (cm^2)	0	4	8	12	···



Solución:

Área del rectángulo $=$ base $\times$ altura

$$y = 4 \times x$$

Respuesta: $y = 4x$

Cuando x y y están relacionadas con una fórmula como $y = 4x$, se dice que son directamente proporcionales.

Proporcionalidad Directa

Dadas dos variables x y y, se dice que y es directamente proporcional a x si hay una constante distinta de cero tal que $y = ax$, donde a es la constante de proporcionalidad.

El área de los rectángulos representada por y y la altura representada por x, se relacionan de manera directamente proporcional de la forma $y = 4x$, donde 4 es la constante de proporcionalidad.

Ejercicio 2.1 Con los datos del Ejemplo 2.1:

a) Encuentre el área del rectángulo si la altura mide 4 cm.
b) Encuentre el área del rectángulo si la altura mide 5 cm.
c) Cuando la altura va aumentando en 2, 3, 4, ... veces más, ¿qué sucede con el área?

Ejemplo 2.2

Observe la siguiente tabla y exprese la cantidad y de lempiras a pagar en términos del número x de paletas a comprar.

Paletas x (unidades)	0	1	2	3	4	···
Cantidad a pagar y (lempiras)	0	6	12	18	24	···

Solución:

Paletas x (unidades)	0	1	2	3	4	···
		$\times 6$	$\times 6$	$\times 6$	$\times 6$	
Cantidad a pagar y (lempiras)	0	6	12	18	24	···

Cantidad de lempiras a pagar $=$ 6 $\times$ el número de paletas

$$y = 6 \times x$$

Respuesta: $y = 6x$

Ejercicio 2.2

a) Con los datos del **Ejemplo 2.2** ¿cuánto tendría que pagar por 6 paletas?

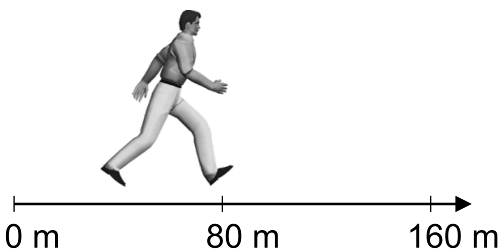
b) Observe la siguiente tabla y exprese la proporcionalidad directa entre el tiempo en horas que tarda un auto en recorrer con una velocidad constante cierta distancia en kilómetros.

Tiempo x (horas)	0	1	2	3	4	···
Distancia recorrida y (km)	0	70	140	210	280	···

c) Con los datos del inciso b), ¿cuántos kilómetros habrá recorrido el auto en 8 horas?

Ejemplo 2.3

Dado que y es la distancia recorrida por una persona que camina 80 m por minuto y es directamente proporcional al tiempo x, encuentre la constante de proporcionalidad a.



Tiempo x (min)	0	1	2	3	···
Distancia recorrida y (m)	0	80	160	240	···

Solución:

La proporcionalidad directa se expresa con la fórmula $y = ax$ y la constante de proporcionalidad a se encuentra sustituyendo los valores de x y y, luego resolviendo para a.

Cuando $x = 1, y = 80$

$$80 = a \times 1$$
$$80 = a$$
$$a = 80$$

Si el tiempo es igual a 0, esto es $x = 0$, entonces la distancia recorrida también es igual a 0, $y = 80(0) = 0$

Respuesta: $a = 80$

Se puede utilizar cualquier pareja de datos incluida en la tabla.

Cuando $x = 2, y = 160$

$$160 = a \times 2$$
$$160 = 2a$$
$$2a = 160$$
$$a = 80$$

Cuando $x = 3, y = 240$

$$240 = a \times 3$$
$$240 = 3a$$
$$3a = 240$$
$$a = 80$$

La constante a también se puede calcular de esta forma:

$a = \frac{80}{1}$ o $\frac{160}{2}$ o $\frac{240}{3}$ ... $\frac{y}{x}$

Tiempo x (min)	0	1	2	3	···
		$\times 80$	$\times 80$	$\times 80$	
Distancia recorrida y (m)	0	80	160	240	···

Fórmula para la Proporcionalidad Directa
$y = ax$

Constante de Proporcionalidad
$a = \frac{y}{x}$

Ejercicio 2.3 Dado que y es directamente proporcional a x, encuentre la constante de proporcionalidad a.

a) El número x de paquetes y la cantidad y de galletitas y que contienen.

x (paquetes)	0	1	2	3	4
y (galletitas)	0	8	16	24	32

b) El número x de borradores y el costo y en lempiras.

x (borradores)	0	1	2	3	4
y (lempiras)	0	1.5	3	4.5	6

Ejemplo 2.4

Si x y y son directamente proporcionales y $y = 14$ cuando $x = 2$, entonces ¿cuál es el valor de la constante de proporcionalidad a?

Solución:

La proporcionalidad directa se expresa con la fórmula $y = ax$, así que sustituyendo los valores de x y y, resolviendo para a se tiene que,

cuando $x = 2$, $y = 14$

$$14 = a(2)$$
$$14 = 2a$$
$$2a = 14$$
$$a = \frac{14}{2}$$
$$a = 7$$

$$a = \frac{y}{x} = \frac{14}{2} = 7$$

Respuesta: $a = 7$

Ejercicio 2.4 Si x y y son directamente proporcionales, encuentre el valor de la constante de proporcionalidad a, si $y = 36$ cuando $x = 4$.

Lección 3: Proporcionalidad inversa

Sección 1: Proporcionalidad inversa

Ejemplo 3.1

Sea x cm la base de los siguientes rectángulos, y cm la altura y 12 cm^2 su área.
En la siguiente tabla, observe la relación entre las longitudes de los lados de esos rectángulos.

Base x (cm)	1	2	3	4	5	···
Altura y (cm)	12	6	4	3	2.4	···

a) Exprese el área de esos rectángulos en términos de x y y.

b) Exprese la altura y en términos del área y de la base x.

Solución:

a) Área del rectángulo $=$ base $\times$ altura

$$12 = x \times y$$

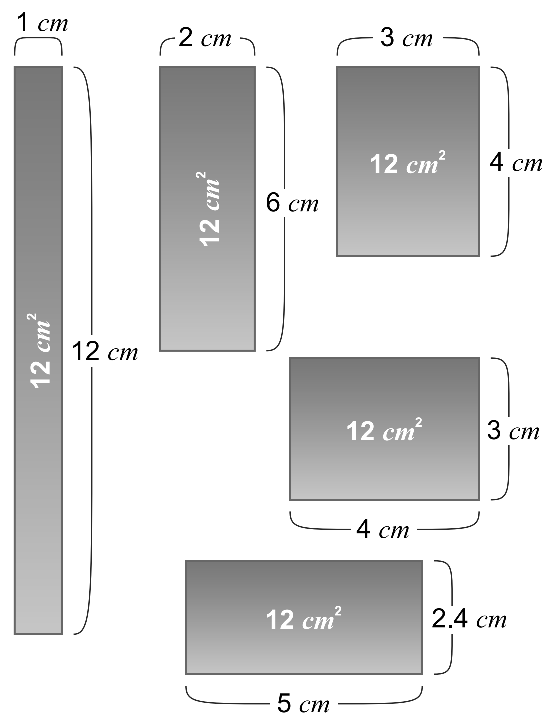
Respuesta: $12 = xy$

b) $\text{Altura} = \dfrac{\text{área}}{\text{base}}$

$$y = \frac{12}{x}$$

Respuesta: $y = \dfrac{12}{x}$

Cuando x y y están relacionadas con una fórmula como $y = \dfrac{12}{x}$, se dice que son inversamente proporcionales.



Proporcionalidad Inversa

Dadas dos variables x y y, se dice que y es inversamente proporcional a x si hay una constante tal que $y = \dfrac{a}{x}$, donde a es la constante de proporcionalidad.

La altura del rectángulo representada por y y su base representada por x, se relacionan de manera inversamente proporcional de la forma $y = \frac{12}{x}$, donde 12 es la constante de proporcionalidad.

Ejercicio 3.1 Con los datos del **Ejemplo 3.1** :

a) Encuentre la altura del rectángulo, si la base mide 8 cm.
b) Cuando la base va aumentando en 2, 3, 4,... veces más ¿qué sucede con la altura?

Ejemplo 3.2

Se tienen 24 confites y se quieren repartir equitativamente entre un número x de personas.
Observe la siguiente tabla y exprese la cantidad y de confites por persona en términos del número x de personas.

x (personas)	1	2	3	4	···
y (confites por persona)	24	12	8	6	···

Solución:

x (personas)	1	2	3	4	···
y (confites por persona)	24	12	8	6	···

$$\text{Cantidad de confites por persona} = \frac{\text{Cantidad total de confites}}{\text{Número de personas}}$$

La cantidad total de confites es constante.

Respuesta: $y = \frac{24}{x}$

Ejercicio 3.2

a) Con los datos del **Ejemplo 3.2** , si hubiesen 6 personas ¿cuántos confites le corresponderían a cada una?

b) Observe la siguiente tabla y exprese la proporcionalidad inversa entre el número x de obreros y los y días que se tardarán en construir un muro.

x (obreros)	1	2	3	4	···
y (días)	12	6	4	3	···

c) Con los datos del inciso b), ¿cuántos días tardarán en construir el muro 6 obreros?

Sección 2: Constante de proporcionalidad y fórmula para expresar la proporcionalidad inversa

Ejemplo 3.3

Dado que y es el número de meses que se necesitarán para construir una casa y es inversamente proporcional al número x de obreros empleados, encuentre la constante de proporcionalidad a.

x (obreros)	30	15	10	6	···
y (meses)	1	2	3	5	···

Solución:

La proporcionalidad inversa se expresa con la fórmula $y = \frac{a}{x}$ y la constante de proporcionalidad a se encuentra sustituyendo los valores x y y, luego resolviendo para a.

Cuando $x = 30$, $y = 1$

$$1 = \frac{a}{30}$$
$$a = 1 \times 30$$
$$a = 30$$

Respuesta: $a = 30$

Se puede utilizar cualquier pareja de datos incluida en la tabla.

Cuando $x = 15$, $y = 2$

$$2 = \frac{a}{15}$$
$$a = 2 \times 15$$
$$a = 30$$

Cuando $x = 10$, $y = 3$

$$3 = \frac{a}{10}$$
$$a = 3 \times 10$$
$$a = 30$$

La constante a también se puede calcular de esta forma 30×1 o 15×2 o 10×3 ... $x \times y$

x (obreros)	30	15	10	6	···
	×	×	×	×	
y (meses)	1	2	3	5	···

Fórmula para la Proporcionalidad Inversa

$$y = \frac{a}{x}$$

→

Constante de Proporcionalidad

$$a = xy$$

Ejercicio 3.3

Dado que y es inversamente proporcional a x, encuentre la constante de proporcionalidad a.

a) La velocidad x medida en km/h y las y horas transcurridas.

Velocidad x (km/h)	80	40	20	10
Tiempo y (horas)	1	2	4	8

b) El número x de personas y los y días que dura el alimento.

x (personas)	2	4	6	8
Duración del alimento y (días)	36	18	12	9

Ejemplo 3.4

Si x y y son inversamente proporcionales y $y = 10$ cuando $x = 2$, entonces ¿cuál es el valor de la constante de proporcionalidad a?

Solución:

La proporcionalidad inversa se expresa mediante la ecuación $y = \frac{a}{x}$, así que sustituyendo los valores de x y y, resolviendo para a, se tiene que

Cuando $x = 2$, $y = 10$

$$10 = \frac{a}{2}$$
$$10 \times 2 = a$$
$$a = 10 \times 2$$
$$a = 20$$

Respuesta: $a = 20$

Ejercicio 3.4

Si x y y son inversamente proporcionales, encuentre el valor de la constante de proporcionalidad a, si $y = 8$ cuando $x = 3$.

Lección 4: Aplicación de la proporcionalidad

Sección 1: Aplicación de la proporcionalidad directa

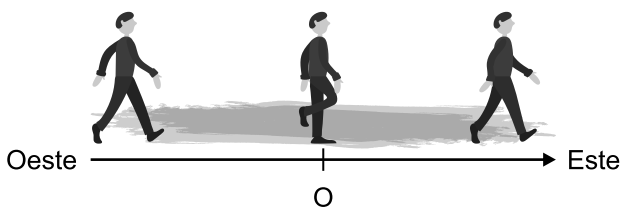
Ejemplo 4.1

Una persona camina del Oeste hacia el Este a 80 m por minuto. Después de x minutos desde que pasó por el punto O, la persona está a y metros hacia el Este desde el punto O, así que y es directamente proporcional a x.

a) Encuentre la constante de proporcionalidad a y exprese el valor de y en términos de x.

b) Después de 4 minutos, ¿dónde estará la persona con respecto al punto O?

c) 3 minutos antes de pasar por el punto O, ¿dónde estuvo la misma persona?



2 minutos antes de pasar por el punto O, la persona estaba a 160 metros hacia el Oeste desde el punto O, es decir, $y = -160$ cuando $x = -2$.

Solución:

a) La proporcionalidad directa se expresa con la fórmula $y = ax$ y la constante de proporcionalidad a se encuentra sustituyendo los valores de x y y, luego resolviendo para a. Después de 1 minuto, la persona estará a 80 m desde el punto O. Es decir $y = 80$ cuando $x = 1$.

$$y = ax$$
$$80 = a \times 1$$
$$a = 80$$

Respuesta: $a = 80$, $y = 80x$

b) Después de 4 minutos, la persona estará a $y = 80 \times 4 = 320$ m desde el punto O.

Respuesta: 320 m hacia el Este desde el punto O.

c) 3 minutos antes de pasar por el punto O, la misma persona estuvo $y = 80 \times (-3) = -240$ m desde el punto O.

Respuesta: 240 m hacia el Oeste desde el punto O.

Ejercicio 4.1 Las siguientes magnitudes son directamente proporcionales. Empleando la tabla con los valores que se muestran:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−12	−8	−4	0	4	8	12

a) Encuentre la constante de proporcionalidad a y exprese el valor de y en términos de x.

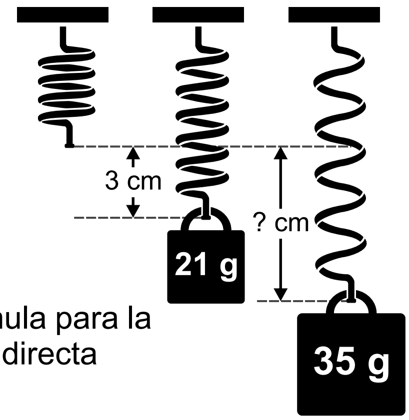
b) Cuando x tenga el valor de −20, ¿qué valor tendrá y?

Ejemplo 4.2

El largo de extensión y de un resorte y el peso x son directamente proporcionales. Un resorte se extiende 3 cm cuando se cuelga un objeto que pesa 21 g.

a) Encuentre la constante de proporcionalidad a.

b) ¿Cuántos cm se extiende el resorte si se cuelga un objeto que pesa 35 g?



Solución:

a) Se tiene que $y = ax$

Luego, cuando $x = 21$, $y = 3$

$3 = a(21)$

$a = \frac{3}{21}$

$a = \frac{1}{7}$

b) Utilizando la fórmula para la proporcionalidad directa

$y = \frac{1}{7}x$

cuando $x = 35$, se tiene que

$y = \frac{1}{7}(35)$

$y = 5$

Respuesta: a) $a = \frac{1}{7}$ b) 5 cm

Ejercicio 4.2

Con los datos del Ejemplo 4.2, ¿cuánto pesaría el objeto si el resorte se extendiera 4 cm?

Ejemplo 4.3

En 2 horas un bus recorre 160 km. Si la velocidad es constante, ¿cuánto habrá recorrido el bus al cabo de 5 horas?

Solución:

Paso 1: Definir x y y

y es la distancia recorrida y es directamente proporcional al tiempo x, por lo que $y = ax$, donde a es la constante de proporcionalidad.

Paso 2: Encontrar la constante de proporcionalidad.

Cuando $x = 2$, $y = 160$

$160 = a(2)$

$a = \frac{160}{2}$

$a = 80$

Paso 3: Utilizar la fórmula para la proporcionalidad directa

$y = 80x$

cuando $x = 5$, se tiene que

$y = 80(5)$

$y = 400$

Respuesta: 400 km

Ejercicio 4.3 Resuelva los siguientes problemas:

a) Un campesino se tarda 5 días en sembrar 2 manzanas de maíz. Si el número de días que tarda es directamente proporcional al número de manzanas sembradas ¿cuántos días se tardará en sembrar 6 manzanas de maíz?

b) Se quiere preparar una cena para 16 personas, pero la receta dice 1 libra de carne para 4 personas. Si las libras de carne son directamente proporcional al número de personas ¿cuántas libras de carne se necesitarán para la nueva receta?

Ejemplo 4.4

En una excursión se viaja de Tegucigalpa a San Pedro Sula con una velocidad constante de 100 km por hora y se llega en 3 horas. Si se hace el mismo viaje a diferentes velocidades, los tiempos de llegada también son distintos. Tiempo y es inversamente proporcional a la velocidad x. Observe la siguiente tabla y responda:

Velocidad x (km/h)	100	75	60	
Tiempo y (horas)	3	4		6

a) Encuentre la constante de proporcionalidad a y exprese el valor de y en términos de x.
b) Si se viajó a 60 km / hora, ¿en cuántas horas se llegó?
c) Si se llegó en 6 horas, ¿a cuántos km por hora se viajó?

Solución:

a) La proporcionalidad inversa se expresa con la fórmula $y = \frac{a}{x}$, por lo que, sustituyendo los valores de x y y, luego resolviendo para a, se tiene que

cuando $x = 100$, $y = 3$

$$3 = \frac{a}{100}$$
$$3 \times 100 = a$$
$$a = 3 \times 100$$
$$a = 300$$

Respuesta: $a = 300$, $y = \frac{300}{x}$

Se puede utilizar cualquier pareja de datos incluidas en la tabla.

b) cuando $x = 60$ se tiene que

$$y = \frac{300}{x}$$
$$y = \frac{300}{60}$$
$$y = 5$$

Respuesta: 5 horas

c) cuando $y = 6$, se tiene que

$$y = \frac{300}{x}$$
$$6 = \frac{300}{x}$$
$$6x = 300$$
$$x = 50$$

Respuesta: 50 km/h

Ejercicio 4.4

Resuelva los siguientes problemas:

a) Si 3 hombres necesitan 24 días para hacer un trabajo, ¿cuántos días emplearán 18 hombres para realizar el mismo trabajo?

b) Una cisterna tarda en llenarse 15 minutos si se echan 4 ℓ de agua por minuto. Si se echan 6 ℓ de agua por minuto, ¿cuántos minutos tardará en llenarse la cisterna?

Lección 5: Porcentaje

Sección 1: Porcentaje o tanto por ciento

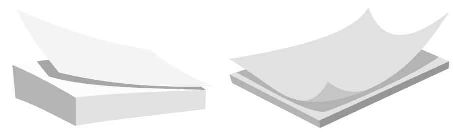
Ejemplo 5.1

En una resma que tiene 200 hojas de papel, 50 son de color amarillo. Si se hacen grupos de 100 hojas de papel y se distribuye la misma cantidad de hojas de color amarillo en cada grupo, ¿cuántas hojas de color amarillo habrá por cada 100 hojas de papel?

Solución:

Al hacer grupos de 100 hojas, resultarán 2 grupos.
Luego, repartiendo las 50 hojas de color amarillo en esos 2 grupos, se tiene que $50 \div 2 = 25$

Así que, en cada grupo de 100 hojas, habrá 25 hojas de color amarillo.



Respuesta: 25 hojas

Se denomina **porcentaje** o **tanto por ciento**, al número de unidades que se toman de cada 100.
El porcentaje proviene del latín "per centum" que significa "por ciento" o "por cada 100".

Tanto por ciento
↓ ↓
Unidades de cada 100

1 de cada 100 , es decir, $\frac{1}{100}$ representa 1% usando el **símbolo del porcentaje (%)**, 1% se lee como "uno por ciento".

$\frac{1}{100} = 0.01$, entonces 0.01 representa 1% también.

En el **Ejemplo 5.1** :

25 de cada 100 hojas de papel son amarillas, expresado como porcentaje sería
25 por ciento de hojas son amarillas y utilizando el símbolo "% " se expresa como
25 % de las hojas son amarillas.
Por lo tanto, $\frac{25}{100} = 25\%$

Las cosas u objetos usualmente no vienen en grupos de exactamente 100, así que deben hacerse operaciones para convertir porcentajes en fracciones o en decimales y viceversa.

Ejemplo 5.2

Escriba la fracción con denominador 100, el decimal y el porcentaje que equivale a la fracción $\frac{1}{5}$.

Solución:

Fracción equivalente con denominador 100	Decimal	Porcentaje
$\frac{1}{5} \times \frac{20}{20} = \frac{20}{100}$	$\frac{20}{100} = 20 \div 100 = 0.20$	20%

Debe buscarse un número que multiplicado por 5, sea igual a 100.

$5 \times \boxed{} = 100$

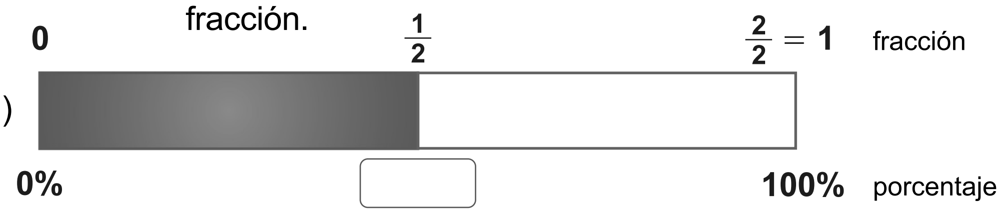
$5 \times \boxed{20} = 100$

Ejercicio 5.1 Complete la siguiente tabla.

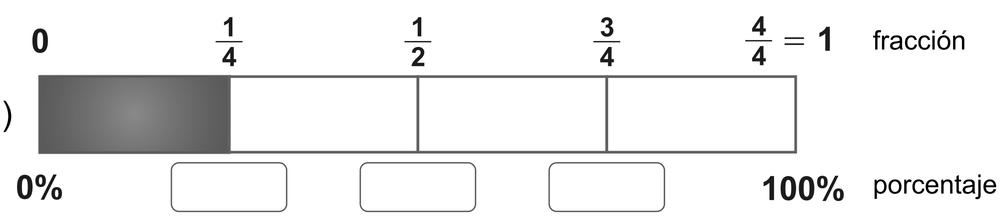
Fracción	Fracción equivalente con denominador 100	Decimal	Porcentaje
$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} \times \frac{20}{20} = \frac{20}{100}$	0.20	20%
$\frac{1}{10}$			
$\frac{1}{20}$			
$\frac{1}{50}$			

Ejercicio 5.2 En los espacios indicados escriba el porcentaje que equivale a cada fracción.

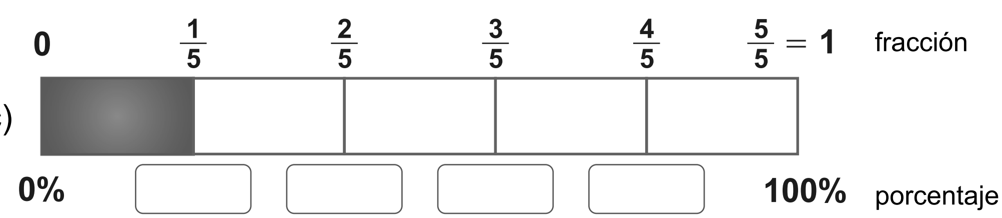
a)



b)



c)



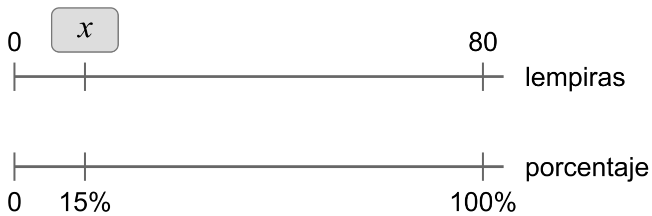
Sección 2: Cálculo del tanto por ciento de un número

Ejemplo 5.3

En Honduras debe pagarse el 15% del precio de un artículo en concepto de Impuesto sobre Venta. Si se compra un libro que cuesta 80 lempiras, ¿a cuántos lempiras equivale el Impuesto sobre Venta?

Solución:

Paso 1: Hacer el esquema de una proporción.



Paso 2: Plantear la proporción.
De las razones $x : 15$ y $80 : 100$ se forma la proporción $x : 15 = 80 : 100$

Paso 3: Encontrar el valor de la incógnita.

$$100x = 80 \times 15$$

$$x = \frac{80 \times 15}{100}$$

$$x = \frac{1200}{100}$$

$$x = 12$$

Respuesta: 12 lempiras

Antes de multiplicar, es más práctico simplificar

$$x = \frac{8\cancel{0} \times 15}{10\cancel{0}}$$

$$x = \frac{\overset{4}{\cancel{8}} \times 15}{\underset{5}{\cancel{10}}}$$

$$x = \frac{4 \times \overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{1}{\cancel{5}}}$$

$$x = 4 \times 3$$

$$x = 12$$

Ejercicio 5.3 Resuelva los siguientes problemas:

a) El 55% del peso de una persona adulta es agua. ¿Cuántos kg de agua tendrá una persona que pesa 60 kg?

b) El 60% de lo recaudado en la actividad de la venta de comida, será destinado a la compra de pintura. Si se recaudaron 2400 lempiras, ¿cuál es la cantidad de dinero destinado para la compra de pintura?

c) María ha leído el 25% de las páginas de un libro que tiene 120 páginas, ¿cuántas páginas ha leído?

En el Ejemplo 5.3 para encontrar el 15% de 80, debió resolverse $x = \frac{80 \times 15}{100}$.

Utilizando una forma más directa y sencilla para encontrar este valor, es mejor expresar x como $x = 80 \times \frac{15}{100}$, recordando que $\frac{15}{100}$ significa 15%, se puede generalizar que:

Para encontrar el tanto por ciento, $\square$% de un número $\bigcirc$ en forma directa, se multiplica el número por ese porcentaje escrito en forma fraccionaria.

$$\square\ \%\ \text{de}\ \bigcirc\ \text{es igual a}\ \bigcirc \times \frac{\square}{100}$$

Ejemplo 5.4

Calcule:

a) 10% de 50

b) 0.5% de 20

Solución:

a) Usando la fórmula anterior, se puede decir directamente

$$\begin{aligned} 50 \times \frac{10}{100} &= 50 \times \frac{1}{10} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Respuesta: 5

b) $$\begin{aligned} 20 \times \frac{0.5}{100} &= \frac{20 \times 0.5}{100} \\ &= \frac{10}{100} \\ &= \frac{1}{10} \\ &= 0.1 \end{aligned}$$

Respuesta: 0.1

Ejercicio 5.4 Calcule en forma directa:

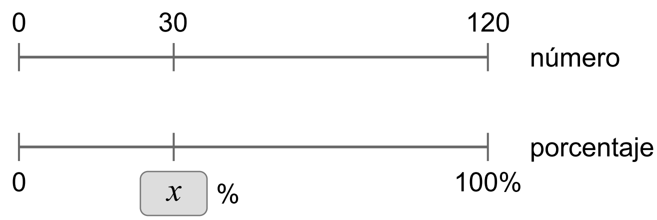
a) 25% de 60 b) 50% de 120 c) 0.1% de 100 d) 0.2% de 50

Ejemplo 5.5

¿Qué porcentaje es 30 de 120?

Solución:

Paso 1: Hacer el esquema de una proporción.



Paso 2: Plantear la proporción.
De las razones 30 : x y 120 : 100 se forma la proporción 30 : x = 120 : 100

Se suprime el símbolo del %

Paso 3: Encontrar el valor de la incógnita.

$$30 \times 100 = 120x$$

$$x = \frac{30 \times 100}{120}$$

$$x = 25$$

$$x = \frac{30 \times 10\cancel{0}}{12\cancel{0}} = \frac{\overset{5}{\cancel{30}} \times 10}{\underset{2}{\cancel{12}}} = \frac{5 \times \overset{5}{\cancel{10}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 5 \times 5 = 25$$

Respuesta: 25%

Otra forma de calcular qué porcentaje es 30 de 120:

Paso 1: Simplificar $\frac{30}{120} = \frac{1}{4}$

Paso 2: Multiplicar $\frac{1}{4} \times 100\% = 25\%$

Para encontrar el porcentaje que representa $\square$ de $\bigcirc$

se multiplica $\frac{\square}{\bigcirc} \times 100\%$

Ejercicio 5.5 Resuelva los siguientes problemas:

a) ¿8 es qué porcentaje de 16?

b) ¿Qué porcentaje es 12 de 12?

c) ¿Qué porcentaje representa 2 de 5?

Cuando se resuelven problemas para hallar el porcentaje que representa una cantidad respecto de otra, debe analizarse cuidadosamente la pregunta que hace el problema.

Ejemplo 5.6

De 10 respuestas, 3 están incorrectas. ¿Qué porcentaje de las respuestas están correctas?

Solución:

Paso 1: Encontrar cuántas respuestas correctas hay del total de respuestas en forma fraccionaria.

$$\frac{\text{Respuestas correctas}}{\text{Total de respuestas}} = \frac{7}{10}$$

Respuestas incorrectas: 3
Respuestas correctas: 7

Paso 2: Multiplicar por 100%

$$\frac{7}{10} \times 100\% = 70\%$$

Respuesta: 70%

Ejercicio 5.6 Resuelva los siguientes problemas.

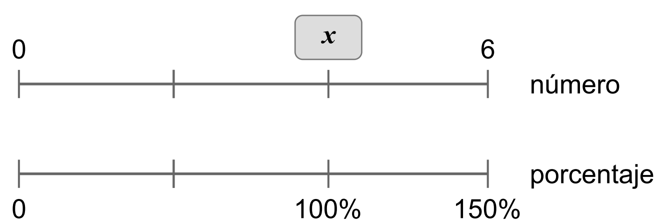
a) De 40 estudiantes de la sección B, 22 son varones. ¿Qué porcentaje de alumnos son mujeres?
b) Se han pintado 24 m^2 de un muro que tiene 30 m^2. ¿Qué porcentaje del muro no se ha pintado?
c) De 80 frutas, 72 están maduras. ¿Cuál es el porcentaje de frutas verdes?

Ejemplo 5.7

Calcule el número cuyo 150% es 6

Solución:

Paso 1: Hacer el esquema de una proporción.



Paso 2: Plantear la proporción.
De las razones x : 100 y 6 : 150 se forma la proporción $x : 100 = 6 : 150$

Paso 3: Encontrar el valor de la incógnita.

$$150x = 100 \times 6$$
$$x = \frac{100 \times 6}{150}$$
$$x = 4$$

$$x = \frac{6 \times 10\cancel{0}}{15\cancel{0}}$$
$$= \frac{6 \times \cancel{10}^{2}}{\cancel{15}_{3}}$$
$$= \frac{{}^{2}\cancel{6} \times 2}{\cancel{3}_{1}}$$
$$= 2 \times 2$$
$$= 4$$

Respuesta: 4

Ejercicio 5.7 Resuelva los siguientes problemas:

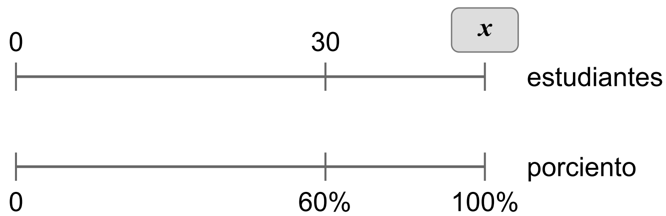
a) Calcule el número cuyo 200% es 8.
b) ¿De qué cantidad es 9 el 150%?
c) Calcule el número cuyo 120% es 18.

Ejemplo 5.8

El 60% de un curso son varones. Si hay 30 varones, ¿cuántos estudiantes tiene el curso?

Solución:

Paso 1: Hacer el esquema de una proporción.



Paso 2: Plantear la proporción.
De las razones 30 : 60 y x : 100 se forma la proporción 30 : 60 $=$ x : 100

Se suprime el símbolo del %

Paso 3: Encontrar el valor de la incógnita.

$$30 \times 100 = 60x$$
$$x = \frac{30 \times 100}{60}$$
$$x = 50$$

$$x = \frac{30 \times 10\cancel{0}}{6\cancel{0}} = \frac{\overset{5}{\cancel{30}} \times 10}{\underset{1}{\cancel{6}}} = 5 \times 10 = 50$$

Respuesta: 50 estudiantes

Ejercicio 5.8 Resuelva los siguientes problemas:

a) Un señor ahorra 200 lempiras que representan el 10% de su salario semanal. ¿De cuánto es el salario semanal de este señor?

b) El 2% representa a 10 semillas de café que no germinaron, ¿cuántas semillas se sembraron?

c) El 80% de lo recaudado en una actividad que está destinada a la compra de pintura asciende a 1920 lempiras. ¿Cuánto es la cantidad de dinero recaudado?

Ejercicios

1 Encuentre el valor de las siguientes razones:

a) 3 : 4 b) 6 : 18 c) 21 : 28 d) 50 : 25

2 Encuentre la razón simplificada de:

a) 3 : 9 b) 12 : 15 c) 18 : 42 d) 12 : 72

3 Encuentre la razón simplificada de modo que sus términos sean números naturales.

a) 1.2 : 1.1 b) 0.3 : 1 c) $\frac{5}{3} : \frac{7}{3}$ d) $\frac{11}{5} : \frac{6}{5}$

4 Una crayola rosada se hace con 12 ml de cera roja por cada 6 ml de cera blanca. ¿Cuál de las siguientes mezclas crean el mismo tono de color rosado?

a) 24 ml de cera roja mezclados con 10 ml de cera blanca.
b) 18 ml de cera roja mezclados con 12 ml de cera blanca.
c) 10 ml de cera roja mezclados con 5 ml de cera blanca.
d) 6 ml de cera roja mezclados con 4 ml de cera blanca.

5 Aplique la propiedad fundamental de las proporciones para encontrar el valor de x.

a) $x : 5 = 4 : 10$ b) $10 : 1 = x : 0.9$ c) $1.2 : x = 4 : 2$ d) $15 : 20 = 3 : x$

6 Resuelva los siguientes problemas:

a) La razón de la edad de Pedro a la de su papá es 2 : 9 . Si Pedro tiene 8 años, ¿cuántos años tiene el papá?
b) En un salón de clases la razón de niñas a varones es 4 : 3, calcule el número de niñas si hay 15 varones.

7 Encuentre el valor de la constante de proporcionalidad a, si x y y son directamente proporcionales, y $y = 21$ cuando $x = 3$.

8 Si x y y son inversamente proporcionales y $y = 8$ cuando $x = 4$, encuentre el valor de la constante de proporcionalidad a.

9 Resuelva los siguientes problemas aplicando las fórmulas de proporcionalidad directa o inversa.

a) Para pintar una pared de 30 m^2 se necesitan 5 galones de pintura. ¿Cuántos galones de pintura se necesitarán para pintar 42 m^2?

b) Para descargar un furgón cargado de café en 4 horas se necesitan 6 personas. Si el gerente del beneficio contrata 2 empleados más, ¿cuánto tiempo se tardarán en descargar el furgón?

10 Escriba los siguientes números como porcentajes:

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{3}{2}$ c) 0.01 d) 0.1

11 Escriba cada porcentaje como una fracción (simplifíquela si es posible):

a) 0.5% b) 5% c) 80% d) 125%

12 Escriba cada porcentaje como un número decimal:

a) 1% b) 10% c) 75% d) 150%

13 Resuelva los siguientes problemas:

a) Las personas usualmente dejan como propina el 10% de la factura cuando van a restaurantes. ¿Cuánto debe dejarse como propina si se paga una factura de 250 lempiras?

b) ¿Qué porcentaje representa 8 de 4?

c) ¿De qué cantidad es 8 el 25%?

d) María recibe el 20% del dinero de las ventas que realiza. ¿Cuánto tendrá que vender para ganar 200 lempiras?

Distancias reales en los mapas

Vamos a ver el mapa de Honduras. ¿Se puede conocer la distancia real entre dos lugares? Un mapa, generalmente tiene una "Escala". Observe el siguiente mapa.

La escala del mapa representa la razón entre la distancia en el mapa y la distancia real. Si la escala es 1 : 5,000,000, significa que si la distancia es 1 cm en este mapa, en la realidad esa distancia es 5,000,000 cm, es decir 50 km.

Recuerde que:

1 m = 100 cm

1 km = 1,000 m

Entonces 1 km = 1,000 m = 100,000 cm.

Por lo tanto, 5,000,000 cm = 50,000 m = 50 km

Vamos a medir la distancia real entre Tegucigalpa y Gracias. En este mapa es de 3 cm. Sea x la distancia real entre Tegucigalpa y Gracias, utilizando conocimientos de la proporcionalidad, se tiene que:

$$1 : 5{,}000{,}000 = 3 : x$$
$$1 \times x = 5{,}000{,}000 \times 3$$
$$x = 15{,}000{,}000$$

Por lo tanto, la distancia real entre Tegucigalpa y Gracias es 15,000,000 cm, es decir, 150 km.
¡De esta manera, se puede conocer cualquier distancia real entre dos lugares a través de un mapa!

Unidad 7

Gráficas de faja y circulares

Lección 1: Gráficas de faja

Lección 2: Gráficas circulares

Unidad 7

Gráficas de faja y circulares

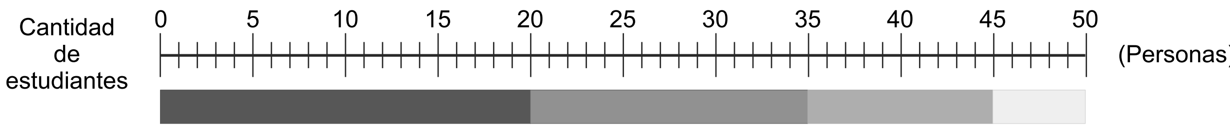
Lección 1: Gráficas de faja

Sección 1: Gráficas de faja

Vamos a investigar sobre el color favorito de los estudiantes.
Consultamos a 50 estudiantes del centro educativo, ¿cuál es el color que más les gusta, rojo, azul, verde o amarillo? y los resultados son los siguientes:

Color	Rojo	Azul	Verde	Amarillo
Estudiantes	20	15	10	5

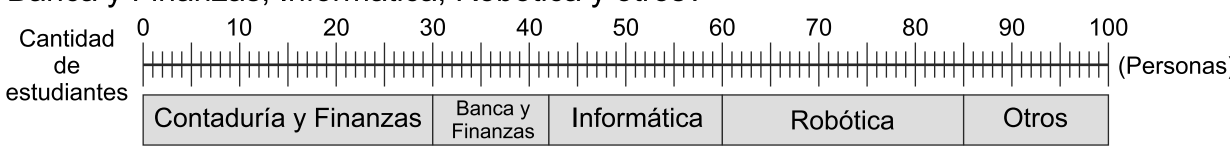
Representados en una recta



La gráfica muestra la cantidad de estudiantes según su color favorito en el centro educativo.

Ejemplo 1.1

Observe la gráfica y diga ¿cuál es la cantidad de estudiantes de Contaduría y Finanzas, Banca y Finanzas, Informática, Robótica y otros?

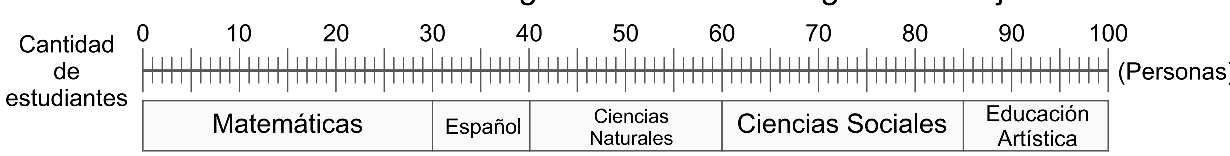


Solución:

Contaduría y Finanzas	30	→ Se obtiene contando a partir de cero
Banca y Finanzas	12	→ Se obtiene contando a partir de 30 y se llega hasta 42
Informática	18	→ Se obtiene contando desde 42 y se llega a 60
Robótica	25	→ Se obtiene a partir de 60 y se llega a 85
Otros	15	→ Se obtiene a partir de 85 y se llega a100

A la gráfica anterior se le llama gráfica de faja. Con la gráfica de faja se observa fácilmente la proporción de cada parte.

Ejercicio 1.1 Según la gráfica indique cuántos estudiantes prefieren las asignaturas de Matemáticas, Español, Ciencias Naturales, Ciencias Sociales y Educación Artística según se muestra en la gráfica de faja.



Sección 2: Construcción de gráfica de faja con porcentaje

Recuerde que para encontrar el porcentaje que representa el dato del total es:

$$\frac{\text{Dato}}{\text{Total}} \times 100\ (\%)$$

Ejemplo 1.2

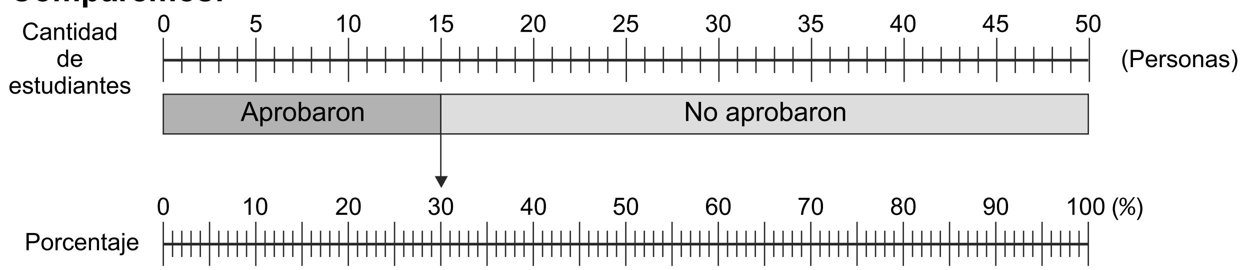
En una sección de 50 estudiantes, 15 aprobaron la asignatura de matemática.
¿Qué porcentaje de estudiantes aprobaron la asignatura de matemática?

Solución:

Aprobaron matemática $\frac{15}{50} \times 100 = 30\ (\%)$

Respuesta: 30 % aprobó matemática

Comparemos:



En este caso 15 estudiantes corresponden al 30% que aprobaron y 35 estudiantes corresponden al 70% que no aprobaron.

Ejemplo 1.3

Se entrevistaron un total de 50 estudiantes sobre su color favorito.
¿Cuál es el porcentaje de cada color?

Color	Estudiantes	Porcentaje (%)
Rojo	20	
Azul	15	
Verde	10	
Amarillo	5	
Total	50	

Solución:

El total de estudiantes entrevistados es 50.
Cantidad de estudiantes con preferencia al color rojo es 20, entonces el porcentaje del color rojo es:

$$\frac{\text{Dato}}{\text{Total}} \times 100 = \frac{20}{50} \times 100 = 40\ (\%)$$

De igual manera:

Color azul: $\frac{15}{50} \times 100 = 30\ (\%)$

Color verde: $\frac{10}{50} \times 100 = 20\ (\%)$

Color amarillo: $\frac{5}{50} \times 100 = 10\ (\%)$

Respuesta:

Color	Estudiantes	Porcentaje (%)
Rojo	20	40
Azul	15	30
Verde	10	20
Amarillo	5	10
Total	50	100

Ejercicio 1.2 Complete la tabla.

Película preferida	Aventura	Ficción	Comedia	Caricatura	Total
Personas	18	12	11	9	50
Porcentaje (%)					

Ejemplo 1.4

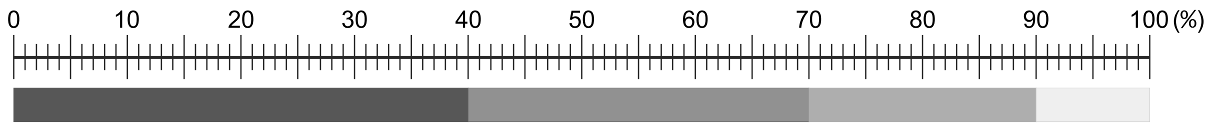
Ahora vamos a dibujar una gráfica de faja según los porcentajes obtenidos en el **Ejemplo 1.3** .

En la gráfica de faja los porcentajes se representarán de mayor a menor.

Solución:

Dibujar una escala graduada de 0 a 100.
Luego, debajo de la escala un rectángulo en forma de faja y haga lo siguiente:
Inicie con la primera categoría que es color rojo inicia de cero y termina en 40 (%).
El color azul inicia en 40(%) y termina en 70 (%).
El color verde inicia en 70(%) y termina en 90 (%).
El color amarillo inicia en 90(%) y termina en 100 (%).

Esto solo es una forma para ubicar los porcentajes en la faja.



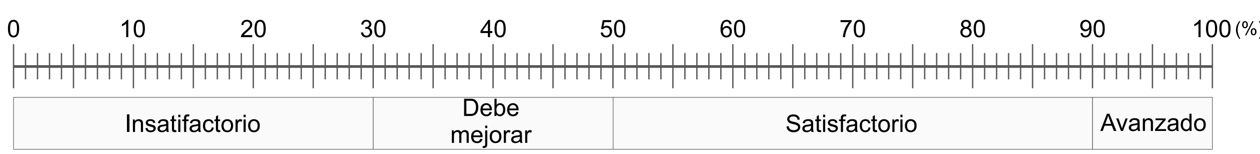
En la mayoría de los casos, los porcentajes se representan de mayor a menor, si la categoría es “otros” este porcentaje se deja siempre al final de la gráfica no importando el valor que tiene su porcentaje.

Ejercicio 1.3 Se preguntó a 50 estudiantes de 7mo grado de un Centro de Educación Básica sobre su equipo de preferencia de la Liga Nacional de Honduras. Represente las respuestas mediante una gráfica de faja.

Equipo Nacional	Olimpia	Motagua	Real España	Marathón	Total
Estudiantes	16	10	8	6	40
Porcentaje (%)	40	25	20	15	100

Si tiene algún orden dentro de los datos (como los que se presentan en la tabla de desempeño) este orden se respeta, la gráfica de faja se representa con ese mismo orden.

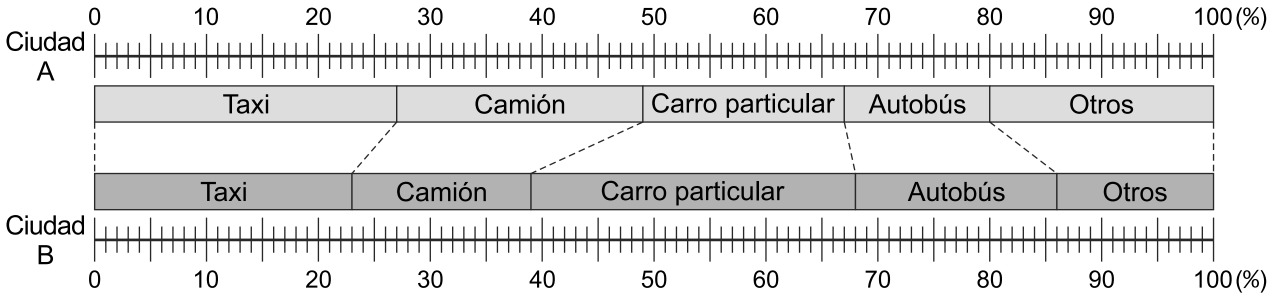
Nivel	Insatifactorio	Debe mejorar	Satisfactorio	Avanzado	Total
Estudiantes	15	10	20	5	50
Porcentaje (%)	30	20	40	10	100



Ejemplo 1.5

Interprete la información mostrada de vehículos que se dirigen a dos ciudades A y B.

Tipo de vehículo que pasa por las entradas de las ciudades A y B



La gráfica que corresponde a la ciudad B se coloca debajo de la gráfica de la ciudad A para facilitar la comparación entre las mismas categorías.

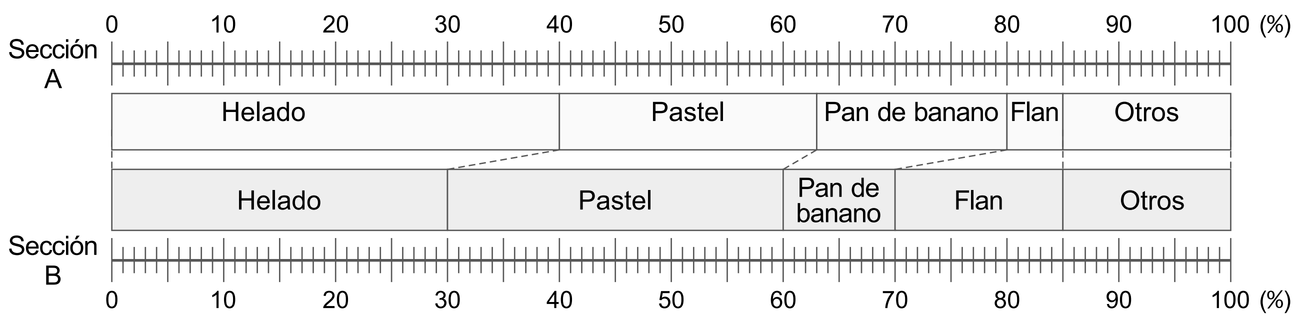
a) ¿Cuál es el porcentaje del taxi en la ciudad A?
b) ¿Cuál es el porcentaje del taxi en la ciudad B?
c) De las dos ciudades A y B, ¿quién tiene mayor porcentaje de carro particular?
d) ¿Qué preferencia es mayor en la ciudad A?
e) De las dos ciudades A y B, ¿quién tiene menor porcentaje de autobuses?

Solución:

a) El porcentaje es 27%
b) El porcentaje es 23%
c) Es en la ciudad B, porque el porcentaje de carro particular en la ciudad B es 29% y en la ciudad A tiene solo 18%
d) La preferencia es taxi
e) El menor porcentaje de autobuses se da en la ciudad A y es 13%

Ejercicio 1.4 Interprete la información mostrada sobre los postres favoritos de los estudiantes de las secciones A y B.

Postres favoritos

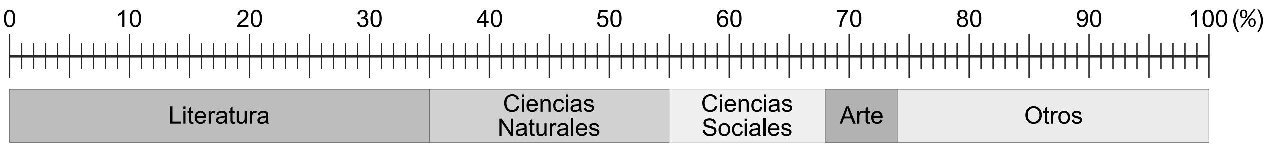


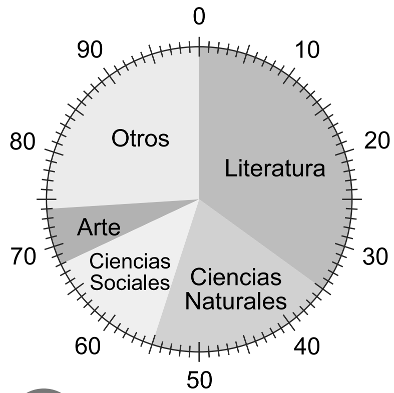
a) ¿Qué porcentaje de estudiantes prefieren el helado en la sección A?
b) ¿Qué porcentaje de estudiantes prefieren el helado en la sección B?
c) ¿Cuál es el mayor porcentaje de estudiantes que prefieren flan entre las secciones A y B?
d) ¿Qué porcentaje es mayor en la sección A?
e) ¿Cuál es el menor porcentaje de estudiantes que prefieren pan de banano entre las secciones A y B?

Lección 2: Gráficas circulares

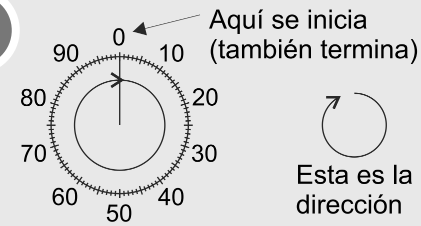
Sección 1: Gráficas circulares

Compare las siguientes gráficas.





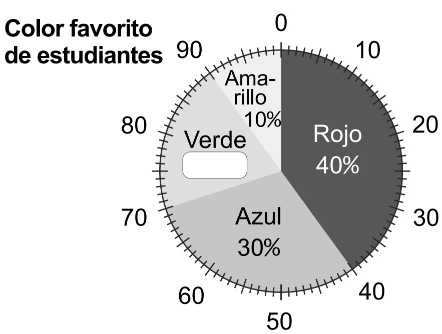
Los porcentajes en cada categoría de la siguiente gráfica también corresponden igual que la gráfica de fajas, lo que varía es la forma de la gráfica.
A este tipo de gráfica se le llama **gráfica circular.**



Aquí la categoría "otros" se encuentra representada al final del círculo no importa su valor

Ejemplo 2.1

Encuentre el porcentaje del color verde mostrado en el siguiente gráfico.



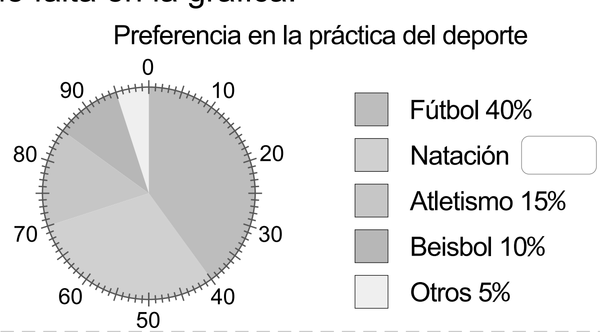
Dentro del cuadrado escriba el porcentaje de color verde.

Solución:
Después de la segunda categoría que termine en 70%,¿cuántas rayitas hay, hasta llegar al final de la tercera categoría que termina en 90%?
Esto representa el 20% de los estudiantes que prefieren el color verde.

Respuesta: 20%

La gráfica circular es un recurso estadístico fácil de interpretar que se utiliza para representar porcentajes y proporciones.

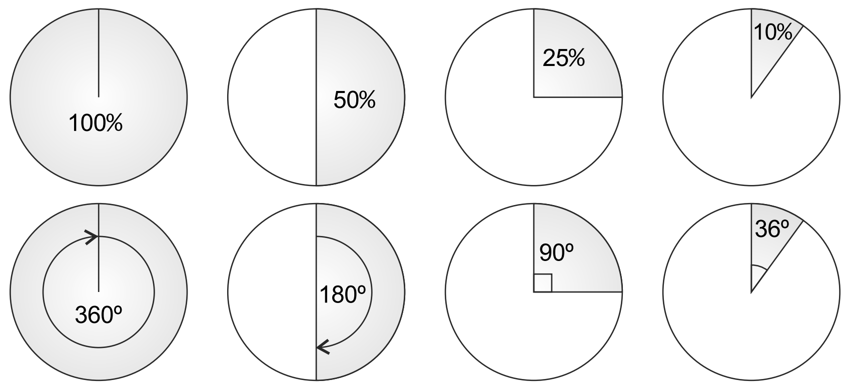
Ejercicio 2.1 Complete el porcentaje que falta en la gráfica.



Compare las siguientes gráficas
La figura 1 está dada en porcentaje y la figura 2 está en grados.

Figura 1

Figura 2



Observando la figura 2 y figura 1 tenemos que:
360° corresponde al 100%
180° corresponde al 50%
90° corresponde al 25%
36° corresponde al 10%
3.6° corresponde al 1%

Utilizando la proporcionalidad
$\underbrace{x : 1\%}_{\text{dato}} = \underbrace{360° : 100\%}_{\text{total}}$
Se puede encontrar $x = 3.6°$
Esto significa que 3.6° corresponde al 1%

Ejemplo 2.2

Con referencia a la figura 1 y 2 complete la tabla.

Categoría	Estudiantes	Porcentaje (%)	Medida del ángulo central
Rojo	20	40	
Azul	15	30	
Verde	10	20	
Amarillo	5	10	
Total	50	100	360º

Solución:

Para calcular los grados del ángulo central se utiliza la proporcionalidad. El total corresponde a 360°, entonces si x es la medida del ángulo central del dato:

$$x : 20 = 360° : 50$$
$$50x = 360° \times 20$$
$$x = 360° \times \frac{20}{50}$$
$$x = 144°$$

$x : 20 = 360° : 50$

Medida del ángulo central del color rojo : Cantidad del color rojo = Medida del ángulo central del **Total** : Cantidad **Total**

También se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$\text{La medida del ángulo central del dato} = 360º \times \frac{\text{Dato}}{\text{Total}}$$

Para calcular la medida del ángulo central del color azul, utilizando la fórmula es:
$360° \times \frac{15}{50} = 108°$

De igual manera:

Color verde: $360° \times \frac{10}{50} = 72°$

Color amarillo: $360° \times \frac{5}{50} = 36°$

Respuesta:

Color	Estudiantes	Porcentaje (%)	Medida del ángulo central
Rojo	20	40	144º
Azul	15	30	108º
Verde	10	20	72º
Amarillo	5	10	36º
Total	50	100	360º

Otra forma de encontrar la medida del ángulo central cuando se sabe el porcentaje. Utilizando la relación entre porcentaje y grado, sabiendo que al 1% corresponden 3.6°. Entonces se puede calcular como: (porcentaje) $\times$ 3.6°

Color	Porcentaje (%)		Medida del ángulo central
Rojo	40	$\times$ 3.6º →	144º
Azul	30	$\times$ 3.6º →	108º
Verde	20	$\times$ 3.6º →	72º
Amarillo	10	$\times$ 3.6º →	36º
Total	100	$\times$ 3.6º →	360º

Ejercicio 2.2 Complete la tabla en grados de cada categoría.

Deporte	Cantidad de estudiantes	Porcentaje (%)	Medida del ángulo central
Fútbol	250	50	
Basquetbol	125	25	
Volibol	75	15	
Atletismo	50	10	
Total	500	100	360°

Ejercicio 2.3 Complete la tabla en grados.

Calificación	Estudiantes	Medida de ángulo central
Insatisfactorio	90	
Debe mejorar	60	
Satisfactorio	30	
Avanzado	20	
Total	200	360°

Puede utilizar cualquier manera:

i) $360° \times \frac{\text{Dato}}{\text{Total}}$

ii) $3.6° \times$ (porcentaje)

Sección 3: Análisis de tabla conociendo el porcentaje

En una sección de 50 estudiantes, solo el 30% aprobó matemática, ¿qué cantidad de estudiantes aprobó?

Si se conoce el total de estudiantes y un determinado porcentaje que aprobó, haciendo uso de la proporcionalidad podemos encontrar ese dato.

Sea x cantidad de estudiantes.
Total de estudiantes es 50.
Entonces: x : 30% = 50 : 100%

$x = 50 \times \frac{30}{100} = 15$

15 estudiantes aprobaron matemática que representa el 30%

Para encontrar “dato” se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$\textbf{dato} = \textbf{total} \times \frac{\textbf{porcentaje}}{\textbf{100}}$$

Ejemplo 2.3

En la tabla se muestra el porcentaje de ventas de artículos de una casa comercial durante una semana.
¿Qué cantidad de artículos se vendieron según la categoría?

Nombre del artículo	Porcentaje (%)	Número de artículos
Lavamanos	40	
Refrigeradoras	30	
Lavadoras	20	
Estufas	10	
Total	100	50

Solución:

Si se quiere saber el dato o cantidad de artículos vendidos por cada categoría puede utilizar la fórmula: $\text{dato} = \text{total} \times \frac{\text{porcentaje}}{100}$

De la fórmula anterior tenemos:

Lavamanos: $50 \times \frac{40}{100} = 20$ artículos

Refrigeradoras: $50 \times \frac{30}{100} = 15$ artículos

Lavadoras: $50 \times \frac{20}{100} = 10$ artículos

Estufas: $50 \times \frac{10}{100} = 5$ artículos

Respuesta:

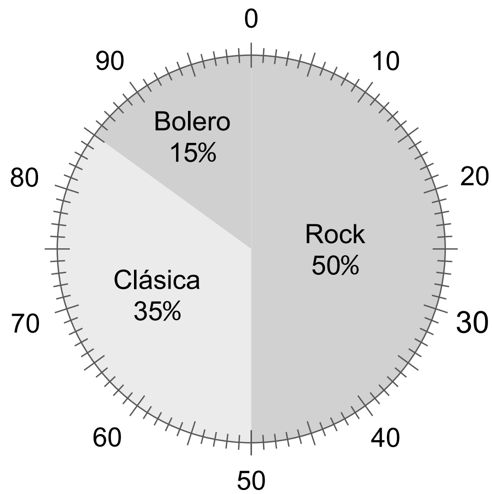
Nombre del artículo	Porcentaje (%)	Número de artículos
Lavamanos	40	20
Refrigeradoras	30	15
Lavadoras	20	10
Estufas	10	5
Total	100	50

Ejercicio 2.4 En la tabla se muestra el porcentaje de la cantidad de frutas disponibles en un supermercado de un total de 200. ¿Cuántas frutas hay disponibles en cada categoría?

Frutas	N° de frutas	Porcentaje(%)
Manzana		45
Uvas		15
Sandía		30
Melón		10
Total	200	100

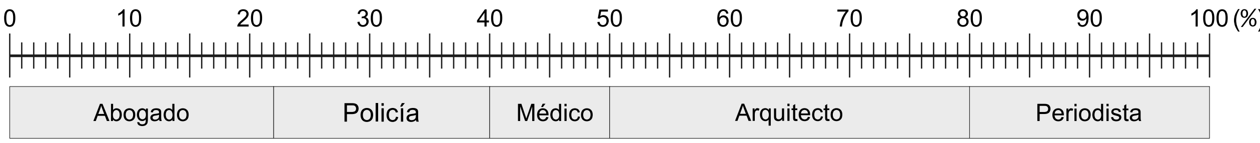
Ejercicio 2.5 Según la gráfica. ¿Cuántas personas prefieren cada tipo de música si en total se entrevistaron 40 personas?

Preferencia en el tipo de música

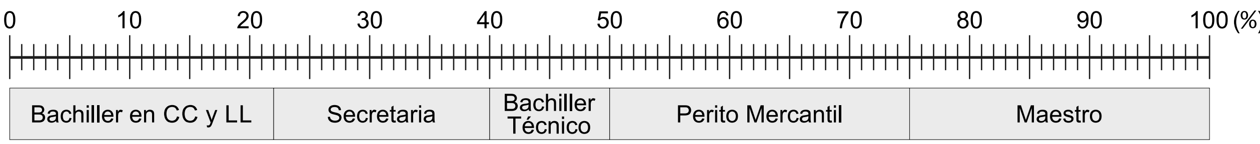


Ejercicios

1 ¿Cuál es el porcentaje de cada profesión?



2 ¿Cuántas personas hay en cada profesión, si hay 800 personas?



3 Con los datos dados en las tablas elabore una gráfica de faja.

a)

Nivel de desempeño	Cantidad de estudiantes
Insatisfactorio	10
Debe mejorar	12
Satisfactorio	14
Avanzado	4
Total	40

b)

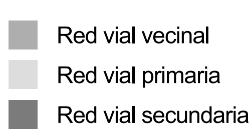
Tipo de intervención	Cantidad de intervenciones
Hernia	8
Pulmones	6
Garganta	4
Vesícula	2
Total	20

4 Según la red vial de carreteras de Honduras, que representan la gráfica mostrada responda.

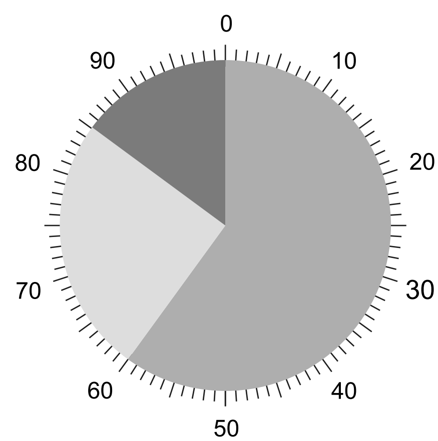
a) ¿Cuál es el porcentaje de la red vial primaria de Honduras?

b) ¿Qué porcentaje representa la red vial secundaria en Honduras?

c) ¿Cuántos grados representa la red vial vecinal de Honduras?



Red vial de carreteras de Honduras



Fuente de red vial de Honduras

En una gráfica es recomendable anotar el título y al pie de la gráfica la fuente de los datos que la representan.

5 De acuerdo con la gráfica mostrada conteste las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el porcentaje de cada departamento según su gráfica?

b) ¿Cuál es el orden de los departamentos de menor a mayor, según la población?

c) ¿Qué departamento tiene mayor población?

d) ¿Qué departamento tiene menor población?

Población de 5 departamentos de Honduras