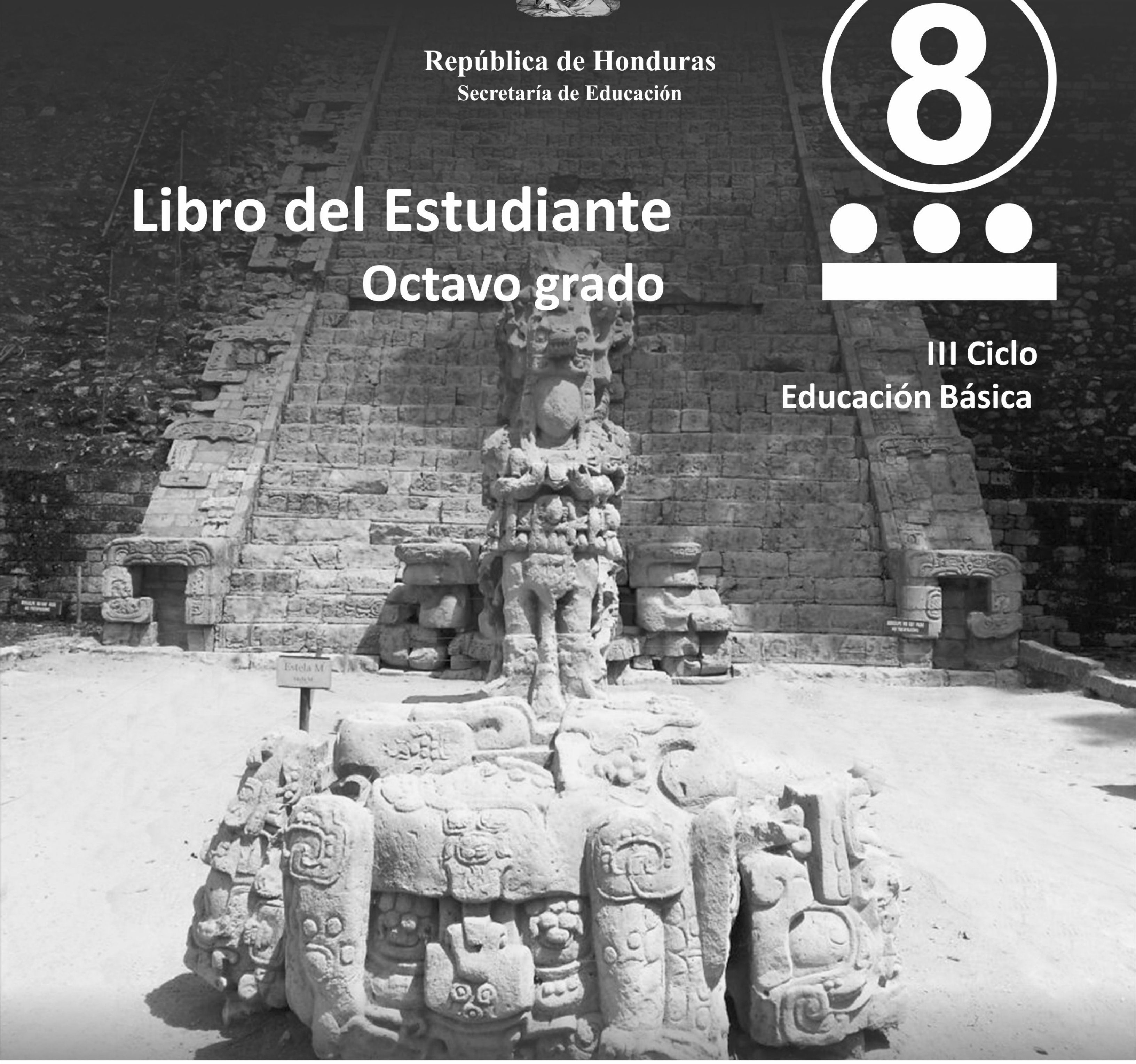
República de Honduras
Secretaría de Educación



Libro del Estudiante

Octavo grado

8

III Ciclo
Educación Básica

Matemáticas

ORIENTACIONES SOBRE EL USO DEL LIBRO DEL ESTUDIANTE

Queridos Estudiantes:

La Secretaría de Estado en el Despacho de Educación de Honduras con mucha satisfacción le entrega este **Libro del Estudiante**, para que lo use en el aprendizaje de las Matemáticas. El mismo pertenece a su centro educativo, por lo tanto, debe apreciarlo, cuidarlo y tratarlo con mucho cariño para que pueda ser utilizado en años posteriores. Para cuidarlo le sugerimos lo siguiente:

1. Forre el **Libro del Estudiante** con papel y/o plástico, y sobre el forro escriba su nombre, grado, sección a la que pertenece, el nombre del docente y del centro educativo.

2. Evite rayar, manchar o romper las partes internas o externas del **Libro**, para que al devolverlo el mismo esté en buenas condiciones.

3. Todos los ejercicios propuestos en el **Libro** debe desarrollarlos en su cuaderno de Matemáticas.

4. Está permitido llevar a su casa el **Libro**, cuidando que otras personas que conviven con usted no se lo manchen, rayen o rompan.

5. Recuerde llevar el **Libro** al centro educativo todos los días que tenga la clase de Matemáticas.

6. Antes de usar su **Libro**, por favor lávese y séquese las manos, evite las comidas y bebidas cuando trabaje en él; asimismo, limpie muy bien la mesa o el lugar donde lo utilice.

7. Tenga cuidado de usar su **Libro** como objeto para jugar, evite tirarlo o sentarse en él.

8. Al pasar las hojas o buscar el tema en el **Libro**, debe tener cuidado de no doblarles las esquinas, rasgarlas o romperlas; también cuide que no se desprendan las hojas por el mal uso.

Recuerde que este **Libro** es una herramienta de apoyo para usted, por lo que debe conservarlo muy bonito, aseado y sobre todo evitar perderlo, porque no lo encontrará a la venta.

Presentación

La Secretaría de Educación presenta el "**Libro del Estudiante" de Octavo Grado del área de Matemáticas para el Tercer Ciclo de Educación Básica**, que tiene su fundamento en el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica (DCNEB), mismo que fue revisado y ajustado por un equipo técnico en el marco del Proyecto Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemáticas (PROMETAM FASE III).

Con el uso de este Libro y con la ayuda del docente podrá aprender mayores conocimientos de matemáticas, encontrándole sentido a estos, ya que proponen situaciones de la vida diaria donde se aplican conceptos y procedimientos, además con el desarrollo de las actividades planteadas se comprenderá cada vez más, permitiendo apreciar las matemáticas como un quehacer humano y un medio para desenvolverse en la vida.

En la búsqueda del camino hacia una nueva Honduras, el recurso humano es el único capaz de generar riquezas a través de la aplicación de sus conocimientos, competencias y acciones; por lo que se espera que los educandos se comprometan a elevar su nivel educativo para incorporarse al mercado laboral.

Secretario de Estado
en el Despacho de Educación

Índice

Unidad 1

Polinomios

Lección 1: Clasificación y operaciones básicas con polinomios

Unidad 1

Polinomios

Lección 1: Clasificación y operaciones básicas con polinomios

Sección 1: Monomios y polinomios

En 7mo grado aprendió que las expresiones algebraicas $3a$, $6y$ y $5p^2$, se llaman términos, que admiten expresarse como el producto de número con variable. A estas expresiones también se les llama **monomio**.

Lo mismo son x y 50, x se expresa como única variable y 50 se expresa como único número, también se les llama monomio. (Se puede decir "50 es un monomio constante")

Son monomios:
$3a$, $6y$, p^2, x, 50

$$ax^n$$

Exponente: n; Variable: x; Coeficiente: a

Las expresiones algebraicas, como:

$$10a + 2$$

$$2a + 3b^2 + 1$$

Son una suma de monomios (términos).

Son polinomios:

$$\underbrace{10a + 2}_{\text{2 términos (binomios)}} \qquad \underbrace{2a + 3b^2x + 1}_{\text{3 términos (trinomios)}}$$

Un polinomio es un monomio o una suma de dos o más monomios.

Ejemplo 1.1

Encuentre los términos del polinomio $2a^2 - 4a - 1$.

Solución:

$2a^2 - 4a - 1$ expresado como una adición: $2a^2 + (-4a) + (-1)$ [suma de monomios]

$$\underbrace{2a^2 + (-4a) + (-1)}_{\text{3 términos (trinomios)}}$$

Respuesta: $2a^2$, $-4a$ y -1 son los términos del polinomio.

Ejercicio 1.1 Encuentre los términos de los siguientes polinomios.

a) $8x^2 - 3x - 2$ b) $5a + 4b^2 - 3c$ c) m

d) $5ab - 2$ e) $x - 2y + 8$ f) $\frac{x}{4} - 3y$

El grado de un monomio lo determina la cantidad de las variables que se multiplican en un monomio.

Ejemplo 1.2

Determine el grado de los siguientes monomios.

a) $3x^2$ b) $5x^2y$

Solución:

a) $3x^2 = 3 \times \underbrace{x \times x}_{\text{la cantidad de variables multiplicadas es 2}}$

Respuesta: el grado es 2

b) $5x^2y = 5 \times \underbrace{x \times x \times y}_{\text{la cantidad de variables multiplicadas es 3}}$

Respuesta: el grado es 3

Ejercicio 1.2 Determine el grado de los siguientes monomios.

a) $10m^2$ b) 8 c) $5xy$ d) $10ab^2$

El grado de un monomio constante es cero.

El **grado de un polinomio** lo determina el término con el máximo grado.

Ejemplo 1.3

Determine el grado de los siguientes polinomios.

a) $3x^2 - 4x + 6$ b) $2x + 5$ c) $-7ab + 6$

Grado por término:

$$\underset{2}{\underset{\uparrow}{3x^2}} - \underset{1}{\underset{\uparrow}{4x}} + \underset{0}{\underset{\uparrow}{6}}$$

Solución:

a) $3x^2 - 4x + 6$ Los términos del polinomio son: $3x^2$, $-4x$ y 6.
$3x^2$ es el término que tiene mayor grado.
Respuesta: El polinomio es de grado 2

b) $2x + 5$ Los términos del polinomio son: $2x$ y 5.
$2x$ es el término que tiene mayor grado.
Respuesta: El polinomio es de grado 1

c) $-7ab + 6$ Los términos del polinomio son: $-7ab$ y 6**.**
$-7ab$ es el término que tiene mayor grado.
Respuesta: El polinomio es de grado 2

Ejercicio 1.3 Determine el grado de los siguientes polinomios:

a) $3a + 4a^2$ b) $-x^2 + 6x + 1$

c) $2ab + 3$ d) $a - b + 5$

El polinomio $3x^2 + x^3 + 1 - 5x$ puede ordenarse de acuerdo al grado de sus términos así:

$$\underset{3}{\underset{\uparrow}{x^3}} + \underset{2}{\underset{\uparrow}{3x^2}} - \underset{1}{\underset{\uparrow}{5x}} + \underset{0}{\underset{\uparrow}{1}}$$

Grado de los términos forma (descendente): De mayor a menor

Al polinomio de grado 1 se le llama polinomio de **primer grado**.
Al polinomio de grado 2 se le llama polinomio de **segundo grado**.

$3x^2 - 4x + 6$, $-7ab + 6$ son polinomios de segundo grado y $2x + 5$ es polinomio de primer grado

Sección 2: Adición y sustracción de polinomios

En 7mo grado estudiamos que $3x$ y $4x$ son semejantes y sumandolos obtenemos un solo término es $7x$. De igual manera $-3ab^2$ y $7ab^2$ son términos semejantes, sumandolos obtenemos un solo término queda $4ab^2$.

Ejemplo 1.4

Identifique los términos semejantes en el polinomio $6a + 2b + 3b - 4a$.

Solución:

Son semejantes: $6a$ y $-4a$, también $2b$ y $3b$

Términos semejantes son aquellos términos que tienen las mismas variables con los mismos exponentes.

Ejemplo 1.5

Simplifique los términos que son semejantes en el polinomio $6a + 2b + 3b - 4a$

Semejantes

$6a + 2b + 3b - 4a$

Semejantes

Solución:

$$\begin{aligned} 6a + 2b + 3b - 4a &= (6a - 4a) + (2b + 3b) && \text{... Agrupar términos semejantes} \\ &= (6 - 4)a + (2 + 3)b && \text{... Sumar y restar sus coeficientes y copiar su variable} \\ &= 2a + 5b \end{aligned}$$

Ejercicio 1.4 Simplifique los términos que son semejantes en los polinomios.

a) $3a - 6b + 8a + 3b$ b) $3x - 7y - x + 2y$

Los términos semejantes en un polinomio **se reducen sumando o restando** los coeficientes y al resultado se le copia la misma variable.

Ejemplo 1.6

Calcule: $(3a + 4b) + (5a + 2b)$

Solución:

$$\begin{aligned} (3a + 4b) + (5a + 2b) &= 3a + 4b + 5a + 2b && \text{... Suprimir los paréntesis} \\ &= 3a + 5a + 4b + 2b && \text{... Agrupar los términos semejantes} \\ &= 8a + 6b && \text{... Sumar separadamente} \end{aligned}$$

En forma vertical:

$$\begin{array}{rr} & 3a + 4b \\ +) & 5a + 2b \\ \hline & 8a + 6b \end{array}$$

Se debe colocar término semejante bajo término semejante.

Ejercicio 1.5 Calcule:

a) $(4x + 7y) + (x + 5y)$ b) $(5a - 2b) + (-a - 3b)$ c) $(3a - 4b) + (a - 2b)$ d) $(a + 4b) + (5a + b)$

Ejemplo 1.7

Calcule $(3a + 4b) - (5a - 2b)$

Solución:

$$(3a + 4b) - (5a - 2b) = 3a + 4b - 5a + 2b$$ ... Cambiar de signo los términos que están dentro del paréntesis.

$$= -2a + 6b$$

$-(5a - 2b) = -5a + 2b$

Ejercicio 1.6 Calcule.

a) $(5x + 2y) - (3x - y)$

b) $(3a - 6b) - (2a + 4b)$

Ejercicio 1.7 Calcule.

a) $(3a + 5) + (a + 4)$

b) $(-2x + 4) - (x + 1)$

c) $(3m + 4n) + (2m - 2n)$

d) $(7x - 3y) - (2x - 5y)$

e)
$$\begin{array}{rr} & 2x - 3y \\ +) & 4x + 5y \\ \hline \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{rr} & 5x - 2y \\ +) & -x + 3y \\ \hline \end{array}$$

Ejemplo 1.8

Calcule:

a) $5(2a + 3)$ b) $(2a - 3) \times (-3)$ c) $(20a - 12b) \times (-\frac{1}{4})$

Soluciones:

a) $5(2a + 3) = 5 \times 2a + 5 \times 3$
$= 10a + 15$

b) $(2a - 3) \times (-3) = 2a \times (-3) - 3 \times (-3)$
$= -6a + 9$

c) $(20a - 12b) \times (-\frac{1}{4}) = 20a \times (-\frac{1}{4}) - 12b \times (-\frac{1}{4})$
$= -5a + 3b$

$5\ (2a + 3)$
$= 5 \times 2a + 5 \times 3$

Ejercicio 1.8 Calcule.

a) $7(5x + 4y)$ b) $-4(2a - 3b)$

c) $(12x - 16y) \times \left(-\frac{1}{4}\right)$ d) $(14a - 7\boldsymbol{b}) \times \left(-\frac{1}{7}\right)$

Ejemplo 1.9

Calcule.

a) $(6y + 2) \div 2$ b) $(4m - 6n + 2) \div \frac{2}{3}$

Solución:

a) $(6y + 2) \div 2 = (6y + 2) \times \frac{1}{2}$
$= 6y \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2}$
$= 3y + 1$

$A \div n = A \times \frac{1}{n} = \frac{A}{n}$, n es un número distinto de cero.

Otra forma:

$(6y + 2) \div 2 = \frac{6y + 2}{2} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}y + \overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 3y + 1$

b) $(4m - 6n + 2) \div \frac{2}{3} = (4m - 6n + 2) \times \frac{3}{2}$
$= 4m \times \frac{3}{2} - 6n \times \frac{3}{2} + 2 \times \frac{3}{2}$
$= 6m - 9n + 3$

Ejercicio 1.9 Calcule.

a) $(-8x + 6y) \div 2$ b) $(5a - 15b) \div (-5)$ c) $(12x - 9y) \div \frac{3}{2}$

Ejemplo 1.10

Calcule $2(-8a + b) - 3(2a - 4b)$

Solución:

$$\begin{aligned} 2(-8a + b) - 3(2a - 4b) &= -16a + 2b - 6a + 12b \\ &= -16a - 6a + 2b + 12b \\ &= -22a + 14b \end{aligned}$$

$$a(b + c) = a \times b + a \times c$$

Ejercicio 1.10 Calcule.

a) $4(a + b) + 2(2a + b)$

b) $2(3x - y) + 3(x + 2y)$

c) $6(4x + y) - 7(x - 2y)$

d) $3(5a - b) - 2(2a - 2b)$

Ejemplo 1.11

Calcule $\dfrac{3x + 2y}{2} - \dfrac{2x - y}{3}$

Solución:

Al hacer cálculos con polinomios expresados de forma fraccionaria, hay que convertir las fracciones para que tengan igual denominador.
Por lo general, se utiliza el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores como común denominador.

6 es el m.c.m. de 2 y 3.

$$\begin{aligned} \frac{3x + 2y}{2} - \frac{2x - y}{3} &= \frac{3(3x + 2y)}{6} - \frac{2(2x - y)}{6} \\ &= \frac{3(3x + 2y) - 2(2x - y)}{6} \\ &= \frac{9x + 6y - 4x + 2y}{6} \\ &= \frac{5x + 8y}{6} \end{aligned}$$

$$\frac{3x + 2y}{2} \times \frac{3}{3} = \frac{3(3x + 2y)}{6}$$

$$\frac{2x - y}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{2(2x - y)}{6}$$

Otra forma:

$$\begin{aligned} \frac{5x + 8y}{6} &= \frac{5}{6}x + \frac{8}{6}y \\ &= \frac{5}{6}x + \frac{4}{3}y \end{aligned}$$

Ejercicio 1.11 Calcule.

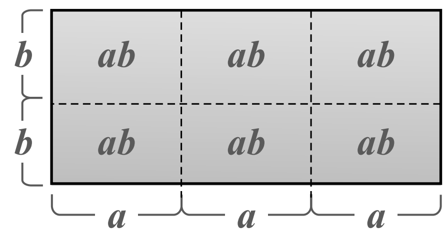
a) $\dfrac{x + 5y}{2} + \dfrac{4x - 3y}{5}$

b) $\dfrac{x + 2y}{3} - \dfrac{2x - y}{2}$

Sección 4: Multiplicación y división de monomios

Ejemplo 1.12

Encuentre el área de un rectángulo cuyo largo es $3a$ y el ancho es $2b$.



Solución:
En la figura de la derecha se observa 6 rectángulos pequeños cuya área es ab que corresponden al rectángulo dado. Es decir el área del rectángulo es $6ab$.

Respuesta: $6ab$

Se puede considerar como lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \text{largo} \times \text{ancho} \\ &= 3a \times 2b \\ &= 3 \times a \times 2 \times b \\ &= 3 \times 2 \times a \times b \\ &= 6ab \end{aligned}$$

$3a \times 2b = 6ab$

Para **multiplicar dos o más monomios** se multiplican los coeficientes y las variables.

Ejercicio 1.12 Calcule:

a) $4x \times 2y$ b) $8a \times 5b$ c) $m \times 5n$

Ejemplo 1.13

Calcule $4x \times (-2x)$

Solución:

$$\begin{aligned} 4x \times (-2x) &= 4 \times x \times (-2) \times x \\ &= 4 \times (-2) \times x \times x \\ &= -8x^2 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.13 Calcule:

a) $7y \times (-3y)$ b) $(-x) \times 8x$ c) $\frac{5}{3}a \times (-6a)$

d) $(-3x) \times 2x$ e) $4ab \times (-2b)$

Ejemplo 1.14

Calcule:

a) $2x^2 \times 3x$

b) $(-2a)^2$

Solución:

a) $2x^2 \times 3x = 2 \times x \times x \times 3 \times x$
$= 2 \times 3 \times x \times x \times x$
$= 6x^3$

b) $(-2a)^2 = (-2a) \times (-2a)$
$= (-2) \times a \times (-2) \times a$
$= (-2) \times (-2) \times a \times a$
$= 4a^2$

Ejercicio 1.14 Calcule:

a) $8a \times 3a^2$ b) $(-7a)^2$ c) $-2a \times 3a^3$

División de monomios: se dividen los coeficientes y se dividen las variables.

Ejemplo 1.15

Calcule:

a) $6a^2 \div 2a$

b) $8xy \div 4x$

$A \div B = \dfrac{A}{B}$

Solución:

a) $6a^2 \div 2a = \dfrac{6a^2}{2a}$

$= \dfrac{\overset{3}{\cancel{6}} \times \overset{1}{\cancel{a}} \times a}{\underset{1}{\cancel{2}} \times \underset{1}{\cancel{a}}}$

$= 3a$

b) $8xy \div 4x = \dfrac{8xy}{4x}$

$= \dfrac{\overset{2}{\cancel{8}} \times \overset{1}{\cancel{x}} \times y}{\underset{1}{\cancel{4}} \times \underset{1}{\cancel{x}}}$

$= 2y$

Ejercicio 1.15 Calcule.

a) $(-6ab) \div 2a$ b) $8x^2 \div x$ c) $(-9x^2y) \div (-3y)$ d) $15x^3 \div 5x^2$

Ejercicios

1 ¿Cuantos términos tienen los siguientes polinomios y cuáles son?

a) $8x^2 - 3x$ b) $5a - 4b^2 - 3x$ c) $3 - 2x$ d) $10mn$

2 ¿Cuál es el grado de los siguientes polinomios?

a) $3x + 4y^2$ b) $-4xy^3 - 5x^2y$ c) $4x + 1$

3 Simplifique los términos que son semejantes en los polinomios.

a) $(-3a + 5b) + (10a - 14b)$ b) $3a + 2b + 2a + 3b$

c) $a^2 + 2a + 3a^2 - 5a$ d) $4a + 12 + 5a + 10$

4 Calcule:

a) $(3a^2 + 4) - (a^2 - 1)$ b) $(3x - 10) - (-2x + 10)$

c) $(-15x^3 + 42x^2) - (-25x^3 + 12x^2)$ d) $(5x^2 - 7xy) - (8x^2 + 4xy)$

e) $(10a + 14b) + (-3a - 10b)$ f) $(13a + 12b) + (5a - 2b)$

5 Calcule:

a) $4(7x - 2)$ b) $5(4pq - 3p)$ c) $(10x^2 - 6x) \times (-\frac{1}{2})$ d) $8(\frac{1}{2}y + \frac{3}{4})$

6 Calcule:

a) $(30x^2 + 15y) \div 5$ b) $(4b^2 - 10b) \div (-\frac{1}{2})$

7 Calcule:

a) $6(a^2 + 4) - 3(a^2 + 1)$ b) $4(x + 1) + 2(x - 4)$ c) $2(3x - 1) - 3(-2x - 1)$

8 Calcule:

a) $\frac{x + 2}{3} + \frac{4x + 1}{2}$ b) $\frac{x + 1}{3} - \frac{2x + 3}{4}$ c) $\frac{x + 5y}{2} + \frac{3x - 5y}{3}$ d) $\frac{3xy + 2}{5} + \frac{3xy - 1}{2}$

9 Calcule

a) $5x \times (-3y)$ b) $5x^2y \times 7xy$ c) $-\frac{3}{2}ab^2 \times 6a^2$ d) $2ab \times 3a$

10 Calcule

a) $15xy^2 \div 5xy$ b) $21a^2 \div 7$ c) $6a^3b \div 2ab$

Unidad 2

Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Lección 1: Despeje de una variable

Lección 2: Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Lección 3: Aplicación de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

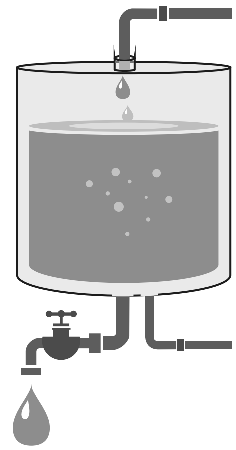
Unidad 2

Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Lección 1: Despeje de una variable

Ejemplo 1.1

Un tanque de reserva tiene 58 galones de agua, por cada hora que se abre la válvula se consumen 5 galones. Si h representa las horas que se abre la válvula y a la cantidad de agua que queda en el tanque después de h horas, encuentre:



a) La cantidad de galones que se consumen después de h horas.
b) La cantidad de agua a que queda en el tanque luego de h horas que se abrió la válvula
c) Exprese la variable h en términos de la variable a, considerando el resultado del inciso b).

Solución:

a) Como h representa las horas que se abrió la válvula, entonces $5h$ es la cantidad de galones que se consumen después de h horas.
b) La cantidad de agua a que quedará después de h horas es: $a = 58 - 5h$.
c) Para expresar h en términos de la variable a, es necesario aplicar las propiedades de la igualdad.

$$a = 58 - 5\boxed{h}$$

$$a + 5h = 58 - \cancel{5h} + \cancel{5h} \quad \text{…Sumar } 5h \text{ a ambos lados}$$

$$\cancel{a} - \cancel{a} + 5h = 58 - a \quad \text{…Restar } a \text{ en ambos lados}$$

$$5h = 58 - a \quad \text{…Reducir términos semejantes}$$

$$\frac{\cancel{5}h}{\cancel{5}} = \frac{58 - a}{5} \quad \text{…Dividir entre 5 a ambos lados}$$

$$h = \frac{58 - a}{5}$$

El recuadro de $-5\boxed{h}$ representa la variable que se desea aislar.

Respuesta: $h = \dfrac{58 - a}{5}$

El proceso aplicado en c) para aislar la variable h de las otras cantidades y/o variables se le conoce como despeje.

Despejar una variable de una ecuación, es encontrar otra expresión equivalente donde la variable considerada quede aislada en uno de los lados de la igualdad.

Ejemplo 1.2

De la ecuación $2n = 5 - 3m$, despeje para m usando la transposición de términos.

Transposición de términos:

$A + B = C \rightarrow A = C - B$

$A - B = C \rightarrow A = C + B$

Solución:

$2n = 5 - 3m$

$2n + 3m = 5$ … Trasladar $-3m$ al lado izquierdo de la igualdad con signo $+$

$3m = 5 - 2n$ … Trasladar $2n$ al lado derecho de la igualdad con signo $-$

$\frac{3m}{3} = \frac{5 - 2n}{3}$ … Dividir entre 3 ambos lados

$m = \frac{5 - 2n}{3}$

Ejercicio 1.1 Despeje para la variable que se expresa entre corchetes usando la transposición de términos.

a) $y = 13 - 2x$; $[x]$ b) $5x + 3y = 9$; $[y]$

Ejemplo 1.3

Dada la ecuación $a = 17 + 3x$, despeje para x.

Propiedad
Si A = B, entonces B = A.

Ejemplo:
Si $a = 17 + 3x$ entonces $17 + 3x = a$.

Solución:

$a = 17 + 3x$

$17 + 3x = a$ ... Aplicar la propiedad: Si A = B entonces B = A

$3x = a - 17$ ... Trasladar 17 al lado derecho de la igualdad con signo $-$

$\frac{3x}{3} = \frac{a - 17}{3}$ ... Dividir ambos lados entre 3

$x = \frac{a - 17}{3}$

Ejercicio 1.2 Despeje para la variable que se expresa entre corchetes.

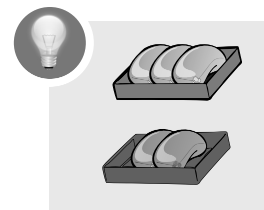
a) $9 = 5x + 3y$; $[x]$ b) $\ell = 2 + 7r$; $[r]$

Lección 2: Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Sección 1: Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

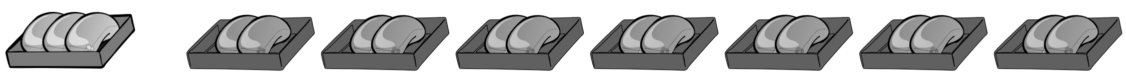
Ejemplo 2.1

En una bodega hay dos tipos de cajas de jabones: las azules que contienen 3 jabones y las rojas que contienen 2 jabones. Si Pedro necesita 17 jabones, ¿cuántas cajas azules y cuántas cajas rojas debe tomar?

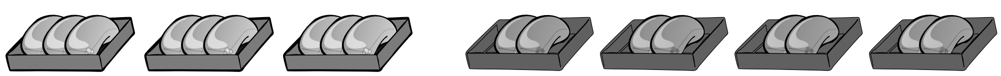


Solución:

1. Si Pedro toma 1 caja azul tiene 3 jabones, entonces necesita 7 cajas rojas para tener 17 jabones.



2. Si Pedro toma 3 cajas azules tiene 9 jabones, entonces necesita 4 cajas rojas para tener 17 jabones.



3. Si Pedro toma 2 cajas azules tiene 6 jabones, pero al tomar las cajas rojas no se pueden completar exactamente los 17 jabones.

Respuesta: Los 17 jabones se pueden tomar agarrando 1 caja azul y 7 rojas; también se puede tomar agarrando 3 cajas azules y 4 rojas.

Ejercicio 2.1 ¿De qué otra manera puede Pedro extraer los 17 jabones tomando cajas azules y rojas?

La cantidad de cajas azules y rojas que necesita Pedro está representada por la ecuación:

$3x + 2y = 17$ ... x: cantidad de cajas azules
y: cantidad de cajas rojas

Los datos de la tabla 1, resumen el número de cajas azules y rojas que necesita Pedro.

Tabla 1

Cajas azules	x	1	3	5
Cajas rojas	y	7	4	1

Al resolver una ecuación se obtienen valores de la variable que hacen verdadera la igualdad.
Al procedimiento de reemplazar estos valores en el lugar original de la variable y verificar que la igualdad se cumple, se le llama comprobación.

Ejemplo 2.2

Compruebe que los valores encontrados para las variables x y y en el Ejemplo 2.1 son correctos.

Solución:

a) Comprobar si se cumple o no, que cuando $x = 1$, $y = 7$ la igualdad $3x + 2y = 17$ es verdadera.

$3x + 2y = 17$ ... cuando $x = 1$, $y = 7$

$$3(1) + 2(7) \overset{?}{=} 17$$
$$3 + 14 \overset{?}{=} 17$$
$$17 \overset{\checkmark}{=} 17$$

Se cumple

Al comprobar que sí es verdadera la igualdad $3x + 2y = 17$ para los valores $x = 1$ y $y = 7$ se escribe al final $\overset{\checkmark}{=}$, pero antes de llegar a esta conclusión se expresa como $\overset{?}{=}$, porque todavía no se sabe si la igualdad se cumple o no.

b) Comprobar si se cumple o no, que cuando $x = 3$, $y = 4$ la igualdad $3x + 2y = 17$ es verdadera.

$3x + 2y = 17$ ... cuando $x = 3$, $y = 4$

$$3(3) + 2(4) \overset{?}{=} 17$$
$$9 + 8 \overset{?}{=} 17$$
$$17 \overset{\checkmark}{=} 17$$

Se cumple

c) Compruebe en su casa si se cumple cuando $x = 5$, $y = 1$.

La expresión $\mathbf{3x + 2y = 17}$ es una **ecuación de primer grado en dos variables**.

Una ecuación es una igualdad que involucra una o más variables. En esta unidad se estudiarán únicamente las ecuaciones de primer grado en dos variables.

Ejemplo 2.3

Identifique cuáles de las siguientes son ecuaciones de primer grado en dos variables.

a) $6x + y = 19$ b) $-10x - 7xy = 2$ c) $5x - y + 3 = 0$

Solución:

a) Sí es ecuación de primer grado en dos variables, porque el grado de los términos $6x$ y y es 1.

b) No, porque el término $-7xy$ tiene grado 2.

c) Sí, porque los términos $5x$ y $-y$ tienen grado 1, y se pueden igualar a -3, es decir, $5x - y = -3$.

$x = \underbrace{x^1}$

Es de grado 1

$xy = \underbrace{x^1}\underbrace{y^1}$

El término xy es de grado $1 + 1 = 2$

Ejercicio 2.2

Identifique las ecuaciones de primer grado en dos variables.

a) $10x + y = 7$ b) $xy + x = 5$ c) $2x - 5y + 1 = 0$ d) $x^2 + 6y = 9$

Ejemplo 2.4

Ahora a la situación del Ejemplo 2.1 se agrega la siguiente condición "La cantidad total de las cajas entre azules y rojas que Pedro necesita es 7". Si se utilizan las mismas variables, ¿cuál es la ecuación que representa esta situación?

Solución: $x + y = 7$ x: cantidad de cajas azules
y: cantidad de cajas rojas

a) ¿Cuántas cajas de cada color se necesitan?

b) ¿Cuáles son los valores de x y de y que satisfacen simultáneamente la ecuación $3x + 2y = 17$ del Ejemplo 2.1 y la ecuación $x + y = 7$ del inciso anterior?

Solución:

a) Como la cantidad total de cajas entre azules y rojas es 7, se pueden tomar:

1 caja azul y 6 rojas,
2 cajas azules y 5 rojas,
3 cajas azules y 4 rojas,
4 cajas azules y 3 rojas,
y así sucesivamente.

No puede tomar solo cajas de un mismo color.

En la tabla 2 se resumen los datos de las cantidades de ambos tipos de caja.

Tabla 2 ($x + y = 7$)

x	1	2	3	4	5	6
y	6	5	4	3	2	1

b) Los valores de x y y que satisfacen la ecuación $3x + 2y = 17$ se presentan en la **Tabla 1** y los valores de x y y que satisfacen la ecuación $x + y = 7$ en la **Tabla 2**.

Tabla 1 ($3x + 2y = 17$)

Cajas azules	x	1	3	5
Cajas rojas	y	7	4	1

Tabla 2 ($x + y = 7$)

x	1	2	3	4	5	6
y	6	5	4	3	2	1

Los valores que satisfacen al mismo tiempo las dos ecuaciones son $x = 3$, $y = 4$.

Cuando se buscan las soluciones comunes a dos ecuaciones de primer grado en dos variables se colocan de la siguiente manera y se le llama **sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables**:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

Un **sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables** es una pareja de ecuaciones de primer grado en dos variables.

La solución de un sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables son los valores de las variables que satisfacen simultáneamente las dos ecuaciones.

Resolver un sistema de ecuaciones de primer grado en dos variables es encontrar su solución.

La solución del sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ x + y = 7 \end{cases}$ es $x = 3, y = 4$.

También se puede escribir la solución de un sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables de la siguiente manera:

CS: $\{(x = 3, y = 4)\}$
CS significa conjunto solución.

Ejemplo 2.5

Empleando tablas de valores, encuentre la solución del siguiente sistema probando simultáneamente en cada ecuación con los valores 0, 1, 2 y 3 para la variable x.

$$\begin{cases} x - y = -1 & ① \\ x + y = 3 & ② \end{cases}$$

Solución:

Ecuación ① $x - y = -1$	**Ecuación ②** $x + y = 3$
$x - y = -1$ $0 - y = -1$ ... cuando $x = 0$ $y = 1$	$x + y = 3$ $0 + y = 3$ ... cuando $x = 0$ $y = 3$
$x - y = -1$ $1 - y = -1$ ... cuando $x = 1$ $-y = -1 - 1$ $-y = -2$ $y = 2$	$x + y = 3$ $1 + y = 3$ ... cuando $x = 1$ $y = 3 - 1$ $y = 2$

Ecuación $x - y = -1$ ①

x	0	1	2	3
y	1	2		

Ecuación $x + y = 3$ ②

x	0	1	2	3
y	3	2		

Como $x = 1$, $y = 2$ es solución de ambas ecuaciones, no se necesita seguir probando con los valores de $x = 2$ y $x = 3$.

Respuesta: La solución común que tienen las ecuaciones ① y ② es $x = 1$, $y = 2$.

Ejercicio 2.3 Empleando tablas de valores, encuentre la solución del siguiente sistema probando simultáneamente en cada ecuación con los valores 0, 1, 2 y 3 para la variable x.

$$\begin{cases} x + y = 1 & ① \\ 3x + y = 5 & ② \end{cases}$$

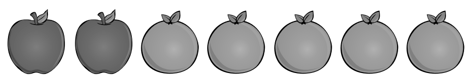
Sección 2: *Método de eliminación para resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables*

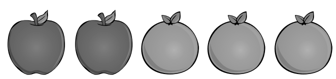
Introducción al método de eliminación

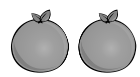
Ejemplo 2.6

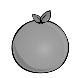
2 manzanas y 5 naranjas cuestan 40 lempiras.
2 manzanas y 3 naranjas cuestan 32 lempiras.
¿Cuál es el precio de cada manzana y de cada naranja?

Solución:

 $= 40$ (1)

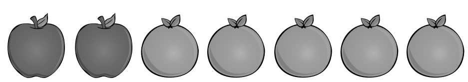
 $= 32$ (2)

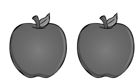
Entonces, dos naranjas cuestan  $= 8$ (3)

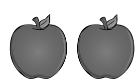
Luego:  $= 4$ (4)

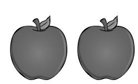
Se concluye que una naranja vale 4 lempiras.

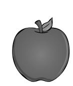
Luego, si 2 manzanas y 5 naranjas cuestan 40 lempiras
y cada naranja vale 4 lempiras, entonces:

 $= 40$

 $+ 5 \times 4 = 40$ (5)

 $+ 20 = 40$ (6)

 $= 20$ (7)

 $= 10$ (8)

Se concluye que una manzana vale 10 lempiras.

Respuesta: El precio de cada manzana es de 10 lempiras.
El precio de cada naranja es de 4 lempiras.

Ejemplo 2.7

Traduzca a lenguaje algebraico cada expresión del Ejemplo 2.6 donde:

x: precio de una manzana

y: precio de una naranja

Solución:

2 manzanas y 5 naranjas cuestan 40 lempiras
2 manzanas y 3 naranjas cuestan 32 lempiras

$$\begin{cases} 2x + 5y = 40 & (1) \\ 2x + 3y = 32 & (2) \end{cases}$$

$$2y = 8 \quad (3)$$

$$y = 4 \quad (4)$$

$$2x + 5 \times 4 = 40 \quad (5)$$

$$2x + 20 = 40 \quad (6)$$

$$2x = 20 \quad (7)$$

$$x = 10 \quad (8)$$

A la ecuación (1) se le resta la ecuación (2)

Sustituyendo el valor obtenido de y se obtiene una ecuación de primer grado en una variable.

Respuesta: La solución del sistema es $x = 10$, $y = 4$.

En un sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables, al eliminar una variable de una de las ecuaciones, esta se convierte en una ecuación de primer grado en una variable, la cual ya se sabe como resolver.

Al proceso de resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables eliminando una de las variables se le conoce como **método de eliminación**.

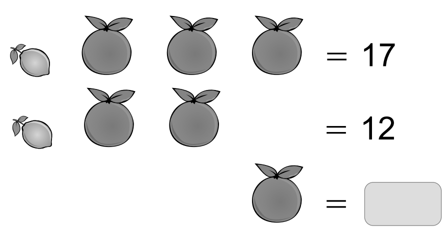
Al método de eliminación también se le conoce como método de reducción por suma o resta.

Ejercicio 2.4

Un limón y tres toronjas cuestan 17 lempiras.
Un limón y dos toronjas cuestan 12 lempiras.

a) Encuentre el precio de cada limón y de cada toronja, utilice la **pista 1**.

Pista 1



b) Traduzca a lenguaje algebraico cada ecuación del inciso a) según la **pista 2**.

Pista 2 x: precio de un limón

y: precio de una toronja

Método de eliminación cuando los coeficientes de x o de y son opuestos

De aquí en adelante, se aprenderá como resolver diferentes tipos de sistemas de ecuaciones, usando el método de eliminación y empleando la suma para eliminar una variable.

Ejemplo 2.8

Resuelva el siguiente sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 17 & ① \\ 2x - 3y = -5 & ② \end{cases}$$

Solución:

En este caso se observa que los coeficientes de la variable y tienen el mismo valor absoluto y diferente signo: $+3$ y -3. Al sumar $+3y$ y $-3y$ el resultado es 0, y se elimina la variable y.

$$\begin{array}{rl} 4x + \cancel{3y} &= 17 \\ +)\ 2x - \cancel{3y} &= -5 \\ \hline 6x \qquad &= 12 \\ x &= 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} A &= B \\ +)\ C &= D \\ \hline A + C &= B + D \end{array}$$

Una vez encontrado el valor de una variable, este puede utilizarse para encontrar el valor de la otra.

En la ecuación ① sustituya $x = 2$.

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 17 \quad ① \\ 4(2) + 3y &= 17 \qquad \text{... cuando } x = 2 \\ 8 + 3y &= 17 \\ 3y &= 17 - 8 \\ 3y &= 9 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

También se puede tomar la ecuación ② para encontrar el valor de y, sustituyendo $x = 2$.

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -5 \quad ② \\ 2(2) - 3y &= -5 \qquad \text{... cuando } x = 2 \\ 4 - 3y &= -5 \\ -3y &= -5 - 4 \\ -3y &= -9 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Se obtiene el mismo valor para y.

Respuesta: La solución del sistema es $x = 2$, $y = 3$.

Ejercicio 2.5 Resuelva usando el método de eliminación.

a) $\begin{cases} 2x + y = 14 \\ x - y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 5x - y = 14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x + 3y = 8 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 5y = 26 \\ -3x + 2y = 2 \end{cases}$

Método de eliminación cuando los coeficientes de x o de y son iguales

Ejemplo 2.9

Resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 4y = 4 & ① \\ x - y = -6 & ② \end{cases}$$

Solución

Ahora se presenta el caso donde los coeficientes de una de las variables son iguales, esta variable es la x. Al sumar $x + x$ no se elimina dicha variable, pero sí al sumar $x + (-x)$.

Para esto, la ecuación ② se multiplica por −1 para que el coeficiente de la variable x sea opuesto al coeficiente de x de la ecuación ①, y así poder eliminarla sumando la ecuación ②' con la ecuación ① .

②' se lee "2 prima".

$$-1(x - y = -6)$$
$$\downarrow$$
$$-x + y = 6 \quad ②'$$

Esta expresión significa que se multiplica −1 tanto al lado izquierdo de la igualdad, como al lado derecho.

$$-1(x - y = -6)$$

Se multiplica el lado izquierdo de la igualdad por −1
$-1(x - y) = -x + y$

Se multiplica el lado derecho de la igualdad por −1
$-1(-6) = 6$

También se puede tomar la ecuación ① y multiplicarla por −1.

Luego se suma la ecuación ① con la ecuación ②'.

$$\begin{array}{rl} \cancel{x} + 4y = 4 & ① \\ +)\ -\cancel{x} + \quad y = 6 & ②' \\ \hline 5y = 10 & \\ y = 2 & \end{array}$$

La simbología +) significa que las ecuaciones se están sumando. Recuerde que se suman los términos semejantes.

Sustituya $y = 2$ en ① para encontrar el valor de x.

$$\begin{aligned} x + 4y &= 4 \\ x + 4(2) &= 4 \quad \text{... cuando } y = 2 \\ x + 8 &= 4 \\ x &= 4 - 8 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Se puede sustituir el valor encontrado de y en cualquiera de las dos ecuaciones.

Respuesta: La solución del sistema es $x = -4$, $y = 2$.

Ejercicio 2.6 Resuelva usando el método de eliminación.

a) $\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = -12 \\ x - y = 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -3x + 2y = -7 \\ 10x + 2y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 7x - 2y = 10 \\ 2x - 2y = 20 \end{cases}$

Método de eliminación igualando coeficientes de x o de y

Hay sistemas donde una de las ecuaciones se debe multiplicar por un número entero (negativo o positivo) diferente de 1 para poder eliminar una de las variables, tal como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.10

Resuelva: $\begin{cases} 3x + 5y = 7 & ① \\ 2x - y = -4 & ② \end{cases}$

Solución:

Puesto que no se puede eliminar directamente la variable x, ni tampoco la variable y, se debe multiplicar una de las ecuaciones por un número entero diferente de 1 para eliminar una de las variables.

Convenientemente se multiplica la ecuación ② por 5 positivo, aprovechando el hecho de que el coeficiente de la variable y en la ecuación ② es -1, de esta forma $+5$ y -5 son opuestos y al sumarse $+5y$ y $-5y$ se eliminarían.

$$5(2x - y = -4)$$
$$10x - 5y = -20 \quad ②'$$

Luego se suma la ecuación ① con la ecuación ②' resultante.

$$\begin{array}{rrcl} & 3x + \cancel{5y} & = & 7 \quad ① \\ +) & 10x - \cancel{5y} & = & -20 \quad ②' \\ \hline & 13x & = & -13 \\ & x & = & -1 \end{array}$$

Sustituya $x = -1$ en ① para encontrar el valor de la variable y.

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 7 \\ 3(-1) + 5y &= 7 \qquad \text{... cuando } x \text{ es } = -1 \\ -3 + 5y &= 7 \\ 5y &= 10 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Respuesta: La solución del sistema es $x = -1$, $y = 2$.

Ejercicio 2.7 Resuelva usando el método de eliminación.

a) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 5x + 2y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 5y = 17 \\ 2x - y = -6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 5y = -10 \\ 2x - 4y = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x - 2y = 14 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$

Método de eliminación

En el Ejemplo 2.10, fue suficiente multiplicar una de las ecuaciones por un número entero diferente a 1 para poder eliminar una de las variables. Sin embargo, en otros sistemas, uno de los valores absolutos de los coeficientes de la variable x o de la variable y no son múltiplos o divisores de otro y es necesario buscar la forma de que ambos tengan el mismo valor absoluto y diferente signo.

Ejemplo 2.11

Resuelva: $\begin{cases} 3x + 7y = -5 & ① \\ -5x + 2y = -19 & ② \end{cases}$

Solución:

Se elige eliminar la variable x, ya que aunque sus coeficientes tienen distinto valor absoluto, sí tienen signos opuestos, y al buscar eliminarla, la multiplicación se haría por números enteros positivos.

La ecuación ① se multiplica por 5 y la ecuación ② por 3.

$$5(3x + 7y = -5) \qquad\qquad 3(-5x + 2y = -19)$$

$$15x + 35y = -25 \quad ①' \qquad\qquad -15x + 6y = -57 \quad ②'$$

Luego se suman las ecuaciones resultantes ①' y ②'

$$\begin{array}{rl} \cancel{15x} + 35y = -25 & ①' \\ +)\ \cancel{-15x} + \ 6y = -57 & ②' \\ \hline 41y = -82 & \\ y = -2 & \end{array}$$

Los coeficientes de la variable x quedan con signos opuestos y con el mismo valor absoluto: 15 y − 15.

Sustituya $y = -2$ en ①

$$\begin{aligned} 3x + 7y &= -5 \\ 3x + 7(-2) &= -5 \qquad \text{... cuando } y = -2 \\ 3x - 14 &= -5 \\ 3x &= -5 + 14 \\ 3x &= 9 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Respuesta: La solución del sistema es $x = 3$, $y = -2$.

Ejercicio 2.8 Resuelva usando el método de eliminación.

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x - 2y = -8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -3x + 7y = -13 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 4y = 18 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ -3x + 5y = 7 \end{cases}$

Método de eliminación

A diferencia del **Ejemplo 2.11**, además de que los coeficientes de ambas variables no tienen los mismos valores absolutos, tampoco tienen signos opuestos, por lo que es necesario que los números enteros por los cuales se multipliquen tengan signos contrarios.

Ejemplo 2.12

Resuelva: $\begin{cases} 9x - 2y = 11 & ① \\ 4x - 5y = 9 & ② \end{cases}$

Solución:

Por tener coeficientes con valores pequeños, se eliminará la variable y y uno de los números que multiplicará a las ecuaciones será negativo.

Para eliminar la variable y, se multiplica la ecuación ① por 5 y la ecuación ② por -2.

$$5(9x - 2y = 11) \qquad\qquad -2(4x - 5y = 9)$$

$$45x - 10y = 55 \quad ①' \qquad\qquad -8x + 10y = -18 \quad ②'$$

Luego se suman las ecuaciones resultantes ①' y ②'

$$\begin{array}{rrcl} & 45x - \cancel{10y} & = & 55 \\ +) & -8x + \cancel{10y} & = & -18 \\ \hline & 37x & = & 37 \\ & x & = & 1 \end{array}$$

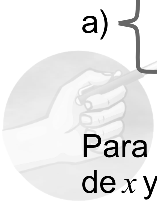
Sustituya $x = 1$ en ②

$$\begin{aligned} 4x - 5y &= 9 \\ 4(1) - 5y &= 9 \qquad \text{... cuando } y = -2 \\ 4 - 5y &= 9 \\ -5y &= 9 - 4 \\ -5y &= 5 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Respuesta: La solución del sistema es $x = 1$, $y = -1$.

Ejercicio 2.9 Resuelva usando el método de eliminación. Elimine la variable $\boldsymbol{y}$.

a) $\begin{cases} 5x + 3y = -7 \\ 7x + 4y = -8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 2y = 17 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$



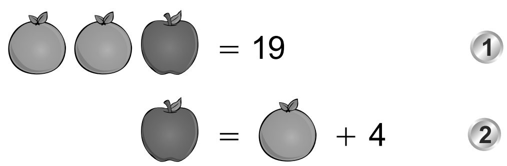
Para todos los sistemas resueltos anteriormente, es buena idea sustituir ambos valores de x y y en cada una de las ecuaciones del sistema original para comprobar que el cálculo es correcto.

Método de sustitución sin coeficiente en la variable a sustituir

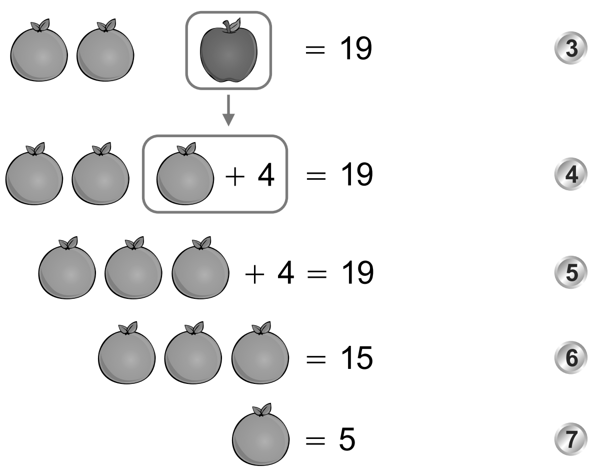
Ejemplo 2.13

En un supermercado: 2 naranjas y 1 manzana valen 19 lempiras y 1 manzana es 4 lempiras más cara que 1 naranja. ¿Cuál es el precio de cada manzana y de cada naranja?

Solución:

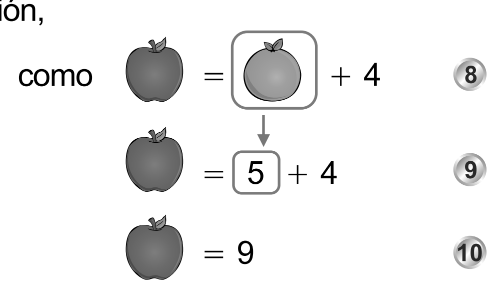


Sustituya el valor de la manzana en la primera ecuación.



Luego, una naranja vale 5 lempiras.

De la segunda ecuación,



Respuesta: Una manzana vale 9 lempiras.
Una naranja vale 5 lempiras.

Ejemplo 2.14

Traduzca a lenguaje algebraico el Ejemplo 2.13 y resuelva el sistema.

Solución:

Traducido a lenguaje algebraico, el sistema del Ejemplo 2.13 se expresaría como:

x: precio de una naranja

y: precio de una manzana

$$\begin{cases} 2x + y = 19 & (1) \\ y = x + 4 & (2) \end{cases}$$

(1)
(2)

Sustituya $y = x + 4$ en la ecuación (1).

$$2x + \boxed{y} = 19 \quad (3)$$

$$2x + \boxed{x + 4} = 19 \quad (4)$$

$$3x + 4 = 19 \quad (5)$$

$$3x = 15 \quad (6)$$

$$x = 5 \quad (7)$$

$3x + 4 = 19$ es la nueva ecuación con solo una variable.

Para encontrar el valor de y sustituya $x = 5$ en la ecuación (2).

$$y = \boxed{x} + 4 \quad (8)$$

$$= \boxed{5} + 4 \quad (9)$$ ... cuando $x = 5$

$$= 9 \quad (10)$$

Respuesta: La solución del sistema es $x = 5$, $y = 9$.

El **método de sustitución** consiste en sustituir el valor de la variable despejada en la otra ecuación, para que en la nueva ecuación solo haya una variable.

Ejercicio 2.10 Resuelva usando el método de sustitución.

a) $\begin{cases} x + y = -8 \\ y = 3x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 7 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$

Método de sustitución con coeficiente en la variable a sustituir

Ejemplo 2.15

Resuelva: $\begin{cases} -5x + y = 9 & ① \\ x = 3y + 1 & ② \end{cases}$

Solución

Paso 1: Sustituya $x = 3y + 1$ en ①

$$\begin{aligned} -5x + y &= 9 \\ -5(3y + 1) + y &= 9 \\ -15y - 5 + y &= 9 \\ -14y &= 9 + 5 \\ -14y &= 14 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Observe que hay un coeficiente en la variable a sustituir, en este caso −5. Se aplica la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned} -5(3y + 1) &= -5 \times 3y + (-5) \times 1 \\ &= -15y - 5 \end{aligned}$$

Paso 2: Use la ecuación ② y el valor de $y = -1$ para obtener el valor de x.

$$\begin{aligned} x &= 3y + 1 \\ &= 3(-1) + 1 \qquad \text{... cuando } y = -1 \\ &= -3 + 1 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Respuesta: La solución del sistema es $x = -2$, $y = -1$.

Ejercicio 2.11 Resuelva usando el método de sustitución, observe que la variable a sustituir tiene coeficiente.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x = 3y - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ x = -2y - 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ x - 2y = 12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = x - 2 \\ 3x + 2y = 16 \end{cases}$

Nota: De ahora en adelante puede utilizar cualquier método: sustitución o eliminación.

Eliminación de paréntesis en una ecuación

Ejemplo 2.16 Resuelva: $\begin{cases} 4x + 7y = 39 & ① \\ 2(x + y) = -3y + 15 & ② \end{cases}$

Solución:
En este caso elimine el paréntesis aplicando la propiedad distributiva y simplifique.

Paso 1: La ecuación ② se puede expresar como:

$$\begin{aligned} 2(x + y) &= -3y + 15 \\ 2x + 2y &= -3y + 15 \\ 2x + 2y + 3y &= 15 \\ 2x + 5y &= 15 \quad ②' \end{aligned}$$

Paso 2: El sistema queda de la siguiente manera: $\begin{cases} 4x + 7y = 39 & ① \\ 2x + 5y = 15 & ②' \end{cases}$

Siguiendo el procedimiento la ecuación ②' se multiplica por -2.

$$\begin{aligned} -2(2x + 5y &= 15) \\ -4x - 10y &= -30 \quad ②'' \end{aligned}$$

②'' se lee "2 biprima".

Luego, se suma la ecuación ① con la ecuación ②'' resultante.

$$\begin{array}{rl} \cancel{4}x + 7y = 39 & ① \\ +)\ -\cancel{4}x - 10y = -30 & ②'' \\ \hline -3y = 9 & \\ y = -3 & \end{array}$$

Sustituya $y = -3$ en ①.

$$\begin{aligned} 4x + 7y &= 39 \\ 4x + 7(-3) &= 39 \quad \text{... cuando } y = -3 \\ 4x - 21 &= 39 \\ 4x &= 60 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Respuesta: La solución del sistema es $x = 15$, $y = -3$.

Pasos para resolver sistemas con paréntesis en una o más ecuaciones

1. Se eliminan los paréntesis usando la propiedad distributiva.
2. Se reducen términos semejantes.
3. Se reescriben las ecuaciones de manera que el sistema pueda resolverse por los métodos de eliminación o sustitución.

Ejercicio 2.12 Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones eliminando paréntesis.

a) $\begin{cases} 3(x + y) = 2x - 1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + y = 10 \\ 5x - 2(3x - y) = -7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 3x - 4(x + y) = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3(x + y) = 2x - 1 \\ x + y = -5 \end{cases}$

Eliminación de paréntesis en ambas ecuaciones

Ejemplo 2.17

Resuelva: $\begin{cases} 2x - (x + 7y) = 13 & ① \\ 2(x + 3y) - 5y = -4 & ② \end{cases}$

Solución:

Paso 1

La ecuación ① se puede expresar como:

$$2x - (x + 7y) = 13$$
$$2x - x - 7y = 13$$
$$x - 7y = 13 \quad ①'$$

Paso 2

La ecuación ② se puede expresar como:

$$2(x + 3y) - 5y = -4$$
$$2x + 6y - 5y = -4$$
$$2x + y = -4 \quad ②'$$

Paso 3

El sistema es equivalente a: $\begin{cases} x - 7y = 13 & ①' \\ 2x + y = -4 & ②' \end{cases}$

La ecuación ②' se multiplica por 7 para poder eliminar la variable y.

$$7(2x + y = -4)$$
$$14x + 7y = -28 \quad ②''$$

Luego se suma la ecuación ①' y la ecuación ②'' resultante.

$$\begin{array}{rl} x - \cancel{7y} = 13 & ①' \\ +)\ 14x + \cancel{7y} = -28 & ②'' \\ \hline 15x \quad = -15 & \\ x = -1 & \end{array}$$

Sustituya $x = -1$ en ②'

$$2x + y = -4$$
$$2(-1) + y = -4 \quad \text{... cuando } x = -1$$
$$-2 + y = -4$$
$$y = -2$$

Respuesta: La solución del sistema es $x = -1$, $y = -2$.

Ejercicio 2.13 Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 3(x - 2) - 2y = 7 \\ 2x - 4(y - 3) = 18 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5(x - 2) - 3y = 1 \\ 4x - 5(y + 1) = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2(y - 6) + x = -4 \\ 3(5y - 4) + 4x = 41 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2(x + y) - 3y = -1 \\ 4(x - y) + 3y = -3 \end{cases}$

Conversión de coeficientes fraccionarios a números enteros

En los sistemas de ecuaciones de primer grado en dos variables, se presentan casos donde los coeficientes de las variables son números fraccionarios, para resolver el sistema se convierten los coeficientes fraccionarios a números enteros.

***Ejemplo* 2.18** Resuelva: $\begin{cases} x + y = 25 & ① \\ \frac{1}{4}x + y = 10 & ② \end{cases}$

Solución:

Convierta el coeficiente fraccionario $\frac{1}{4}$ a un número entero multiplicando la ecuación ② por 4.

$$4\left(\frac{1}{4}x + y = 10\right)$$
$$x + 4y = 40 \quad ②'$$

$\frac{1}{4} \times \boxed{4} = 1$

$\frac{1}{a} \times \boxed{a} = 1,\ a \neq 0$

El sistema queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x + y = 25 & ① \\ x + 4y = 40 & ②' \end{cases}$$

Se multiplica la ecuación ① por -1

$$-1(x + y = 25)$$
$$-x - y = -25 \quad ①'$$

También se puede multiplicar la ecuación ② por -1.

Luego se suman las ecuaciones ①' y ②' resultantes.

$$\begin{array}{rl} -\cancel{x} - y = -25 & ①' \\ +)\ \cancel{x} + 4y = 40 & ②' \\ \hline 3y = 15 & \\ y = 5 & \end{array}$$

Sustituya $y = 5$ en ① para encontrar el valor de la variable x.

$$x + y = 25$$
$$x + 5 = 25 \quad \text{... cuando } y = 5$$
$$x = 20$$

Respuesta: La solución del sistema es $x = 20$, $y = 5$.

Para convertir los coeficientes fraccionarios a números enteros, se multiplica cada miembro de la ecuación por el número que convierte la fracción a número entero, para luego resolver el sistema resultante.

***Ejercicio* 2.14** Resuelva los siguientes sistemas convirtiendo los coeficientes fraccionarios a números enteros.

a) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + 2y = 5 \\ x - 3y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = 1 \\ x - 5y = 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y = -4 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = -5 \end{cases}$

Conversión de coeficientes decimales a números enteros

En los sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables, también se presentan casos donde los coeficientes de las variables son números decimales, para resolver el sistema se convierten los coeficientes decimales a números enteros.

Ejemplo 2.19 Resuelva: $\begin{cases} 0.5x + y = 5 & ① \\ x + y = 8 & ② \end{cases}$

Solución:

Convierta el coeficiente decimal a número entero, multiplicando la ecuación ① por 10.

$$10(0.5x + y = 5)$$
$$5x + 10y = 50 \quad ①'$$

$0.5 \times 10 = 5$

Se mueve el punto decimal un lugar a la derecha.

El sistema queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 5x + 10y = 50 & ①' \\ x + y = 8 & ② \end{cases}$$

Se multiplica la ecuación ② por −5

$$-5(x + y = 8)$$
$$-5x - 5y = -40 \quad ②'$$

Luego se suman las ecuaciones resultantes ①' y ②'

$$\begin{array}{rrcl} & \cancel{5x} + 10y & = & 50 \quad ①' \\ +) & -\cancel{5x} - 5y & = & -40 \quad ②' \\ \hline & 5y & = & 10 \\ & y & = & 2 \end{array}$$

Sustituya $y = 2$ en ② para encontrar el valor de x.

$$x + y = 8$$
$$x + 2 = 8 \quad \text{... cuando } y = 2$$
$$x = 6$$

Respuesta: La solución del sistema es $x = 6$, $y = 2$.

Para convertir los coeficientes decimales a números enteros, se multiplica por la unidad seguida de ceros según las cifras decimales que tenga el número.

Ejercicio 2.15 Resuelva los siguientes sistemas convirtiendo los coeficientes decimales a números enteros.

a) $\begin{cases} 0.3x + 0.4y = 0.5 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ 0.2x - 0.5y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 0.2x + 0.3y = -0.2 \\ 5x + 2y = 17 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 0.4x - 0.1y = 1.3 \\ 12x + y = 3 \end{cases}$

Lección 3: Aplicación de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Sección 1: Situaciones que involucran dinero

Ejemplo 3.1

En una tienda de ropa donde todo estaba en promoción, Mónica compró 2 pantalones y 3 blusas por 350 lempiras, mientras que Emilia por 2 pantalones y 5 blusas pagó 450 lempiras. ¿Cuál era el precio de cada prenda?

Solución:

1) Mónica compró 2 pantalones y 3 blusas por 350 lempiras.
   Emilia compró 2 pantalones y 5 blusas por 450 lempiras.

2) x: precio de un pantalón
   y: precio de una blusa

3) Sistema:
$$\begin{cases} 2x + 3y = 350 & ① \\ 2x + 5y = 450 & ② \end{cases}$$

Resuelva usando el método de eliminación tal como se estudió en el Ejemplo 2.9.

La ecuación ② se multiplica por −1

$$-1(2x + 5y = 450)$$
$$-2x - 5y = -450 \quad ②'$$

Se suma la ecuación ① y la ecuación ②' resultante.

$$\begin{array}{rr} & \cancel{2x} + 3y = 350 \\ +) & \cancel{-2x} - 5y = -450 \\ \hline & -2y = -100 \\ & y = 50 \end{array}$$

Sustituya $y = 50$ en ①

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 350 \\ 2x + 3(50) &= 350 \quad \text{... cuando } y = 50 \\ 2x + 150 &= 350 \\ 2x &= 200 \\ x &= 100 \end{aligned}$$

Respuesta: El precio de un pantalón era de 100 lempiras.
El precio de una blusa era de 50 lempiras.

Ejercicio 3.1 Un grupo de amigos pagó 120 lempiras por 4 empanadas y 6 refrescos. El día anterior habían cancelado 150 lempiras por 4 empanadas y 9 refrescos. ¿Cuál es el precio de cada refresco?

Ejemplo 3.2

Josué se compró 3 CDs y 5 DVDs gastando 105 lempiras, mientras Roxana gastó 80 lempiras por la compra de 2 CDs y 4 DVDs. ¿Cuál era el precio de un CD y cuál el de un DVD?

Solución

1) Josué compró 3CDs y 5 DVDs por 105 lempiras.
   Roxana compró 2CDs y 4 DVDs por 80 lempiras.

2) x: precio de un CD
   y: precio de un DVD

3) Sistema: $\begin{cases} 3x + 5y = 105 & ① \\ 2x + 4y = 80 & ② \end{cases}$

Resuelva usando el método de eliminación:

La ecuación ① se multiplica por -2

$$-2(3x + 5y = 105)$$
$$-6x - 10y = -210 \quad ①'$$

La ecuación ② se multiplica por 3

$$3(2x + 4y = 80)$$
$$6x + 12y = 240 \quad ②'$$

Luego se suman las ecuaciones resultantes ①' y ②'.

$$\begin{array}{rl} -\cancel{6}x - 10y = -210 & ①' \\ +)\ \cancel{6}x + 12y = 240 & ②' \\ \hline 2y = 30 & \\ y = 15 & \end{array}$$

Sustituya $y = 15$ en ①

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 105 \\ 3x + 5\,(15) &= 105 \quad \text{... cuando } y = 15 \\ 3x + 75 &= 105 \\ 3x &= 105 - 75 \\ 3x &= 30 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Respuesta: El precio de un CD era de 10 lempiras.
El precio de un DVD era de 15 lempiras.

Ejercicio 3.2 En la tienda estudiantil, Marcos con 32 lempiras compró 4 lápices y 2 cuadernos y Fernando con 39 lempiras compró 3 lápices y 3 cuadernos. ¿Cuánto vale cada lápiz? y ¿Cuánto vale cada cuaderno?

Sección 2: Situaciones que involucran distancia y tiempo

Ejemplo 3.3

Un auto se tarda 12 horas cuando se traslada del punto A al punto B que dista 750 km. En carretera pavimentada corre a 80 km por hora y en carretera de tierra a 50 km por hora. ¿Cuánto tiempo recorre el auto en carretera pavimentada y cuánto tiempo en carretera de tierra?

Solución:

x: tiempo en carretera pavimentada

y: tiempo en carretera de tierra

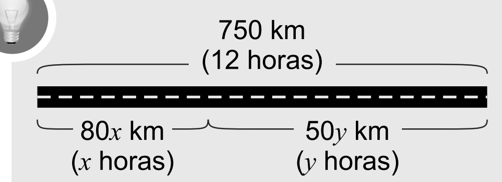
1) Como el viaje tarda 12 horas.

$$x + y = 12$$

distancia recorrida = velocidad × tiempo

2) Se recorren 750 km en total, de los cuales x horas se recorren a 80 km por hora y y horas se recorren a 50 km por hora, se forma la ecuación:

$$80x + 50y = 750$$



3) Sistema:

$$\begin{cases} x + y = 12 & ① \\ 80x + 50y = 750 & ② \end{cases}$$

Este sistema se puede resolver por el método de eliminación.

La ecuación ① se multiplica por −50

$$-50(x + y = 12)$$

$$-50x - 50y = -600 \quad ①'$$

Luego se suman la ecuación ①' resultante y la ecuación ②.

$$\begin{array}{rl} -50x - \cancel{50}y = -600 & ①' \\ +)\ 80x + \cancel{50}y = 750 & ② \\ \hline 30x \qquad = 150 & \\ x = 5 & \end{array}$$

Sustituya $x = 5$ en ①

$$x + y = 12$$

$$5 + y = 12 \quad \text{... cuando } x = 5$$

$$y = 7$$

Respuesta: El auto recorre 5 horas en carretera pavimentada y 7 horas en carretera de tierra.

Ejercicio 3.3

Un bote para ir del punto A al punto B que dista 110 km se tarda 4 horas. En agua tranquila viaja a 25 km por hora y corriente abajo viaja a 30 km por hora. ¿Cuánto tiempo navega el bote en agua tranquila y cuánto tiempo corriente abajo?

Ejercicios

1 Despeje para la variable que se expresa entre corchetes.

a) $a = 2 + 3b \quad [b]$ b) $6m - 7n = 11 \quad [n]$ c) $d = 1 + 2r \quad [r]$

2 Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método de eliminación.

a) $\begin{cases} 9x - 10y = -9 \\ 5x + 10y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -4x - 3y = -11 \\ -5x + 3y = -61 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -7x - 4y = 1 \\ 7x - 2y = 53 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ -x - 2y = -10 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ -x + y = -1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 5x - y = 13 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 5x - 2y = 3 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x - 8y = -25 \\ 3x + 4y = 9 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x + 7y = 17 \\ 5x + 4y = 2 \end{cases}$ k) $\begin{cases} 5x + 2y = 11 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$ l) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

3 Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método de sustitución.

a) $\begin{cases} 3x + y = 16 \\ y = 5x \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = y + 1 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = x - 3 \\ 5x + y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x - 2y = 13 \\ x = -3y + 6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = 5y + 8 \\ -7x + 8y = 25 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$

4 Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 2x - 5y = 20 \\ -3(x - y) + y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2(x - 3) + y = 4 \\ x + 4y = -9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x + y = -6 \\ 2x - 3(x - y) = -5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3(x + 2) = 2y \\ 2(y + 5) = 7x \end{cases}$ e) $\begin{cases} -2(2x - 7) = -3x + 4y \\ -(2y - 1) = -5x + 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + 5 = 2(y - 4x) \\ 10(y - x) = 11y - 12x \end{cases}$

5 Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones convirtiendo los coeficientes fraccionarios a números enteros.

a) $\begin{cases} x + y = -1 \\ \frac{1}{7}x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + \frac{1}{5}y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

6 Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones convirtiendo los coeficientes decimales a números enteros.

a) $\begin{cases} 0.3x + 0.4y = 0.5 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0.9x - 0.2y = 1.3 \\ x + y = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 1.2x - 0.7y = -1.3 \\ 4x - 5y = 9 \end{cases}$

7 Resuelva los siguientes problemas.

a) Un auto se traslada del punto A al punto B que dista 450 km y tarda 10 horas. Durante el trayecto corre a 60 km por hora en carretera pavimentada y a 30 km por hora en carretera de tierra. ¿Cuánto tiempo recorre el auto en carretera pavimentada y cuánto tiempo en carretera de tierra?

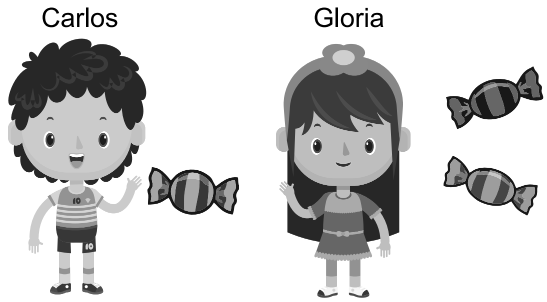
b) Raúl y Esteban fueron a una papelería a comprar un material que les encargaron para su clase de geometría. Esteban compró 4 hojas de papel milimetrado y 5 hojas de papel china y pagó 80 lempiras, mientras que Raúl pagó 39 lempiras por 3 hojas de papel milimetrado y 2 hojas de papel china. ¿Cuál era el precio de cada tipo de hoja?

c) Al cine a ver una película infantil fueron 22 personas entre adultos y niños. Para los adultos la entrada costó 40 lempiras y para los niños 20 lempiras. ¿Cuántos adultos y cuántos niños entraron, si entre todos pagaron 620 lempiras?

¿Cuántos confites tienen?

Un maestro tiene 20 confites y los reparte todos entre dos estudiantes, Gloria y Carlos. No deben sobrar confites.

El maestro no tiene un orden para repartir los confites, lo que si hace es que cada vez que le da confites a Gloria, le da 2 y dice “Si” y cada vez que le da a Carlos, le da 1 y también dice “Si”.



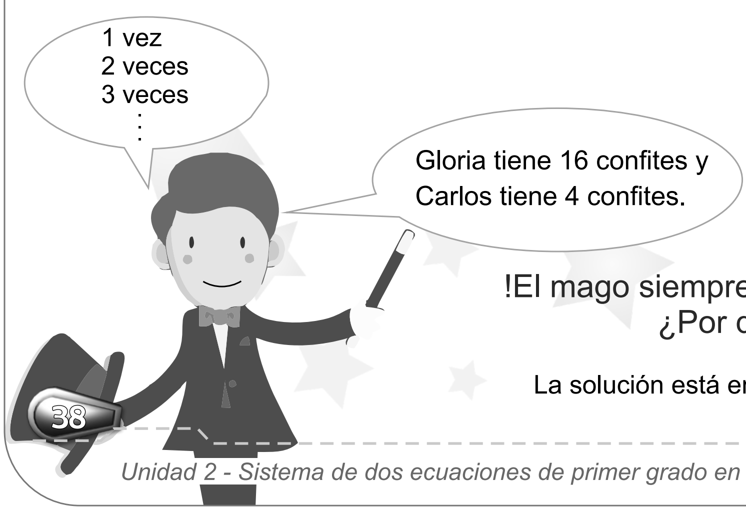
Ejemplo:
El maestro puede repartir todos los confites a Gloria (G) y a Carlos (C) en el siguiente orden.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	G →	C →	C →	G →	G →	C →	G →	G →	G →	G →	C →	G
Gloria												
Carlos												

El maestro dice “Si” cada vez. En este caso, el maestro dijo “Si” 12 veces en total para repartir los 20 confites, y le dio 16 confites a Gloria y 4 confites a Carlos.
*No hay necesidad de repartir los confites en un orden determinado entre Gloria y Carlos, como así:

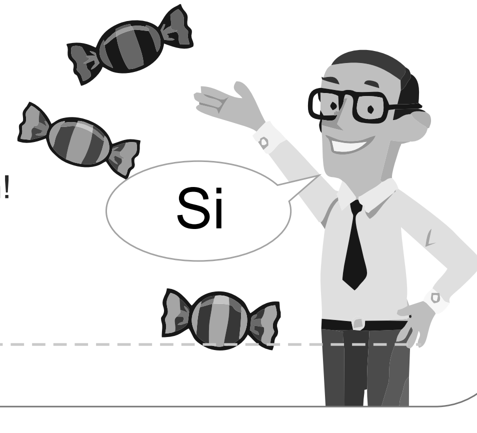
G → C → G → C → G → ...

Un mago solo escucha al maestro decir “Si” y cuenta las veces que lo dice sin mirar nada. Cuando el maestro termina de repartir, el mago siempre sabe cuántos confites tienen exactamente cada uno de los estudiantes.



!El mago siempre contesta bien!
¿Por qué?

La solución está en la página 162



Unidad 3

Paralelismo

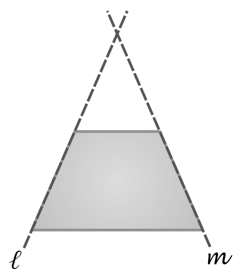
Lección 1: Paralelismo

Unidad 3 Paralelismo

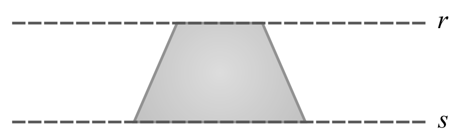
Lección 1: Paralelismo

Sección 1: *Rectas paralelas y transversales*

Observe las siguientes figuras, si se prolongan los lados de los trapecios como rectas, explique qué pasa con las rectas ℓ y m y con las rectas r y s.

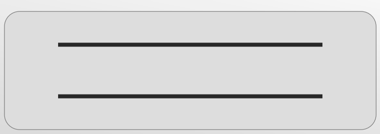


Las rectas ℓ y m se cortan en un punto.

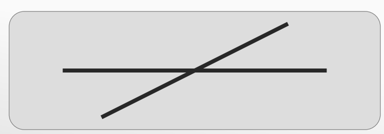


Las rectas r y s no se cortan.

Dos rectas que no se cortan son paralelas.



Dos rectas que se cortan en un punto no son paralelas.

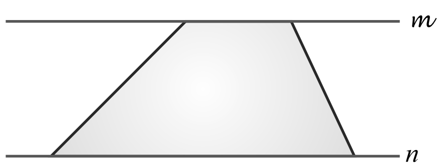


Para expresar el paralelismo se utiliza el símbolo $\parallel$. En las figuras anteriores $r \parallel s$, se lee *"r es paralela a s"* o viceversa.

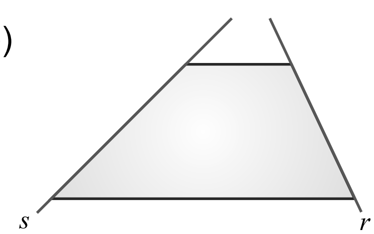
Ejemplo 1.1

En los siguientes trapecios las rectas m, n, r, y s son las prolongaciones de sus lados. Identifique cuáles rectas son paralelas.

a)



b)



Respuesta

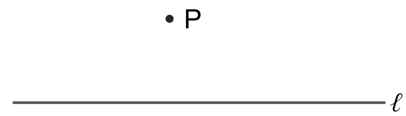
a) m es paralela a n (se escribe $m \parallel n$)

b) s no es paralela a r

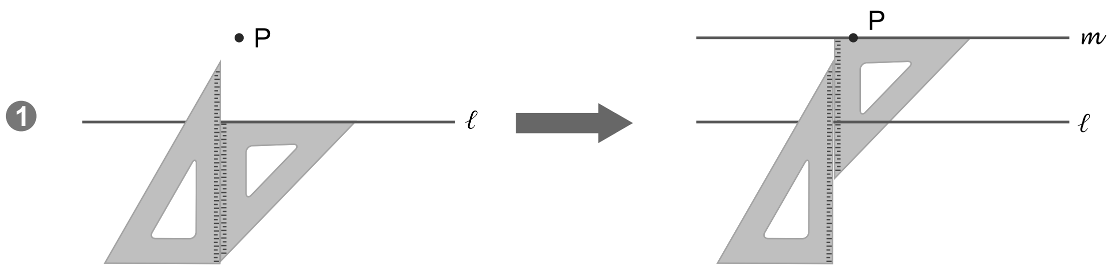
En caso de b) a veces se escribe $s \nparallel r$

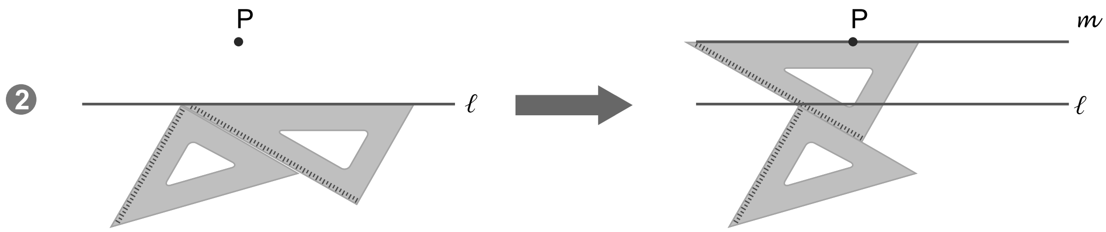
Trazar rectas paralelas que pasan por un punto exterior a una recta.

Utilizando solo escuadras, trace una recta que pase por el punto P y que sea paralela a la recta ℓ. Piense en cuántas rectas paralelas pueden pasar por el punto P.



Se explicarán dos procedimientos para trazar rectas paralelas con escuadras:



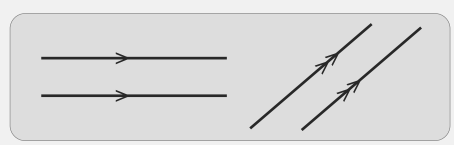


Se concluye que solo puede trazarse una única recta paralela a ℓ que pasa por el punto P.

En 3er grado se aprendió como trazar líneas paralelas usando escuadras.

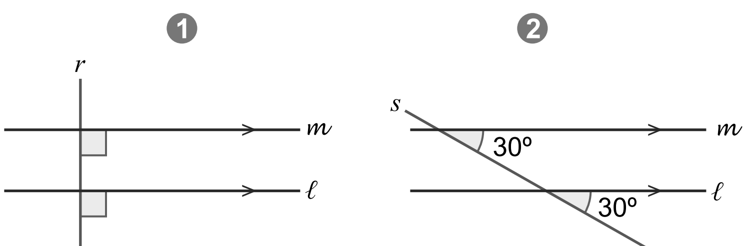
Por un punto cualquiera que no está en una recta puede trazarse una y sólo una recta paralela a la recta dada

Si dos rectas son paralelas, se marcan las rectas como se muestra en las figuras de la derecha, usando ">", ">>".



A partir del procedimiento anterior para trazar rectas paralelas usando escuadras.

Se observa que en ambos casos una recta como r o s corta las dos rectas paralelas formando ángulos de la misma medida.



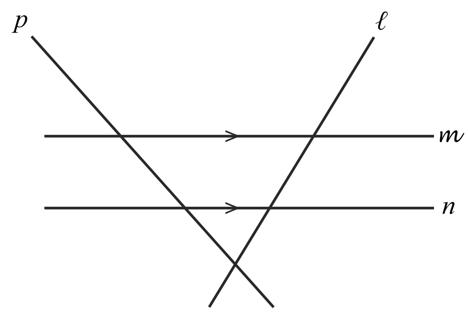
La recta que corta dos o más rectas se llama **recta transversal**. En los casos anteriores r y s son rectas transversales.

Ejemplo 1.2

En la figura de la derecha:

a) Indique qué rectas son transversales a las rectas m y n.

b) Usando el símbolo de paralelismo ($\parallel$), indique qué rectas son paralelas.



Respuesta

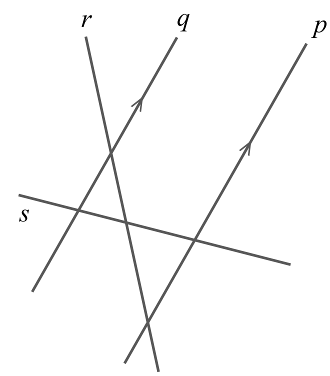
a) Las rectas ℓ y p son transversales a las rectas m y n.

b) $m \parallel n$.

Ejercicio 1.1 En la figura de la derecha:

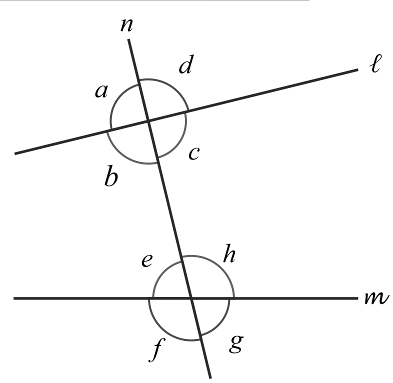
a) Indique qué rectas son transversales a las rectas p y q.

b) Usando el símbolo de paralelismo ($\parallel$), indique qué rectas son paralelas.

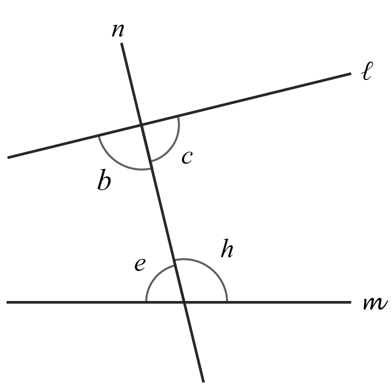


Sección 2: Ángulos formados por dos rectas y una transversal y relación entre ángulos correspondientes

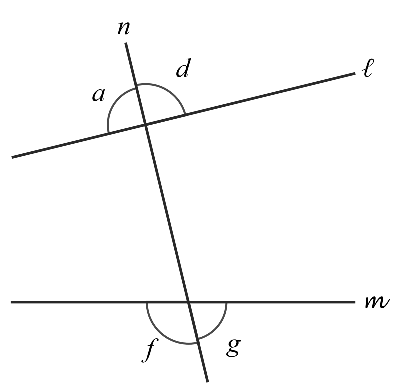
En la figura de la derecha, la recta n es transversal a las rectas ℓ y m, observe que se forman los siguientes ángulos que se nombran según su posición como:



Ángulos internos:
$\angle b$, $\angle c$, $\angle e$ y $\angle h$



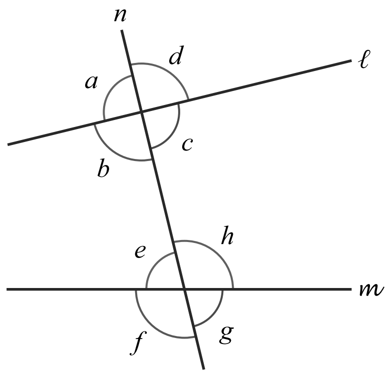
Ángulos externos:
$\angle a$, $\angle d$, $\angle f$ y $\angle g$



Relación entre los ángulos formados por dos rectas y una transversal, según su posición.

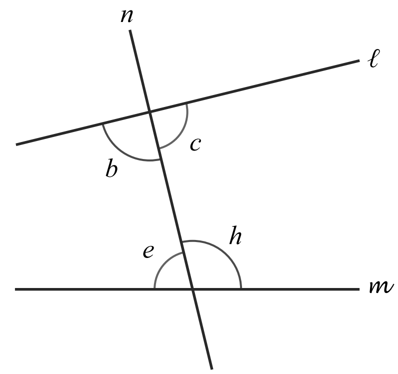
Ángulos correspondientes:

$\angle a$ y $\angle e$, $\angle b$ y $\angle f$, $\angle c$ y $\angle g$, $\angle d$ y $\angle h$



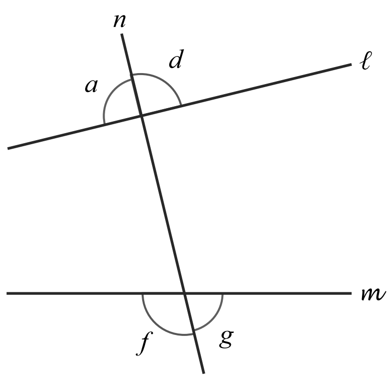
Ángulos alternos internos:

$\angle b$ y $\angle h$, $\angle c$ y $\angle e$

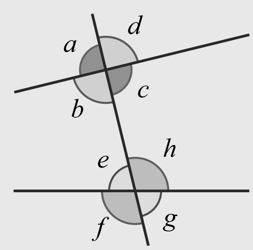


Ángulos alternos externos:

$\angle a$ y $\angle g$, $\angle d$ y $\angle f$



Los ángulos que están uno frente al otro se llaman **ángulos opuestos por el vértice**.



$\angle a$ y $\angle c$, $\angle b$ y $\angle d$, $\angle e$ y $\angle g$, $\angle f$ y $\angle h$

Ejemplo 1.3

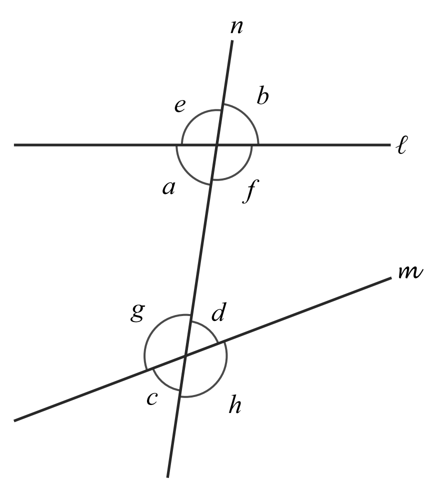
En la siguiente figura, la recta n es transversal a las rectas ℓ y m, indique:

a) El ángulo correspondiente con el $\angle h$

b) El ángulo alterno interno con el $\angle d$

c) El ángulo alterno externo con el $\angle c$

d) El ángulo opuesto por el vértice con el $\angle f$



Respuesta

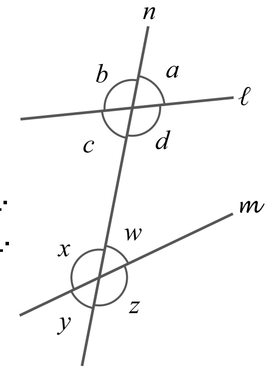
a) $\angle f$

b) $\angle a$

c) $\angle b$

d) $\angle e$

Ejercicio 1.2 Observe la siguiente figura complete los incisos.



a) Ángulos internos: ____, ____, ____, ____

b) Ángulos externos: ____, ____, ____, ____

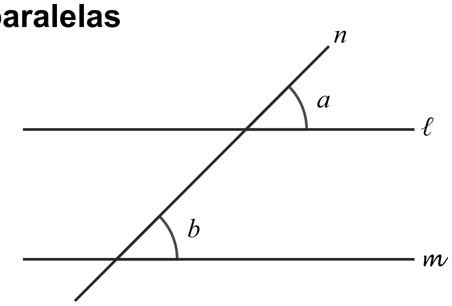
c) Dos pares de ángulos correspondientes:____ y ____,____ y ____.

d) Dos pares de ángulos alternos internos: ____ y ____,____ y ____.

e) Dos pares de ángulos opuestos por el vértice:

____ y ____,____ y ____.

Relación de ángulos correspondientes en rectas paralelas

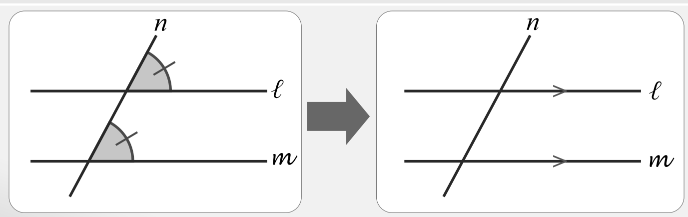


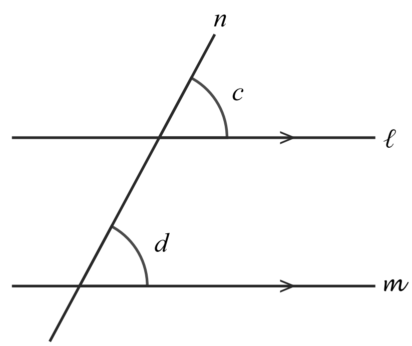
En la figura de la derecha $m\angle a = 45°$ y $m\angle b = 45°$. Observe que los ángulos son correspondientes y al compararse tienen la misma medida.

A continuación, empleando los procedimientos para trazar rectas paralelas (ver ❶ y ❷ página 41) se concluye que $\ell \parallel m$.

Como los ángulos correspondientes tienen la misma medida, se concluye que $\ell \parallel m$.
En general se puede decir lo siguiente:

Si la recta n corta a las rectas ℓ y m y los ángulos correspondientes tienen la misma medida, entonces $\ell \parallel m$.

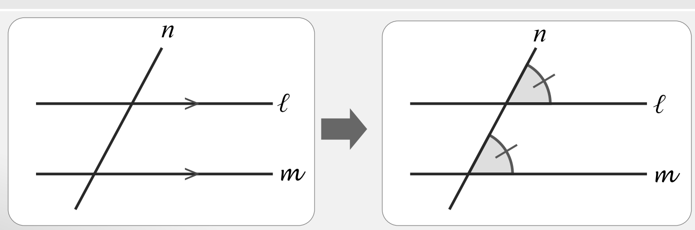




Ahora observe la figura de la derecha donde $\ell \parallel m$, mida con el transportador los ángulos correspondientes c y d. Compare sus medidas.
Se tiene que $m\angle c = m\angle d = 60°$.

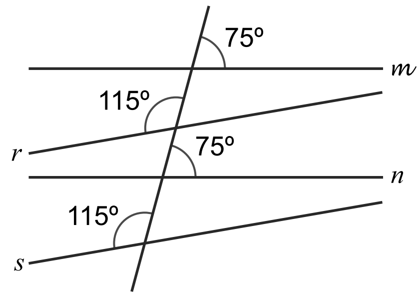
En general, se puede decir lo siguiente:

Si $\ell \parallel m$ y son cortadas por la recta n, entonces sus ángulos correspondientes tienen la misma medida.



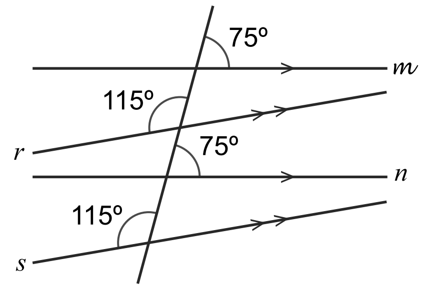
Ejemplo 1.4

Observe la figura de la derecha. Indique cuáles de las rectas son paralelas, marcando las rectas con “>”, “>>”.

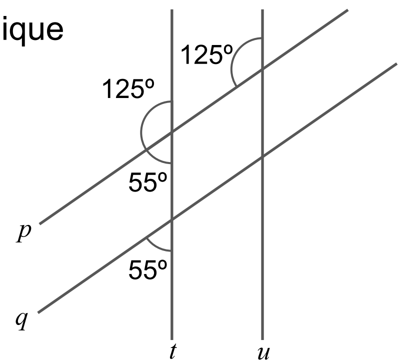


Solución:

Comparando los ángulos correspondientes, se observa que la recta m es paralela a n y r es paralela a s, se marcan las rectas como en la figura de la derecha:



Ejercicio 1.3 Observe la figura de la derecha e indique cuáles de las rectas son paralelas, marcando las rectas con “>”, “>>”.



Sección 3: *Relación de ángulos alternos internos en rectas paralelas*

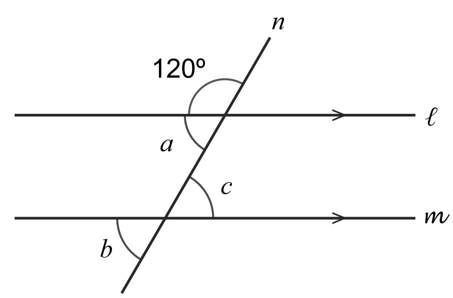
Ejemplo 1.5

En la figura de la derecha, dadas las rectas $\ell \parallel m$ y el ángulo de 120°:

a) Encuentre la medida de los ángulos:

a1) $\angle a$ a2) $\angle b$ a3) $\angle c$

b) Compare las medidas del $\angle a$ y el $\angle c$.



Solución:

a1) $m\angle a + 120° = 180°$ ... El $\angle a$ y el ángulo dado de 120° son suplementarios.

$m\angle a = 180° - 120°$

$= 60°$

a2) $m\angle b = 60°$ ... El $\angle b$ es correspondiente con el $\angle a$ en rectas paralelas.

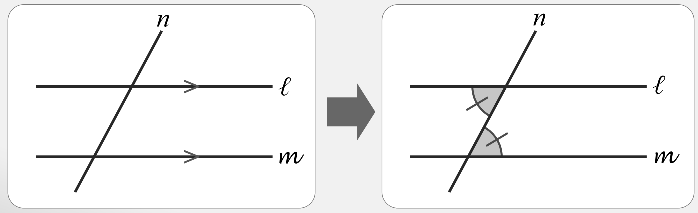
a3) $m\angle c = m\angle b$ ... El $\angle c$ es opuesto por el vértice al $\angle b$.

$= 60°$

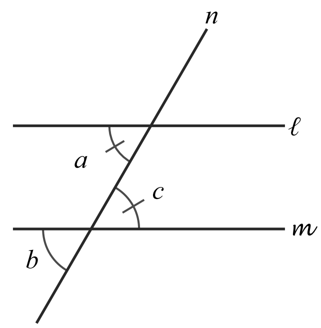
b) $m\angle a = m\angle c = 60°$

Observe que en el **Ejemplo 1.5** $\ell \parallel m$ y el $\angle a$ con el $\angle c$ son ángulos alternos internos, se concluye que $m\angle a = m\angle c$. En general, se puede decir lo siguiente:

Si $\ell \parallel m$ y son cortadas por la recta n, entonces los ángulos alternos internos tienen la misma medida.

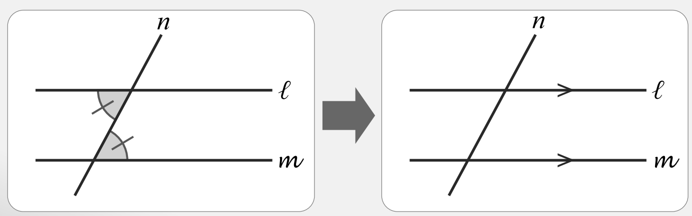


Ahora piense en lo siguiente: Si se sabe que el $\angle a$ y el $\angle c$ son ángulos alternos internos y $m\angle a = m\angle c$, ¿qué se concluye de las rectas ℓ y m?
Observe que $\angle b$ es opuesto por el vértice al $\angle c$, por lo que, $m\angle b = m\angle c$.
Se sabe que $m\angle a = m\angle c$, por lo tanto, $m\angle b = m\angle a$.
El $\angle a$ y $\angle b$ son correspondientes y tienen la misma medida entonces $\ell \parallel m$.



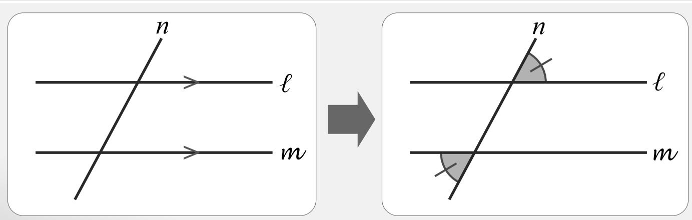
En general, se puede decir lo siguiente:

Si la recta n corta a las rectas ℓ y m y los ángulos alternos internos tienen la misma medida, entonces $\ell \parallel m$.

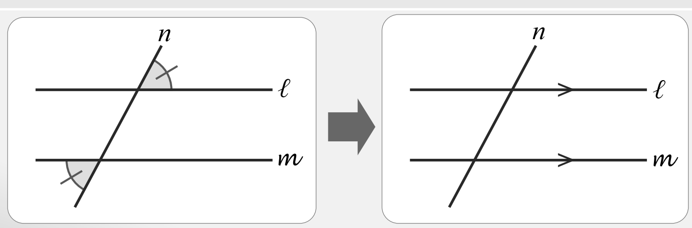


De esta manera se concluye lo mismo para los ángulos alternos externos como sigue:

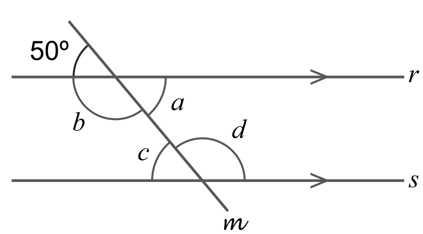
Si $\ell \parallel m$ y son cortadas por la recta n, entonces los ángulos alternos externos tienen la misma medida.



Si la recta n corta a las rectas ℓ y m y los ángulos alternos externos tienen la misma medida, entonces $\ell \parallel m$.

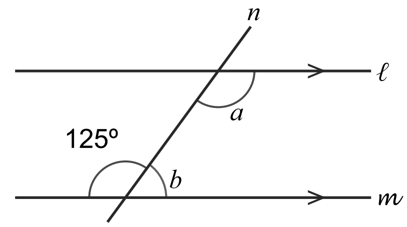


Ejercicio 1.4 En la siguiente figura dado el ángulo de 50° y $r \parallel s$. Encuentre la medida de los ángulos a, b, c y d.



Ejemplo 1.6

En la figura de la derecha dado el ángulo de 125º y sea $\ell \parallel m$. Encuentre la suma de las medidas de los ángulos a y b ($m\angle a + m\angle b = ?$).



Solución:

❶ $m\angle a = 125°$ ... El $\angle a$ y el ángulo dado de 125° son ángulos alternos internos en rectas paralelas.

❷ $125° + m\angle b = 180°$ ... El $\angle b$ y el ángulo dado son suplementarios.

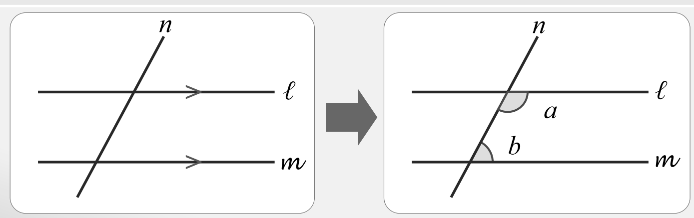
$$m\angle b = 180° - 125°$$
$$m\angle b = 55°$$

❸ $m\angle a + m\angle b = 125° + 55°$
$$= 180°$$

Observe que el $\angle a$ y el $\angle b$ están al mismo lado de la recta n, son ángulos internos y las rectas ℓ y m son paralelas. Se concluye que $m\angle a + m\angle b = 180°$. Es decir, el $\angle a$ y el $\angle b$ son ángulos suplementarios.

En general, se puede decir lo siguiente:

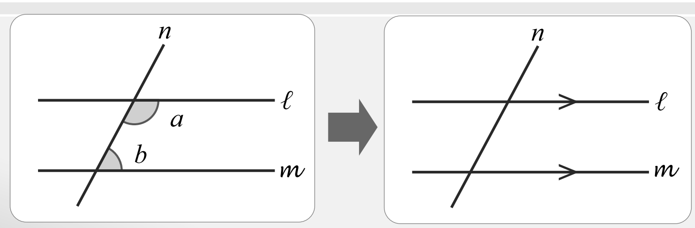
Si $\ell \parallel m$ y son cortadas por la recta n, entonces los ángulos internos al mismo lado de la recta son suplementarios.



$m\angle a + m\angle b = 180°$

De igual manera, se dice que:

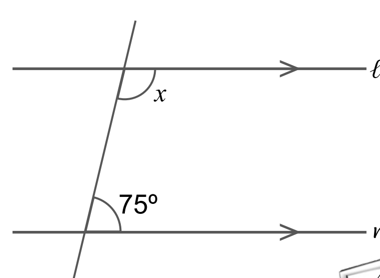
Si la recta n corta las rectas ℓ y m y los ángulos internos al mismo lado de la recta n son suplementarios, entonces $\ell \parallel m$.



$m\angle a + m\angle b = 180°$

Ejercicio 1.5

En la siguiente figura, dado el ángulo de 75º, encuentre la medida del ángulo x.

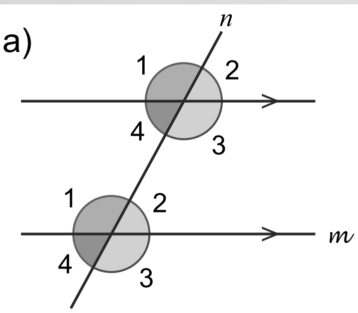


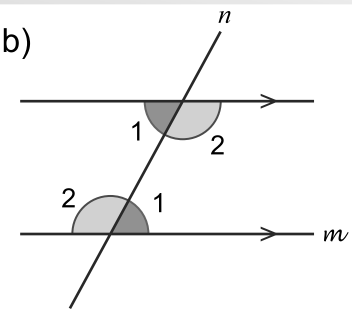
Propiedades de ángulos formados por rectas paralelas y una transversal.

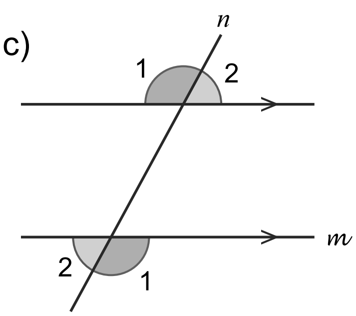
En las secciones anteriores se verificó las relaciones de igualdad entre los ángulos que se forman cuando dos rectas paralelas son cortadas por una transversal.

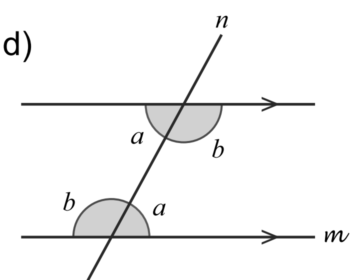
Las siguientes son propiedades que se establecen de los ángulos en rectas paralelas:

Si dos rectas son paralelas y son cortadas por una transversal se cumple que:
a) Los ángulos correspondientes tienen la misma medida.
b) Los ángulos alternos internos tienen la misma medida.
c) Los ángulos alternos externos tienen la misma medida.
d) Los ángulos internos al mismo lado de la transversal son suplementarios.

a)


b)


c)


d)


$m\angle a + m\angle b = 180^{\circ}$

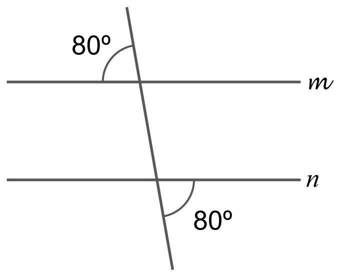
Para contenidos posteriores, se hará más referencia a los incisos a) y b)

Si dos rectas son cortadas por una transversal, éstas son paralelas cuando se satisface una de las siguientes condiciones:
a) Los ángulos correspondientes tienen la misma medida.
b) Los ángulos alternos internos tienen la misma medida.
c) Los ángulos alternos externos tienen la misma medida.
d) Los ángulos internos al mismo lado de la transversal son suplementarios.

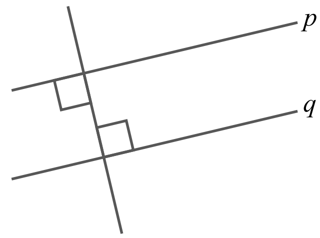
Ejercicio 1.6 Haga relacionar los numerales con los incisos de las figuras.

1) Los ángulos correspondientes tienen la misma medida.
2) Los ángulos alternos internos tienen la misma medida.
3) Los ángulos alternos externos tienen la misma medida.
4) Los ángulos internos al mismo lado de la transversal son suplementarios.

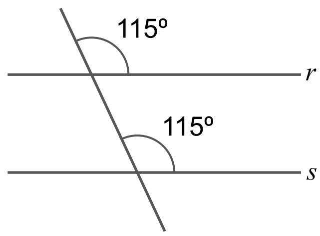
a)



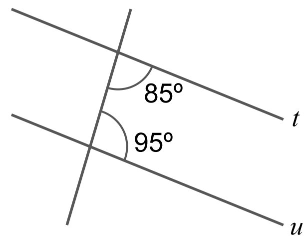
b)



c)



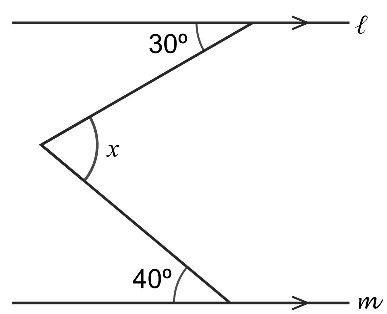
d)



Sección 4: Ejercicios sobre paralelismo

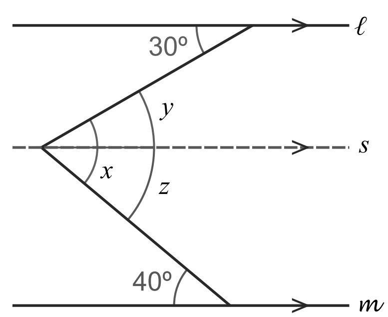
Ejemplo 1.7

En la figura de la derecha sea $\ell \parallel m$. Encuentre la medida del ángulo x.



Solución:

1) Trazar una recta paralela a la recta m que pase por el vértice del $\angle x$, nombrarla recta s (puede ser cualquier nombre). Observe que $m \parallel s$ y $\ell \parallel s$.



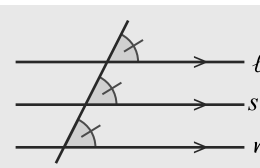
2) Observar que se divide el $\angle x$ en dos ángulos, nombrar estos ángulos con y y z.
Entonces $m\angle x = m\angle y + m\angle z$

3) $m\angle y = 30°$ ... El $\angle y$ y el ángulo dado de 30° son ángulos alternos internos en rectas paralelas.

$m\angle z = 40°$ ... El $\angle z$ y el ángulo dado de 40° son ángulos alternos internos en rectas paralelas.

$$m\angle x = m\angle y + m\angle z$$
$$= 30° + 40°$$
$$= 70°$$

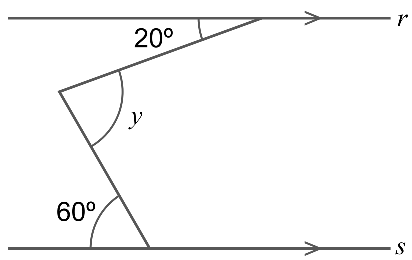
Respuesta: $m\angle x = 70°$



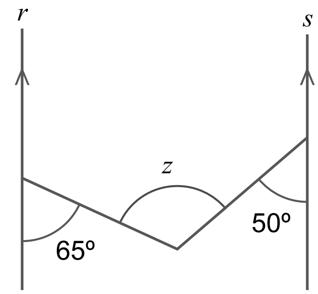
Si $\ell \parallel m$ y $m \parallel s$, entonces $\ell \parallel s$.

Ejercicio 1.7 En las siguientes figura, si $r \parallel s$, encuentre la medida de los ángulos y y z.

a)

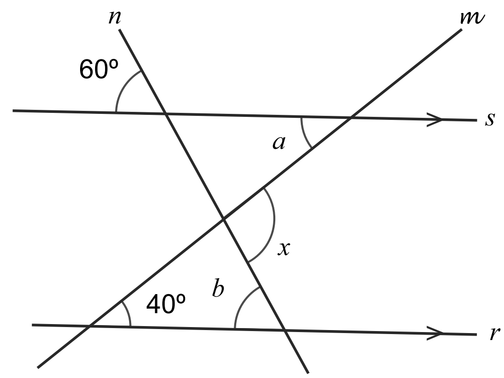


b)



Ejemplo 1.8

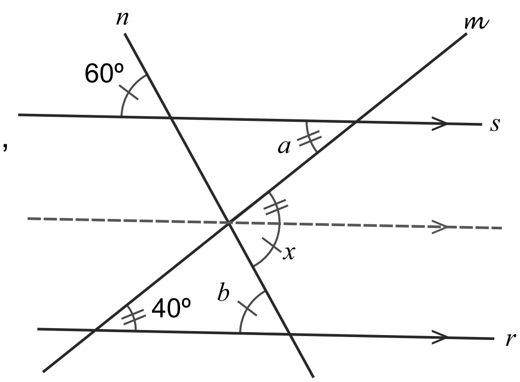
En la figura de la derecha dados $s \parallel r$ y los ángulos de 40° y 60°. Encuentre la medida del ángulo x.



Solución:

$m\angle a = 40°$ .... El $\angle a$ y el ángulo dado de 40° son ángulos alternos internos en rectas paralelas.

$m\angle b = 60°$ .... El $\angle b$ es correspondiente con el ángulo dado de 60° en rectas paralelas.



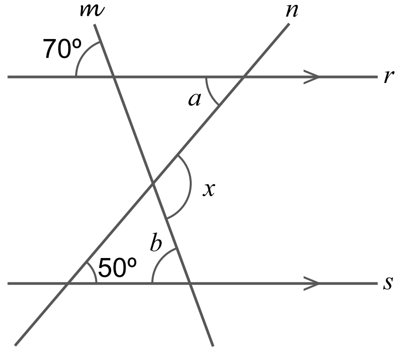
De la misma manera que en el **Ejemplo 1.7**, se sabe que:

$$\begin{aligned} m\angle x &= m\angle a + m\angle b \\ &= 40° + 60° \\ &= 100° \end{aligned}$$

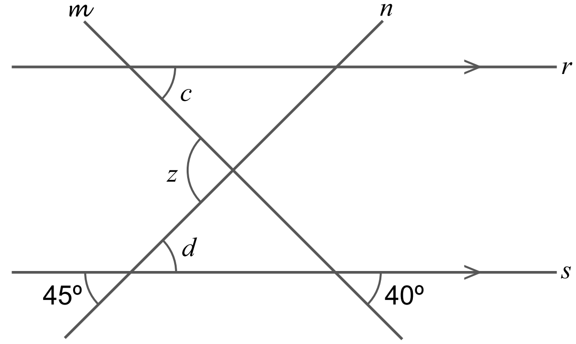
Ejercicio 1.8 En las siguientes figuras, dados $r \parallel s$ y

a) los ángulos de 50° y 70°, encuentre la medida del ángulo x.
b) los ángulos de 40° y 45°, encuentre la medida del ángulo z.

a)



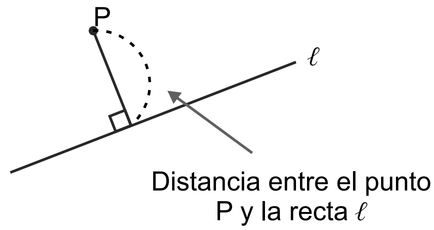
b)



Sección 5: *Distancia entre rectas paralelas*

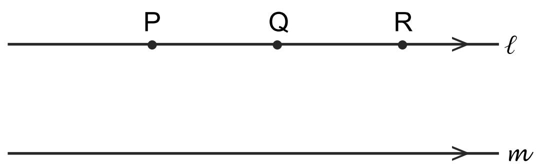
Se aprendió que la distancia entre un punto y una recta es la longitud del segmento que une el punto con la recta y que es perpendicular a dicha recta.

Ahora piense sobre la distancia entre dos rectas paralelas.



Ejemplo 1.9

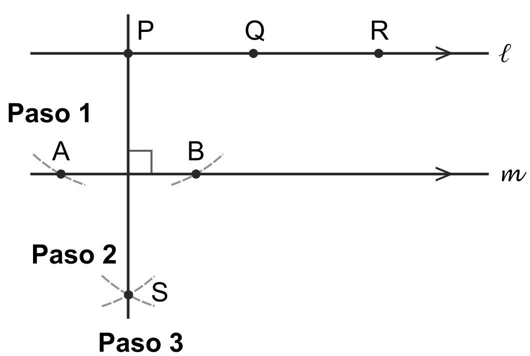
En la siguiente figura, las rectas ℓ y m son paralelas. En la recta ℓ están los puntos P, Q y R. Compare las distancias entre cada punto y la recta m.



La distancia entre un punto y una recta es la longitud del segmento que une el punto con la recta y que es perpendicular a dicha recta.

Solución:

Paso 1. Trazar cada perpendicular a la recta que pase por los puntos P, Q y R.



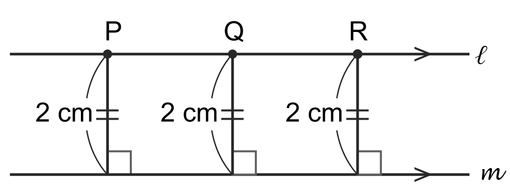
Construcción de la perpendicular

Paso 1 Trazar el arco con centro en P y que corte la recta m en los puntos A y B.

Paso 2 Con el mismo radio trazar dos arcos con centro en A y B que se corten en el punto S.

Paso 3 Trazar la recta PS. La recta PS es la perpendicular a la recta m que pasa por el punto P.

Paso 2. Medir la longitud de los segmentos que unen cada punto a la recta m.

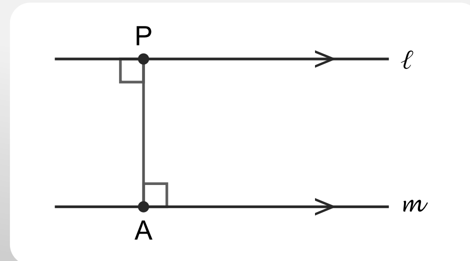


La distancia entre el punto P y recta m es 2 cm, igual que entre Q y m, lo mismo que entre R y m.

Respuesta: Las distancias son iguales

Del Ejemplo 1.9 se puede concluir lo siguiente:

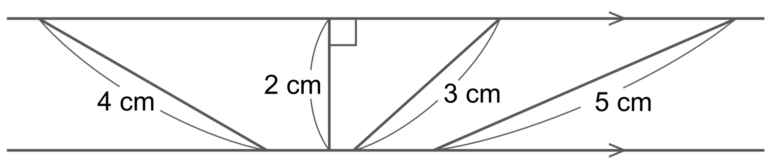
Si las rectas ℓ y m son paralelas y se marca cualquier punto P en la recta ℓ, la distancia entre ese punto P y la recta m, es siempre igual. A esta distancia se le llama distancia entre dos rectas paralelas.



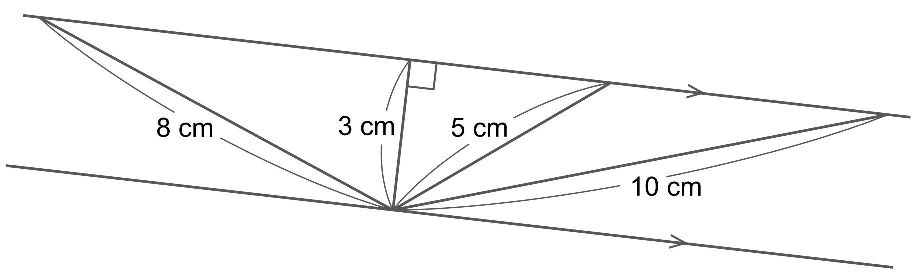
En la figura, $\overline{PA} \perp m$ y por ángulos alternos internos en rectas paralelas, entonces el $\overline{PA}$ también es perpendicular a la recta ℓ. **PA es la distancia entre las rectas ℓ y m.**

Ejercicio 1.9 a) Indique la distancia entre los siguientes pares de rectas paralelas.

a1)

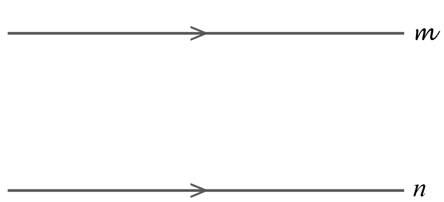


a2)

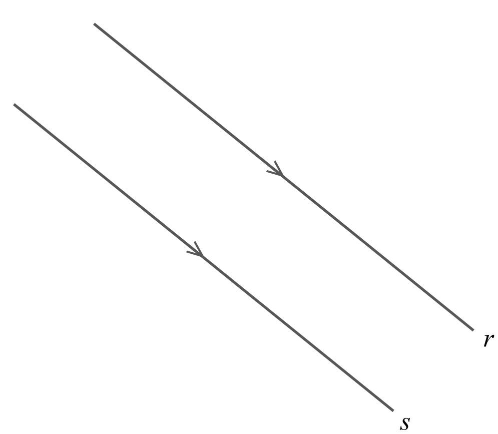


b) Encuentre la distancia en cm entre los siguientes pares de rectas paralelas. Haga uso de la construcción de la perpendicular como en el Ejemplo 1.9 .

b1)



b2)

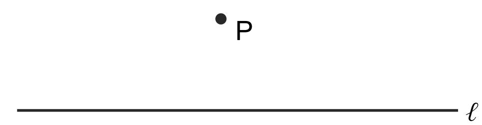


Sección 6: Construcción de rectas paralelas

Anteriormente se trazaron rectas paralelas utilizando escuadras, ahora se construirán rectas paralelas. Recuerde que construir figuras es dibujarlas utilizando solo regla y compás.

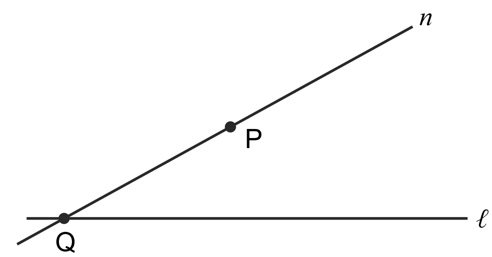
Ejemplo 1.10

Dada la recta ℓ y un punto P que no está en ella, construya la recta m que pase por el punto P y es paralela a la recta ℓ.

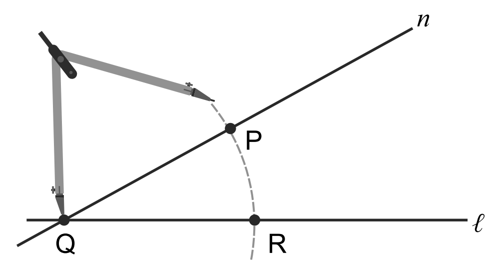


Solución:

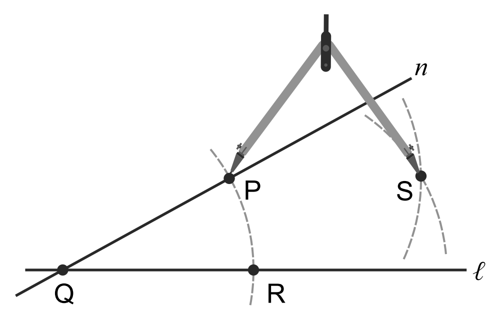
Paso 1. Trazar la recta n que pase por el punto P y corte a la recta ℓ en el punto Q.



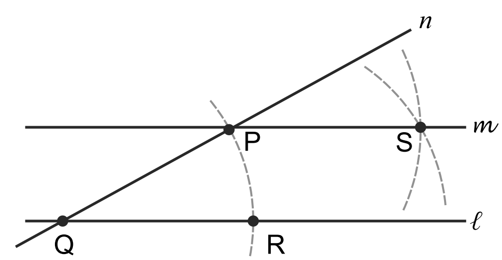
Paso 2. Trazar un arco de radio QP que corte la recta ℓ en el punto R.



Paso 3. Con el mismo radio QP trazar dos arcos, uno con centro en el punto P y otro con centro en el punto R que se corten en el punto S.



Paso 4. Trazar la recta que pase por los puntos P y S.



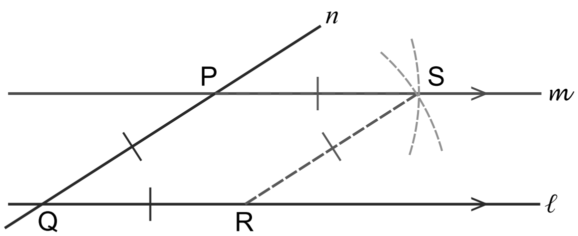
La recta m es la recta paralela a la recta ℓ, que pasa por el punto P.

Explicación de la construcción anterior

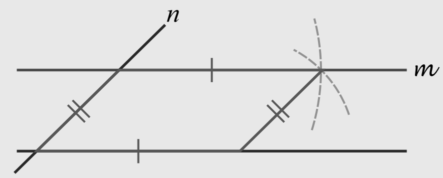
Observe que el cuadrilátero PQRS es un rombo porque sus cuatro lados son iguales. Lo anterior es una condición suficiente para que este cuadrilátero sea un paralelogramo.
De esta manera, $\overline{PS} \parallel \overline{QR}$ y $\overline{QP} \parallel \overline{RS}$.

Un **paralelogramo** es un cuadrilátero cuyos dos pares de lados opuestos son paralelos.

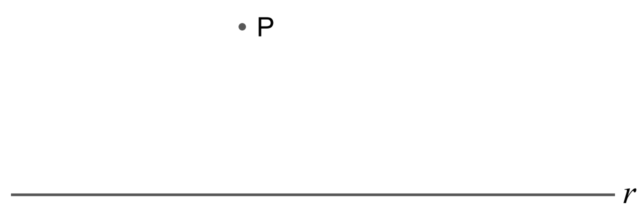
Por lo tanto, la recta m que pasa por $\overline{PS}$ es paralela a la recta ℓ que pasa por $\overline{QR}$.



En la construcción anterior piense como construir rectas paralelas usando la definición de romboide.



Ejercicio 1.10 Haciendo uso de las características del rombo construya la recta s que sea paralela a la recta r y pasa por el punto P.



Ejercicios

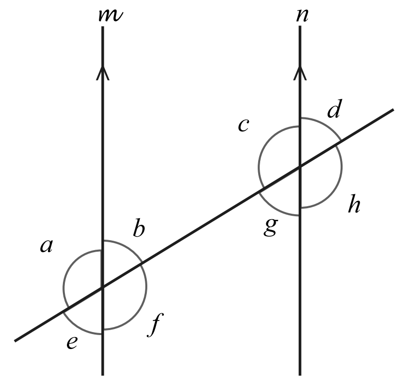
1 En la figura de la derecha $m \parallel n$, identifique el ángulo:

a) Correspondiente con el $\angle a$.

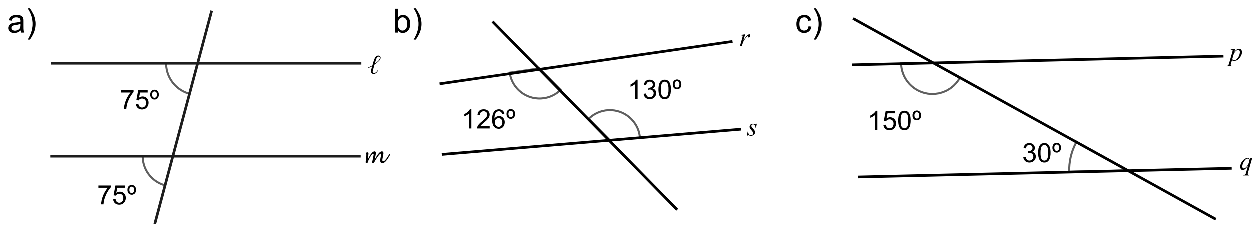
b) Alterno interno con el $\angle b$.

c) Alterno externo con el $\angle d$.

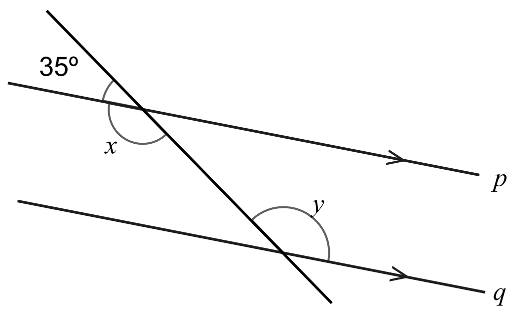
d) Opuesto por el vértice con $\angle c$.



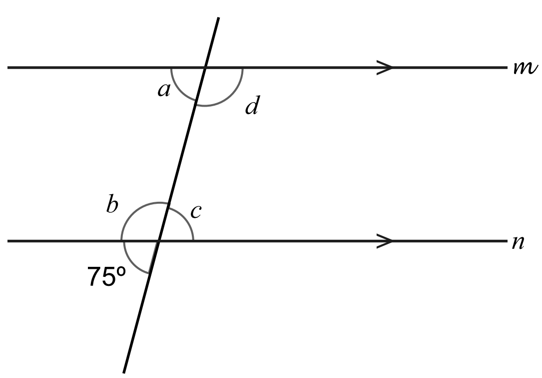
2 Indique cuáles de los siguientes pares de rectas son paralelas.



3 En la siguiente figura, si $p \parallel q$, y dado el ángulo de 35°, encuentre la medida de los ángulos x y y.

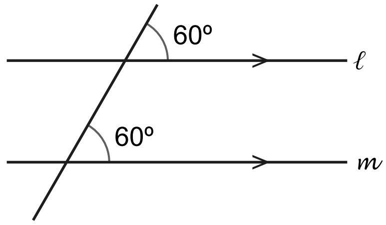


4 En la siguiente figura, si $m \parallel n$, encuentre la medida de los ángulos internos dado el ángulo de 75°.

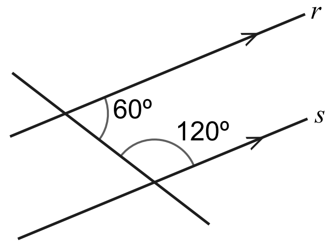


5 Indique por qué criterio de paralelismo los siguientes pares de rectas son paralelas.

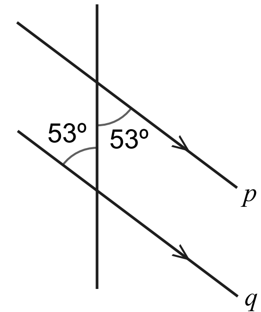
a)



b)

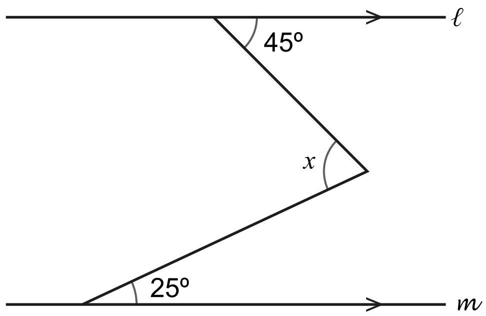


c)

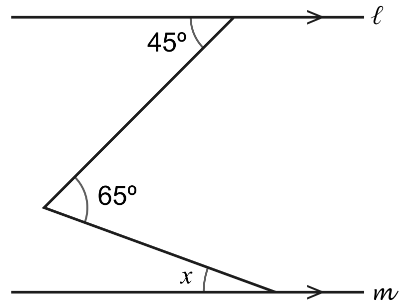


6 En las siguientes figuras si $\ell \parallel m$. Encuentre la medida del ángulo x.

a)

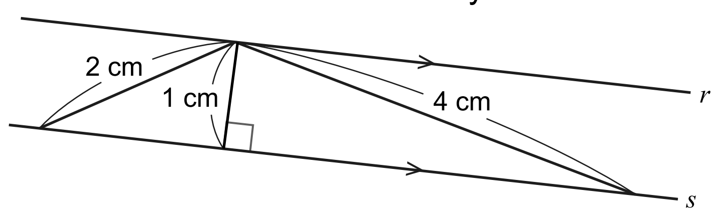


b)

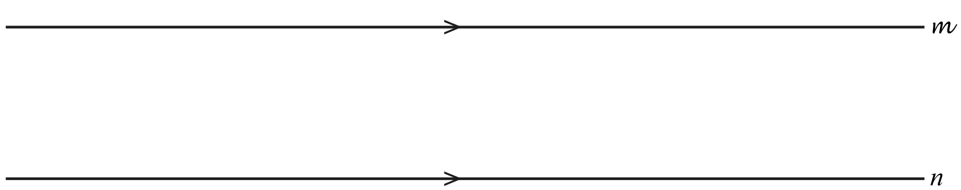


7 En las siguientes figuras:

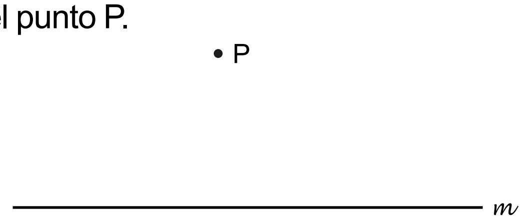
a) Si $r \parallel s$, indique la distancia entre las rectas r y s.



b) Encuentre la distancia entre las rectas paralelas m y n (sugerencia: marque el punto P en la recta m y trace la recta perpendicular a n que pase por P).



8 Haciendo uso de las características del rombo, construya la recta n que sea paralela a la recta m y pasa por el punto P.



Unidad 4

Congruencia de triángulos

Lección 1: Suma de las medidas de los ángulos de un triángulo

Lección 2: Suma de las medidas de los ángulos de un polígono

Lección 3: Congruencia de triángulos

Lección 4: Triángulos isósceles y rectángulo

Unidad 4

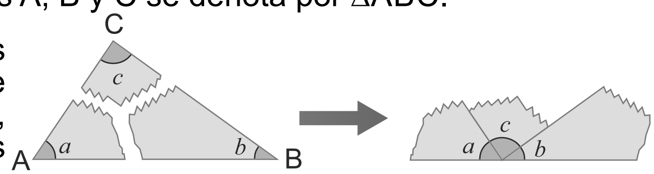
Congruencia de triángulos

Lección 1: Suma de las medidas de los ángulos de un triángulo

Sección 1: La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo

El triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C se denota por $\triangle ABC$.

En 4to grado se mostró que la suma de las medidas de los tres ángulos internos de un triángulo es 180°. Ahora en 8vo grado, se mostrará haciendo uso de las rectas paralelas y los ángulos alternos internos.

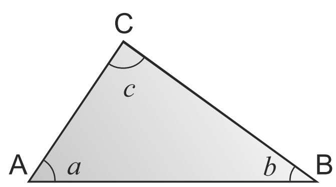


Ejemplo 1.1

Empleando las rectas paralelas y los ángulos alternos internos, verifique que la suma de las medidas de los tres ángulos internos de un triángulo es 180°.

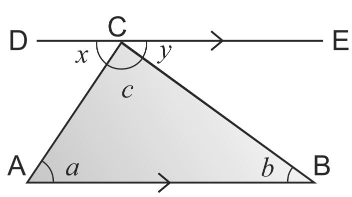
Solución:

Paso 1: Se construye el $\triangle ABC$ y se denotan sus ángulos internos como $\angle a$, $\angle b$ y $\angle c$.

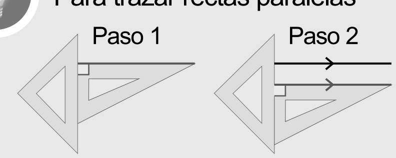


Un **ángulo interno** de un triángulo, es un ángulo formado por dos de sus lados y queda en el interior del triángulo.

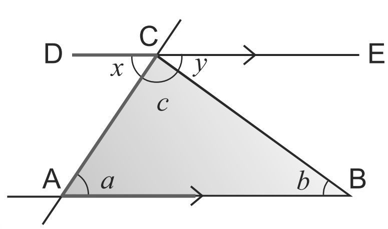
Paso 2: Se traza una recta DE que pasa por C y es paralela al lado AB. (forma los ángulos x y y)



Para trazar rectas paralelas

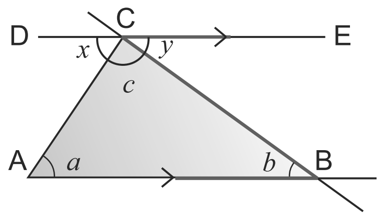


Paso 3: Se prolonga el lado AB por el vértice A, y el lado AC por ambos extremos.



$\angle a$ y $\angle x$ son ángulos alternos internos entre rectas paralelas, por lo tanto, $\angle a$ y $\angle x$ tienen la misma medida, esto es, $\angle a \cong \angle x$.

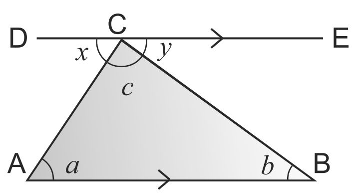
Paso 4: Se prolonga el lado AB por el vértice B, y el lado CB por ambos extremos.



$\angle b$ y $\angle y$ son ángulos alternos internos entre rectas paralelas, por lo tanto, $\angle b$ y $\angle y$ tienen la misma medida, esto es, $\angle b \cong \angle y$.

Paso 5: Los ángulos x, c y y forman un ángulo llano, es decir, la suma de sus medidas es igual a 180°, $m\angle x + m\angle c + m\angle y = 180°$.

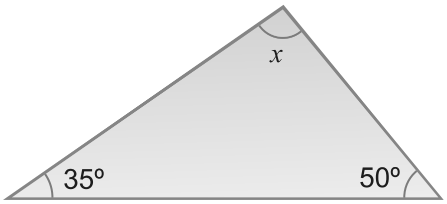
Por los **pasos 3** y **4**, se sabe que $\angle a \cong \angle x$ y $\angle b \cong \angle y$, sustituyendo en $m\angle x + m\angle c + m\angle y = 180°$ se tiene que, $m\angle a + m\angle c + m\angle b = 180°$.



La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°.

Ejemplo 1.2

Encuentre la medida del $\angle x$ empleando la propiedad de la suma de las medidas de ángulos internos de un triángulo.



Solución:

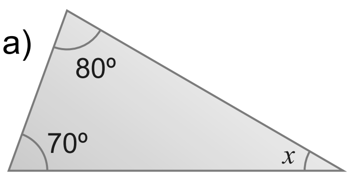
$$m\angle x + 35° + 50° = 180°$$
$$m\angle x + 85° = 180°$$
$$m\angle x = 180° - 85°$$
$$m\angle x = 95°$$

Respuesta: 95°

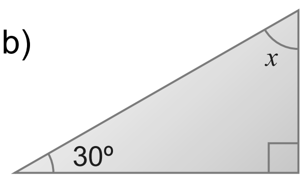
Ejercicio 1.1

Encuentre la medida del $\angle x$ empleando la propiedad de la suma de las medidas de ángulos internos de un triángulo.

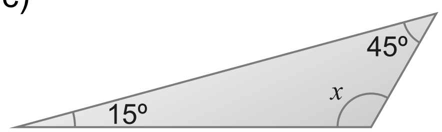
a)



b)



c)

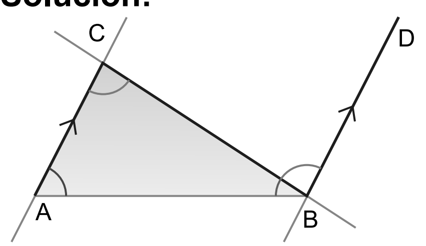


Sección 2: : Medida de ángulos externos de un triángulo

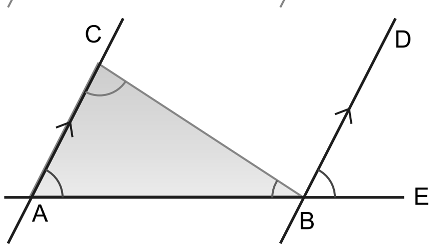
Ejemplo 1.3

En el Ejemplo 1.1 se trazó una recta paralela al lado AB, ¿qué pasaría si se traza una recta BD que pase por B que sea paralela al lado AC y se sigue el mismo razonamiento?

Solución:

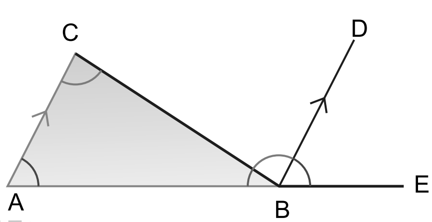


Los ángulos ACB y DBC tienen la misma medida por ser ángulos alternos internos entre rectas paralelas.



El punto E está sobre la recta que prolonga al lado AB por el vértice B.

Los ángulos CAB y DBE tienen la misma medida por ser ángulos correspondientes entre rectas paralelas.

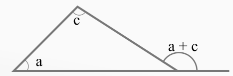


El $\angle$CBE es un ángulo externo del ΔABC.

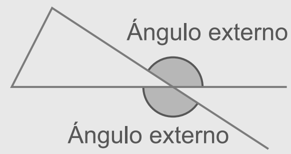
De las figuras anteriores se deduce que

$$m\angle CBE = m\angle DBC + m\angle DBE$$
$$= m\angle ACB + m\angle CAB$$

- Un ángulo externo de un triángulo es un ángulo formado por un lado del triángulo y la extensión de uno de sus lados contiguos.
- La medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no contiguos.
- Cada ángulo externo es suplemento del ángulo interno que comparte el mismo vértice.



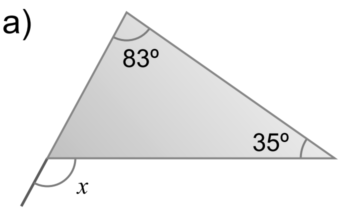
Alrededor de un vértice de un triángulo hay dos ángulos externos



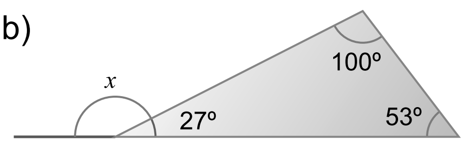
Ejemplo 1.4

Encuentre la medida del $\angle x$.

a)



b)



Solución:

$m\angle x = 83° + 35°$

$m\angle x = 118°$

Respuesta: 118°

Solución:

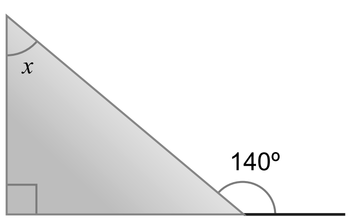
$m\angle x = 100° + 53°$

$m\angle x = 153°$

Los ángulos de 100° y 53° son los ángulos internos no contiguos al $\angle x$.

Respuesta: 153°

c)



Solución:

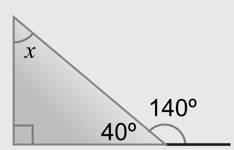
$m\angle x + 90° = 140°$

$m\angle x = 140° - 90°$

$m\angle x = 50°$

Respuesta: 50°

Otra forma de resolverlo, es encontrar el suplemento del ángulo externo y luego aplicar la propiedad de la suma de las medidas de ángulos internos de un triángulo.

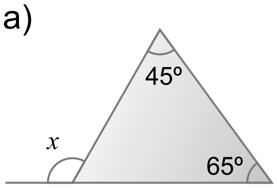


$m\angle x = 180° - 90° - 40°$

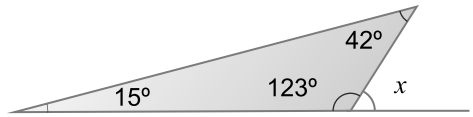
$m\angle x = 50°$

Ejercicio 1.2 Encuentre la medida del $\angle x$.

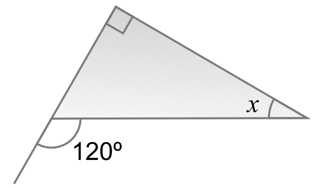
a)



b)



c)



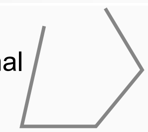
Lección 2: Suma de las medidas de los ángulos de un polígono

Sección 1: Definición y elementos de un polígono

En 5to grado se aprendió la definición de polígono y sus elementos.

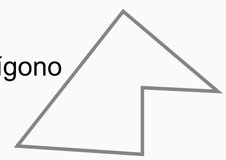
Una **línea poligonal** es una secuencia de segmentos consecutivos no colineales.

Línea poligonal

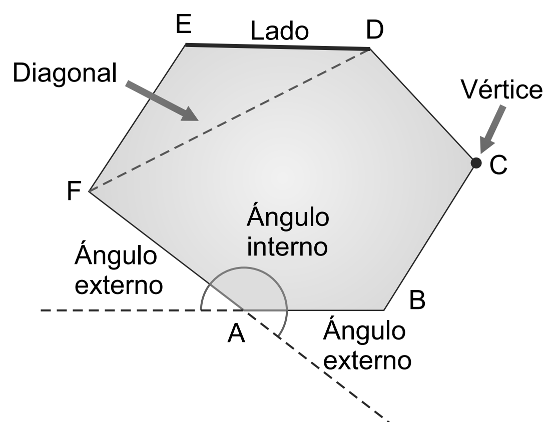


Un **polígono** es una figura formada por una línea poligonal cerrada.

Polígono



En la figura de la derecha se presentan los elementos de un polígono.

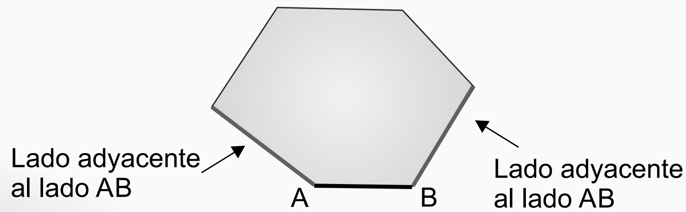


Según el número de lados los polígonos se nombran como aparece a continuación:

Número de lados	Nombre
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octágono

Número de lados	Nombre
9	Eneágono
10	Decágono
11	Endecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

Se llaman **lados adyacentes** a cualesquiera dos lados de un polígono que tienen un vértice en común.



Ejemplo 2.1

Identifique en el pentágono ABCDE los siguientes elementos:

a) Lados

b) Diagonales

c) Diagonales trazadas desde el vértice B

d) Lados adyacentes al lado AB

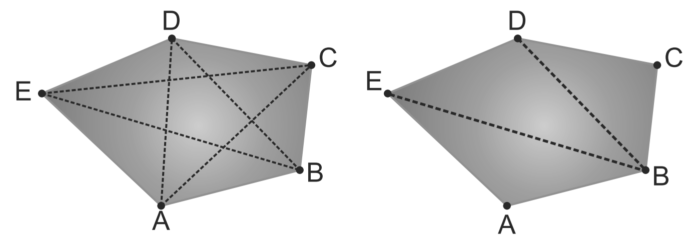
Respuesta:

a) Lados: AB, BC, CD, DE, EA

b) Diagonales: AC, AD, BD, BE, CE

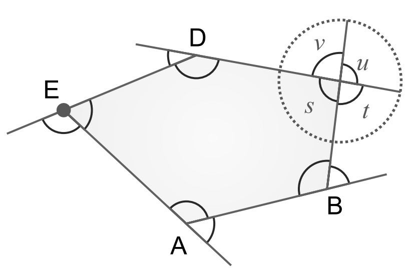
c) Diagonales trazadas desde el vértice B: BD y BE

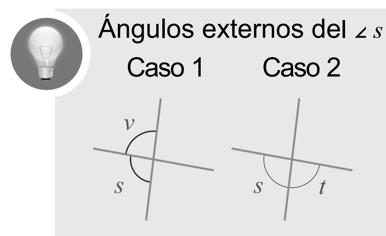
d) Lados adyacentes al lado AB: BC y AE



Ejemplo 2.2

En el pentágono dado, indique cuáles son ángulos externos del $\angle s$,





Se puede hacer lo mismo en cada uno de los vértices A, B, D y E.

Respuesta: $\angle v$ y $\angle t$

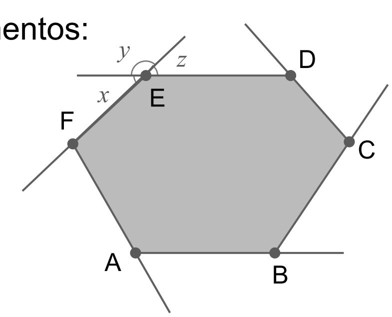
Ejercicio 2.1 En el siguiente hexágono, indique estos elementos:

a) Lados

b) Diagonales trazadas desde el vértice B

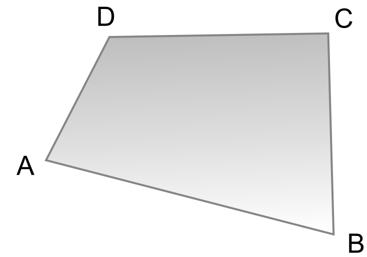
c) Lados adyacentes al lado BC

d) Ángulos externos en el vértice E



Sección 2: La suma de las medidas de los ángulos de un polígono

Ejemplo 2.3

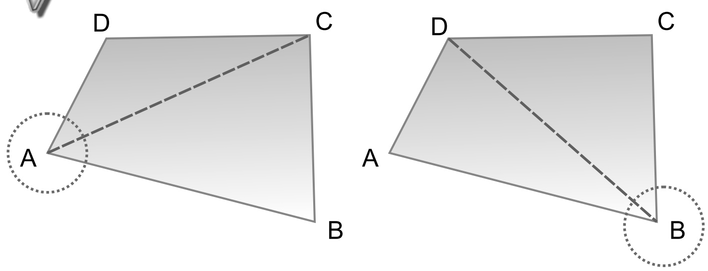


Utilizando el siguiente cuadrilátero, responda:

a) ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice cualquiera?

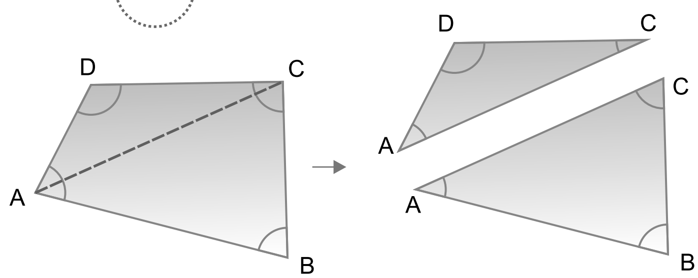
b) ¿Qué puede concluirse con respecto a la suma de los ángulos internos de ese cuadrilátero?

Solución:



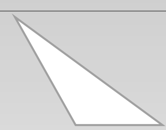
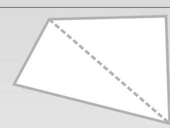
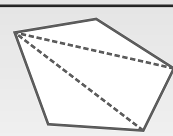
a) Desde un vértice cualquiera, se puede trazar una sola diagonal. Igual sucedería en los vértices C ó D

b) El cuadrilátero se divide en 2 triángulos, por lo que la suma de sus ángulos internos es: $180° \times 2 = 360°$.



Ejemplo 2.4

Utilizando el procedimiento del *Ejemplo* 2.3 y analizando la siguiente tabla, responda:

Número de lados	Nombre del polígono	Polígono	Número de diagonales trazadas desde un mismo vértice	Número de triángulos que se forman	Expresión numérica de la suma de las medidas de los ángulos internos
3	Triángulo		0	1	$180° \times 1 = 180°$
4	Cuadrilátero		1	2	$180° \times 2 = 360°$
5	Pentágono		2	3	$180° \times 3 = 540°$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n					

a) ¿Cómo se relaciona el número de lados del polígono y las diagonales trazadas desde un mismo vértice?

b) ¿Cómo se relaciona el número de lados del polígono y la cantidad de triángulos en que se divide?

c) ¿Cuál es la expresión algebraica para encontrar la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono?

Solución:

a) $3 - 3 = 0$
$4 - 3 = 1$
$5 - 3 = 2$
⋮
número de lados − 3 = Diagonales trazadas desde un mismo vértice

Si n es el número de lados del polígono, entonces
Diagonales trazadas desde un mismo vértice $= n - 3$

b) $3 - 2 = 1$
$4 - 2 = 2$
$5 - 2 = 3$
⋮
número de lados − 2 = Número de triángulos que se forman con diagonales trazadas desde un mismo vértice

Si n es el número de lados del polígono, entonces
Número de triángulos $= n - 2$

c) Para encontrar la suma de las medidas de los ángulos internos de cualquier polígono, primero lo dividimos en triángulos que se forman con diagonales trazadas desde un mismo vértice y luego multiplicamos 180° por ese número.

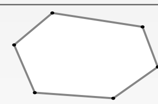
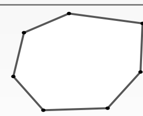
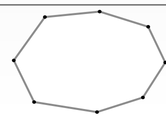
180° × número de triángulos
= 180° × (número de lados − 2)
$= 180° \times (n - 2)$
$= 180° (n - 2)$

Un polígono con n lados se puede dividir en $(n - 2)$ triángulos con $(n - 3)$ diagonales que pasan por un mismo vértice.

La suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono de n lados es $180° (n - 2)$.

Número de lados	Nombre del polígono	Divida en triángulos usando las diagonales	Número de diagonales trazadas desde un mismo vértice	Número de triángulos que se forman	Expresión numérica de la suma de las medidas de los ángulos internos
n	n -ágono	n	$n - 3$	$n - 2$	$180° (n - 2)$

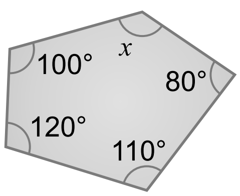
Ejercicio 2.2 Complete la siguiente tabla:

Número de lados	Nombre del polígono	Polígono	Número de diagonales trazadas desde un mismo vértice	Número de triángulos que se forman	Expresión numérica de la suma de las medidas de los ángulos internos
6					
7					
8					

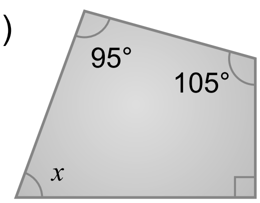
Ejemplo 2.5

Encuentre la medida del $\angle x$:

a)



b)



Solución

a) b)

Paso 1: Encontrar la suma de las medidas de los ángulos internos del polígono

a) Suma de las medidas de los ángulos internos de un pentágono

Un pentágono tiene 5 lados, entonces

$180° (5 - 2)$

$= 180° (3)$

$= 540°$

b) Suma de las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero

Un cuadrilátero tiene 4 lados, entonces

$180° (4 - 2)$

$= 180° (2)$

$= 360°$

Paso 2: Plantear la ecuación para encontrar el valor de la $m\angle x$

a)

$m\angle x + 100° + 120° + 110° + 80° = 540°$

$m\angle x + 410° = 540°$

b)

$m\angle x + 90° + 105° + 95° = 360°$

$m\angle x + 290° = 360°$

Paso 3: Resolver la ecuación

a)

$m\angle x = 540° - 410°$

$m\angle x = 130°$

b)

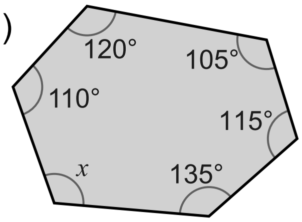
$m\angle x = 360° - 290°$

$m\angle x = 70°$

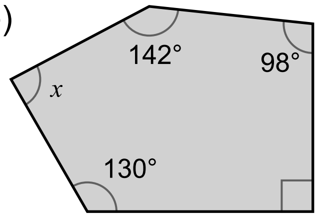
Respuesta: a) 130° b) 70°

Ejercicio 2.3 Encuentre la medida del $\angle x$:

a)



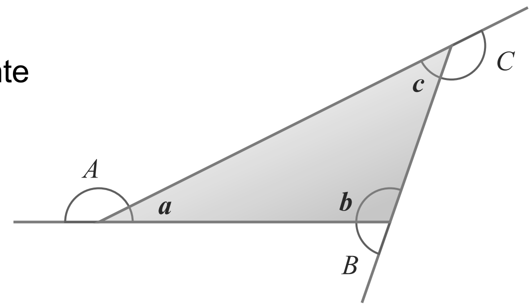
b)



Ejemplo 2.6

En el siguiente triángulo ABC, considere solamente un ángulo externo por cada vértice del triángulo.
a) Si se suman las medidas de los ángulos internos y externos, ¿cuál es el total?

b) Si se suman las medidas de los ángulos externos, ¿cuál es el total?



Solución:

a) Las letras minúsculas a, b, c representan los ángulos internos y las letras mayúsculas A,B,C representan los ángulos externos.

Por ser ángulos suplementarios, $m\angle A + m\angle a = 180°$

$m\angle B + m\angle b = 180°$

$m\angle C + m\angle c = 180°$

Total $= 540°$

La suma de las medidas de los ángulos internos y externos del triángulo, también puede expresarse como 180° $\times$ 3, donde 3 es el número de lados.

Respuesta: Suma de las medidas de ángulos internos y externos $=$ 540°

b) Por la propiedad de la suma de ángulos internos de un triángulo, se sabe que $m\angle a + m\angle b + m\angle c = 180°$

Suma de las medidas de ángulos internos y externos	$-$	Suma de las medidas de ángulos internos	$=$	Suma de las medidas de ángulos externos

$$540° - 180° = 360°$$

Respuesta: Suma de las medidas de ángulos externos $=$ 360°

Si n es el número de lados del polígono, la suma de las medidas de los ángulos internos y externos considerando solamente un ángulo exterior por cada vértice del triángulo es, 180° $\times$ n.

La suma de las medidas de los ángulos externos para cualquier polígono de n lados es:

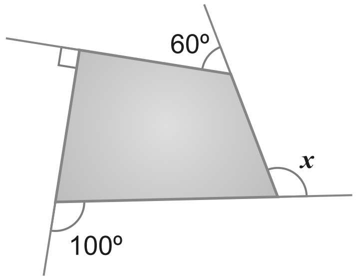
$$\begin{aligned} & 180°n - 180°(n-2) \\ &= 180°n - 180°n + 360° \\ &= 360° \end{aligned}$$

La suma de las medidas de los ángulos externos de un polígono es 360°.

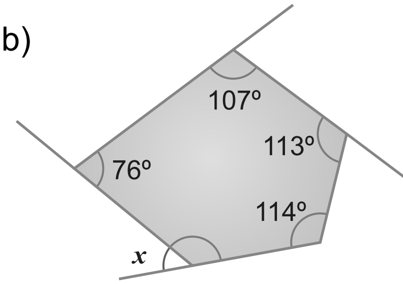
Ejemplo 2.7

Encuentre la medida del $\angle x$:

a)



b)



Primero se calculará el suplemento del $\angle x$, utilizando la fórmula para la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono y luego se calculará la $m\angle x$.

Solución

a) $m\angle x + 60° + 90° + 100° = 360°$

$$m\angle x + 250° = 360°$$

$$m\angle x = 360° - 250°$$

$$m\angle x = 110°$$

Respuesta: 110°

b) La suma de las medidas de los ángulos internos de un pentágono es igual a 540°, por lo que, sea y el ángulo suplementario del $\angle x$,

$$m\angle y + 114° + 113° + 107° + 76° = 540°$$

$$m\angle y + 410° = 540°$$

$$m\angle y = 540° - 410°$$

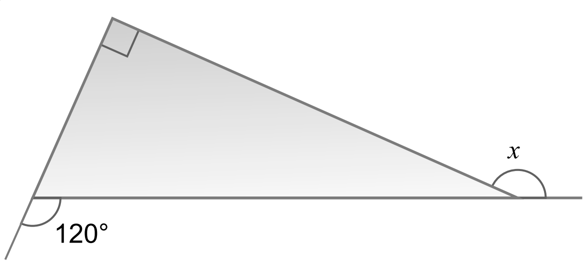
$$m\angle y = 130°$$

Así, la $m\angle x = 180° - 130° = 50°$

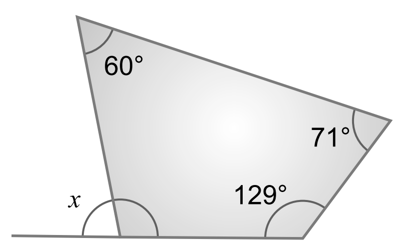
Respuesta: 50°

Ejercicio 2.4 Encuentre la medida del ángulo x:

a)



b)

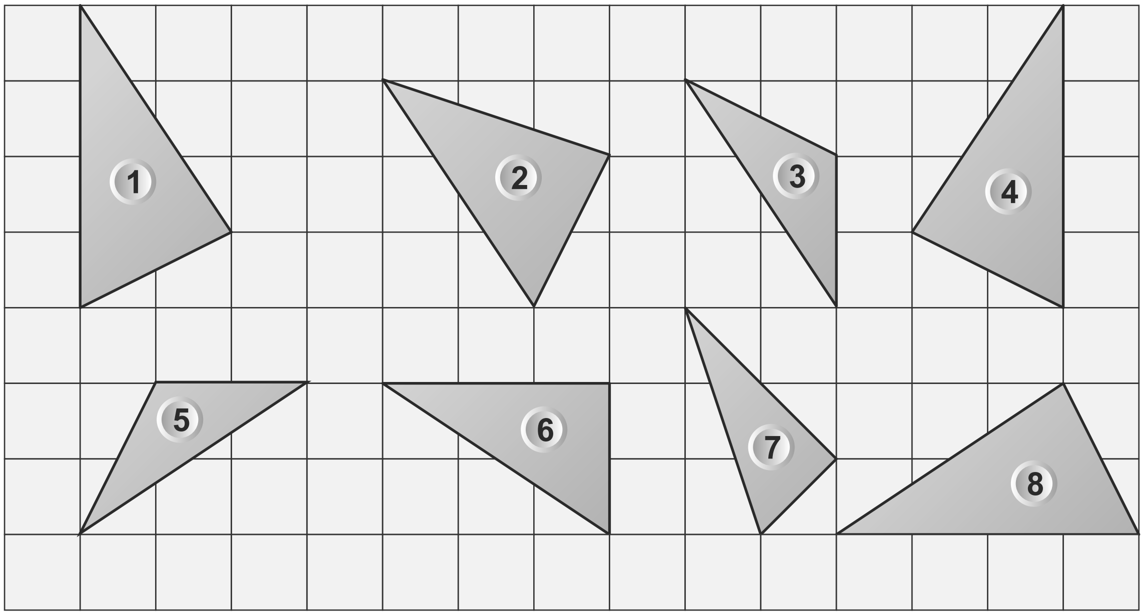


Lección 3: Congruencia de triángulos

Sección 1: Congruencia

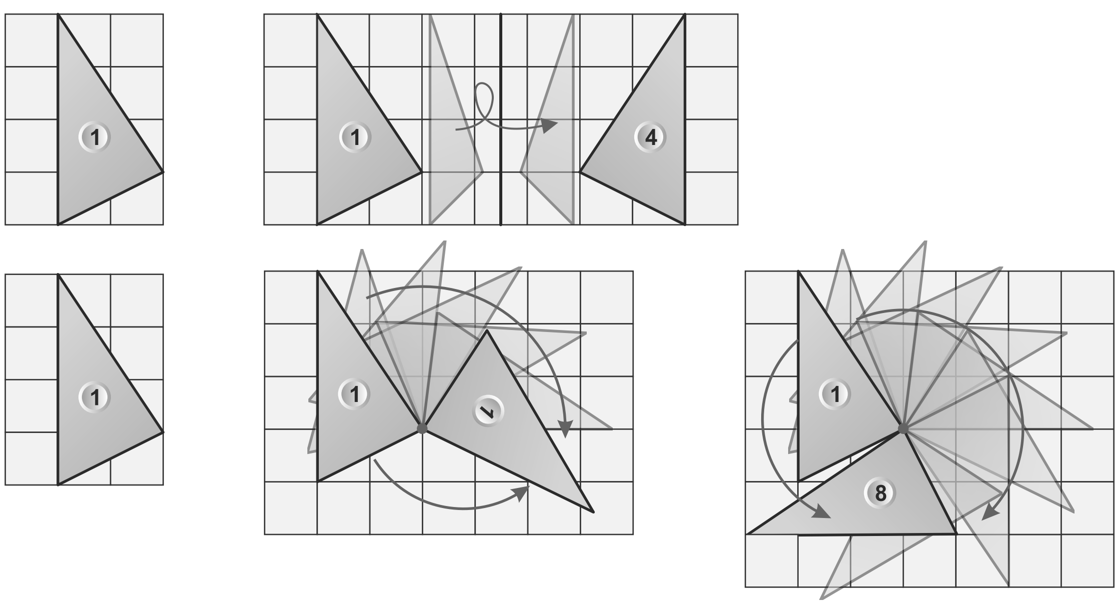
Ejemplo 3.1

Encuentre los triángulos que se sobreponen exactamente al triángulo 1.



Solución:

¿Qué pasaría si volteo el triángulo 1 ?, ¿qué pasaría si lo giro ?



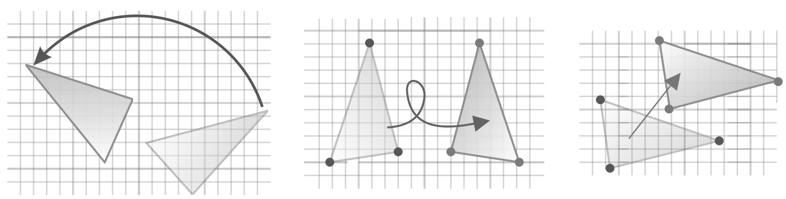
Si se voltea, el triángulo 1 se sobrepone exactamente al triángulo 4.
Si se gira adecuadamente, el triángulo 1, se sobrepone exactamente al triángulo 8.

Respuesta: triángulos 4 y 8

Si se puede convertir una forma en otra usando giros, volteos y deslizamientos, las dos formas son **congruentes**.

Dos figuras planas son congruentes cuando se sobreponen exactamente después de mover y/o dar vuelta a una de las dos.
"Congruente" se representa con el símbolo $\cong$.

Rotación **Reflexión** **Traslación**



¡Gira! **¡Voltea!** **¡Desliza!**

Después de estas transformaciones (girar, voltear, deslizar) la forma sigue teniendo el mismo tamaño, ángulos y longitudes de lados.

Ejercicio 3.1 Utilizando los triángulos del Ejemplo 3.1, encuentre los triángulos que son congruentes al triángulo 3

Cuando dos figuras son congruentes, se dice que los vértices, lados, ángulos de una de las figuras corresponden respectivamente a los vértices, lados y ángulos de la otra figura.

Los **segmentos correspondientes** de dos figuras congruentes tienen la misma medida, igual que sus ángulos correspondientes.

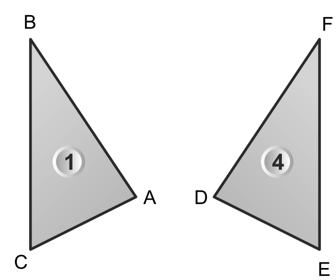
Colocando los vértices A, B y C al triángulo 1 y los vértices D, E y F al triángulo 4, se tienen 3 correspondencias:

$\overline{AB}$ significa segmento AB. Un lado es un tipo de segmento. En este libro se utiliza la misma expresión $\overline{AB}$ para decir lado

Los vértices A, B y C del Δ ABC
se corresponden respectivamente con
los vértices D, F y E del Δ DFE.
Se escribe $\Delta ABC \cong \Delta DFE$.

Los lados correspondientes son congruentes:
$\overline{AB} \cong \overline{DF}$, $\overline{BC} \cong \overline{FE}$ y $\overline{CA} \cong \overline{ED}$

Los ángulos correspondientes son congruentes:
$\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle F$ y $\angle C \cong \angle E$



El siguiente diagrama muestra las partes que se corresponden (vértices, ángulos y lados).

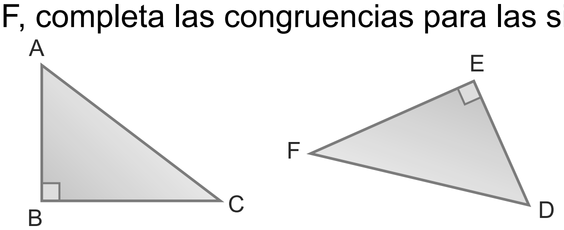
$\Delta ABC \cong \Delta DFE$

Ejemplo 3.2

Dado que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, completa las congruencias para las siguientes partes correspondientes:

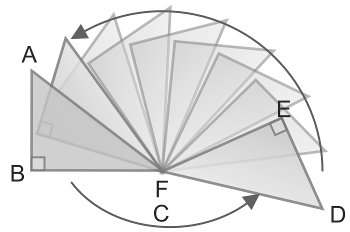
$\angle A \cong$ ☐

$\overline{CB} \cong$ ☐



Solución:

Puede observarse que el $\angle A$ es correspondiente con el $\angle D$ y el lado CB es correspondiente con el lado FE.



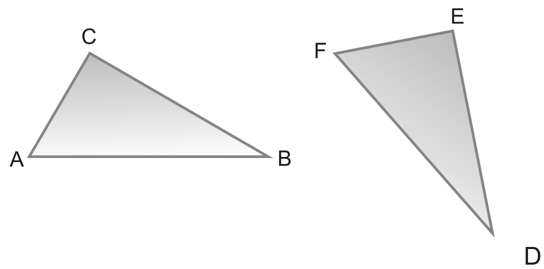
Respuesta: $\angle A \cong \boxed{\angle D}$

$\overline{CB} \cong \boxed{\overline{FE}}$

Ejercicio 3.2 Dado que $\Delta ABC \cong \Delta FDE$, completa las congruencias para las siguientes partes correspondientes:

$\angle F \cong \boxed{}$

$\overline{BC} \cong \boxed{}$



Sección 2: *Criterios de congruencia de triángulos*

Ejemplo 3.3

En su cuaderno, construya los triángulos que cumplen las siguientes condiciones:

a) AB = 5 cm, BC = 4 cm, AC = 2 cm

b) AB = 6 cm, $m\angle A = 30°$, AC = 4 cm

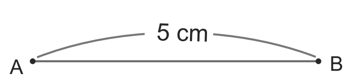
c) AB = 6 cm, $m\angle A = 30°$, $m\angle B = 50°$

> Recuerde que:
> $\overline{AB}$ designa al segmento AB.
> AB designa la medida del segmento AB.

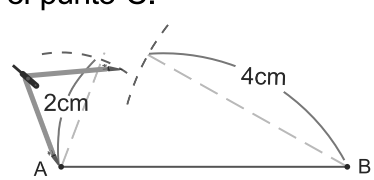
Solución

a) 1. Trazar el segmento AB como base.
2. Trazar arcos de 2 cm y 4 cm con centros en A y B.
3. En la intersección de los arcos, se ubicará el punto C.
4. Trazar el ΔABC.

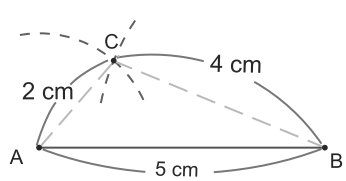
1.



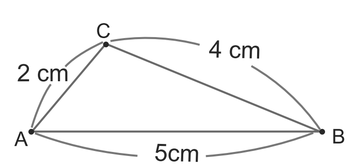
2.



3.



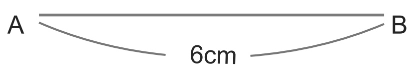
4.



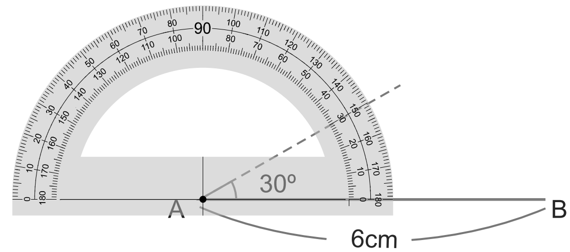
Compare el triángulo que acaba de construir, con los triángulos construidos por sus compañeros.

b) 1. Trazar el segmento AB como base.
2. Trazar un ángulo de 30° con vértice en A.
3. Sobre la línea trazada en el paso 2, se medirán los 4 cm para ubicar el punto C.
4. Trazar el segmento CB.

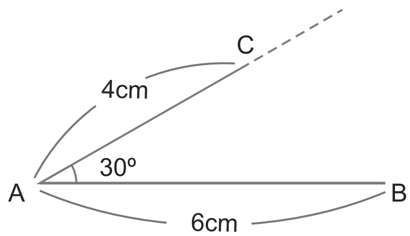
1.



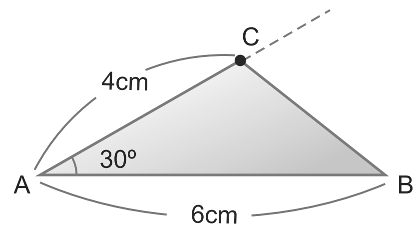
2.



3.



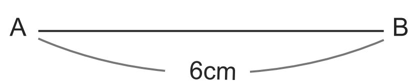
4.



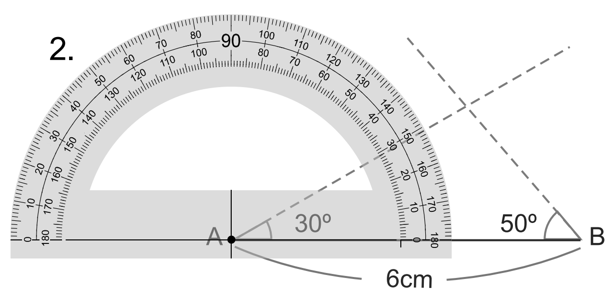
Compare el triángulo que acaba de construir, con los triángulos construidos por sus compañeros.

c) 1. Trazar el segmento AB como base.
2. Trazar los ángulos de 30° y 50° con vértices en A y B.
3. En la intersección de los rayos se ubicará el punto C.

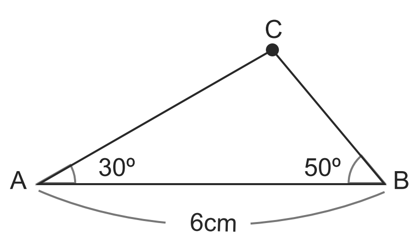
1.



2.



3.

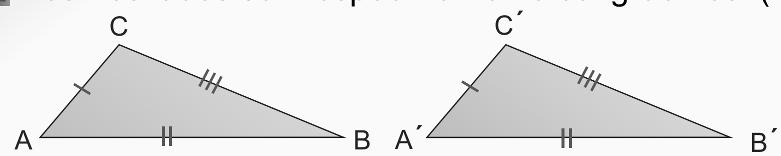


Compare el triángulo que acaba de construir, con los triángulos construidos por sus compañeros.

Criterios de congruencia de triángulos

Dos triángulos son congruentes si se satisface uno de los siguientes criterios:

1 Los tres lados son respectivamente congruentes. (LLL)

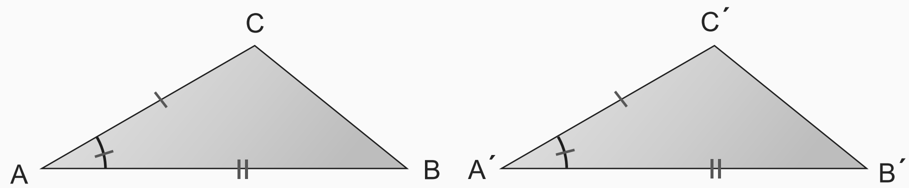


$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$

$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$

$\overline{CA} \cong \overline{C'A'}$

2 Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos son respectivamente congruentes. (LAL)

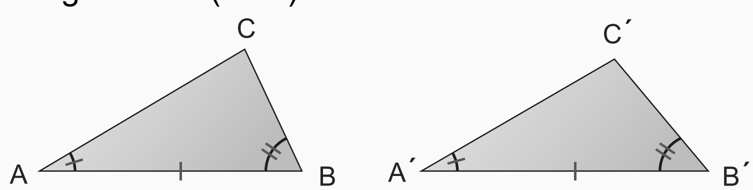


$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$

$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

$\angle A \cong \angle A'$

3 Un lado y los dos ángulos adyacentes a él son respectivamente congruentes. (ALA)



$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$

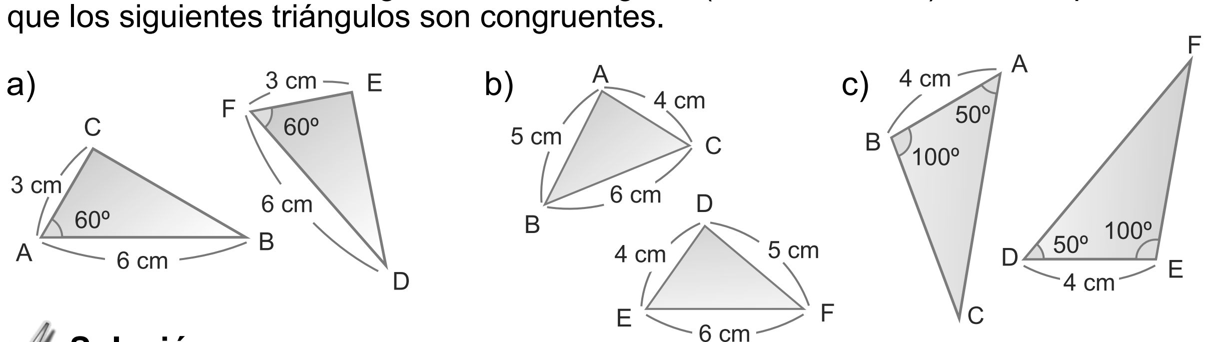
$\angle A \cong \angle A'$

$\angle B \cong \angle B'$

"Respectivamente" es ¡muy importante!

Ejemplo 3.4

Identifica el criterio de congruencia de triángulos (LLL, LAL, ALA) utilizado para indicar que los siguientes triángulos son congruentes.



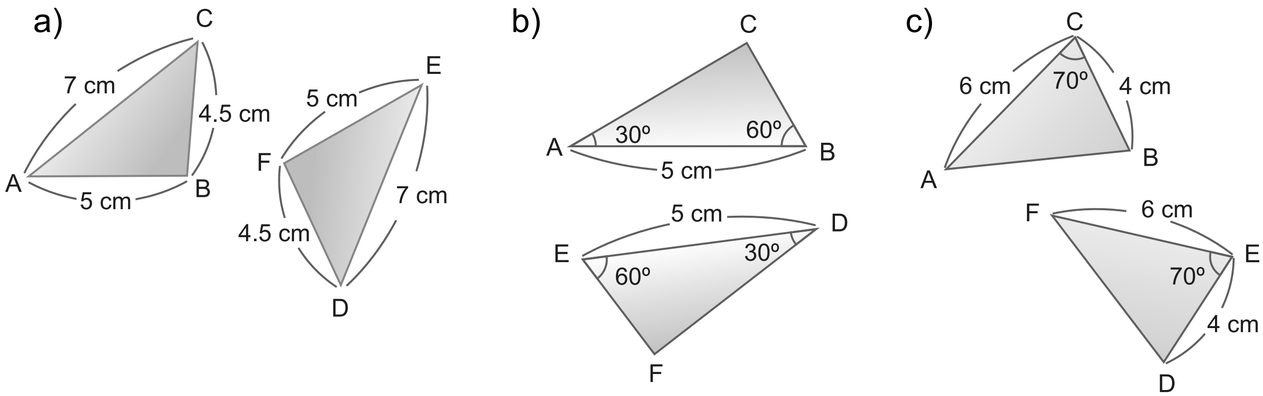
Solución:

a) Dado que $\overline{AC} \cong \overline{FE}$, $\angle A \cong \angle F$, $\overline{AB} \cong \overline{FD}$, se concluye que $\Delta ABC \cong \Delta FDE$ por criterio LAL.

b) Dado que $\overline{AB} \cong \overline{DF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DE}$, $\overline{CB} \cong \overline{EF}$, se concluye que $\Delta ABC \cong \Delta DFE$ por criterio LLL.

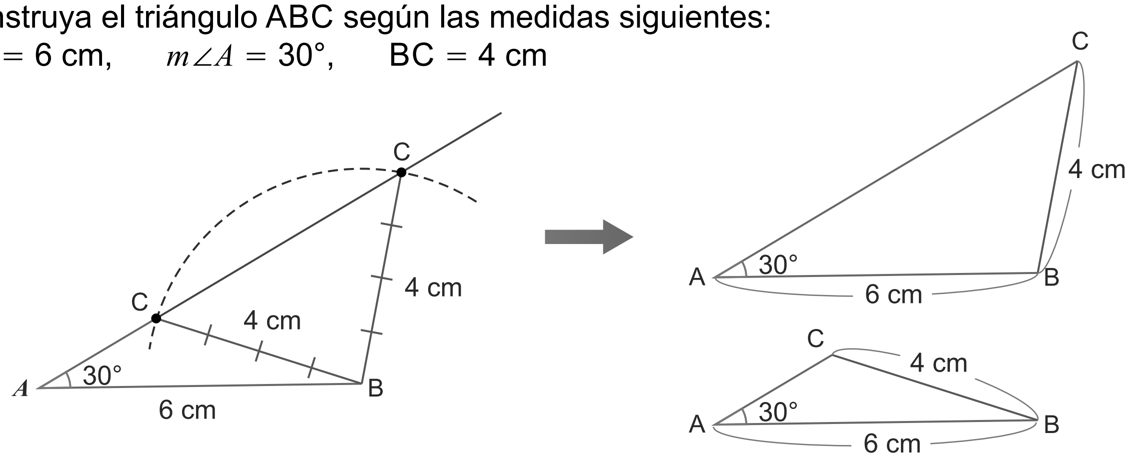
c) Dado que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, se concluye que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ por criterio ALA.

Ejercicio 3.3 Identifica el criterio de congruencia de triángulos (LLL, LAL, ALA) utilizado para indicar que los siguientes triángulos son congruentes.



Ejemplo 3.5

Construya el triángulo ABC según las medidas siguientes:
AB = 6 cm, $m\angle A = 30°$, BC = 4 cm



En esta construcción se puede observar que hay dos triángulos que cumplen las condiciones dadas, pero no son congruentes.

De este ejemplo se sabe que cuando están dadas las medidas de dos lados y un ángulo no comprendido entre ellos, hay casos en que se pueden producir 2 triángulos no congruentes: un triángulo obtusángulo y un triángulo acutángulo.

El caso Lado-Lado-Ángulo no comprendido se acostumbra llamarlo el caso ambiguo y por lo general, no puede tomarse como un criterio de congruencia de triángulos.

Ejercicio 3.4 Dibuja los ΔABC que cumplen con las siguientes medidas:
AB = 7 cm, $m\angle A = 40°$, BC = 5 cm

De aquí en adelante se focalizará en criterios de congruencia de triángulos, por lo que, para referirnos a ellos, se escribirá únicamente criterios de congruencia.

La demostración de la validez de una proposición a través del razonamiento se fundamenta en otras proposiciones ya demostradas.

El método de demostración a utilizar en este libro es el razonamiento directo o deductivo.

Por demostración directa se entiende el encadenamiento lógico de las proposiciones, de manera que, de la(s) hipótesis es posible llegar a la conclusión. La demostración en geometría generalmente consta de:

a) La **FIGURA** ilustra la proposición que desea demostrar y está constituida por trazos fundamentales y trazos auxiliares, estos últimos se indican con líneas no continuas. La claridad de la figura ayuda a la demostración, pero de ninguna manera constituye la demostración.

b) La **HIPÓTESIS** es el supuesto que se acepta como cierto y que sirve de base para el razonamiento.

c) El **RAZONAMIENTO** es el conjunto de afirmaciones y justificaciones que en orden lógico relacionan la hipótesis con la conclusión y permite la deducción de ésta a partir de la hipótesis.

d) La **CONCLUSIÓN** es la proposición deducida mediante el razonamiento.

Independientemente del grado de dificultad que tenga la demostración de una proposición siempre llevará el camino "hipótesis - conclusión". Es también muy conveniente prefijar un "Plan de desarrollo de la demostración" con el objeto de tener claro el camino que a nuestro juicio es el más conveniente para ligar lo que suponemos cierto (la hipótesis) con lo que deseamos demostrar (la conclusión).

Un tipo de proposición importante para el razonamiento deductivo tiene la forma:

Si ______ entonces ______

Hipótesis *Conclusión*

Ejemplo 3.6

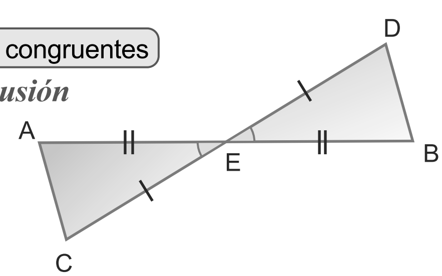
Auxiliándose de la figura y dada la siguiente proposición, formúlense la hipótesis y la conclusión.

Si el segmento AB y el segmento CD se bisecan en el punto E, demuestre que los segmentos AC y BD son congruentes.

Solución:

Si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisecan en E entonces $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son congruentes

Hipótesis *Conclusión*



Que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisequen en E, significa que el punto E es el punto medio de $\overline{AB}$ y también el punto medio de $\overline{CD}$,

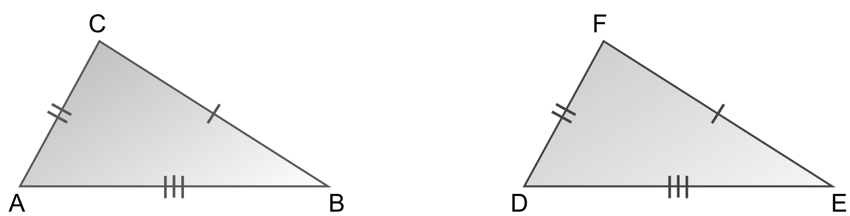
Por lo anterior, la hipótesis y la conclusión pueden reescribirse de esta forma:

Hipótesis: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisecan en E, $\overline{EA} \cong \overline{EB}$, $\overline{EC} \cong \overline{ED}$.

Conclusión: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

Ejercicio 3.5 Auxiliándose de la figura y dadas las siguientes proposiciones, formúlense la hipótesis y la conclusión.

Si los tres lados de un triángulo son respectivamente congruentes con los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

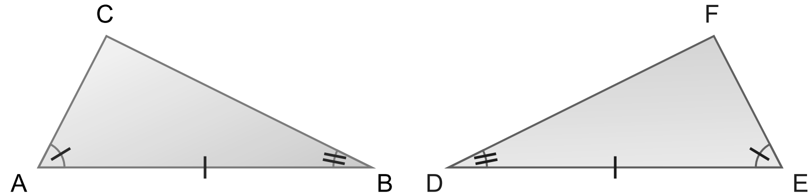


Hipótesis:

Conclusión:

Ejemplo 3.7

En las figuras siguientes, el lado AB es congruente con el lado ED y los ángulos A y B son también congruentes con los ángulos E y D respectivamente, demuestre la congruencia de los triángulos ABC y EDF.



Solución:

Resulta útil organizar el pensamiento al formular la demostración en dos columnas. La columna izquierda se usa para las proposiciones que llevan a la conclusión deseada. La columna de la derecha da las justificaciones o razones por las cuales las proposiciones son verdaderas.

Hipótesis: $\overline{AB} \cong \overline{ED}$
$\angle A \cong \angle E$
$\angle B \cong \angle D$

Conclusión: $\Delta ABC \cong$

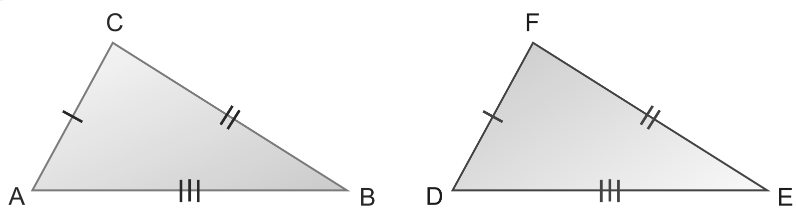
Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{AB} \cong \overline{ED}$	$\boxed{\text{Por hipótesis}}$
2) $\angle A \cong \boxed{\angle E}$	Por hipótesis
3) $\boxed{\angle B} \cong \angle D$	Por hipótesis
4) $\Delta ABC \cong \Delta EDF$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia $\boxed{\text{ALA}}$

Al justificar "por hipótesis", es la información dada.

Ejercicio 3.6

En las figuras dadas, los lados AB, AC y CB son congruentes con los lados DE, DF y FE respectivamente, demuestre la congruencia de los triángulos ABC y DEF.

Hipótesis: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$
$\overline{AC} \cong \overline{DF}$
$\overline{CB} \cong \overline{FE}$



Conclusión: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

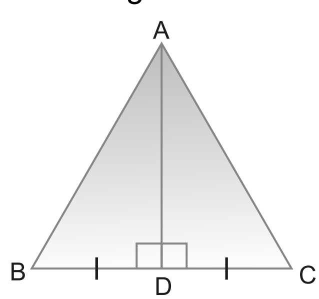
Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{AB} \cong \boxed{}$	Por hipótesis
2) $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	$\boxed{}$
3) $\boxed{} \cong \overline{FE}$	Por hipótesis
4) $\Delta ABC \cong \Delta DFE$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia $\boxed{}$

Ejemplo 3.8

En el siguiente triángulo ABC, el segmento AD es la mediatriz del $\overline{BC}$, demuestre que el segmento AB es congruente con el segmento AC.

Hipótesis: $\overline{BD} \cong \overline{CD}$
$\overline{AD} \perp \overline{BC}$

Conclusión: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$



Solución:

El plan de desarrollo de la demostración es

Observar la relación entre $\triangle ABD$ y $\triangle ACD$

$\overline{BD} \cong \overline{CD}$ $\quad$ $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ....Utilizar la información dada (Hipótesis)

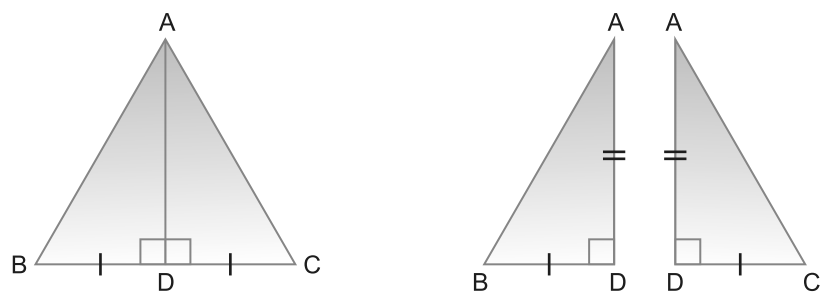
Aplicar definiciones, propiedades
Utilizar criterios de congruencia

$\triangle ABD \cong \triangle ACD$

Utilizar lados correspondientes

$\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ....Llegar a la conclusión

Entre $\triangle ABD$ y $\triangle ACD$ se observa que 2 lados y el ángulo comprendido entre ellos son respectivamente congruentes. Al demostrar que $\triangle ABD \cong \triangle ACD$, se puede utilizar sus lados correspondientes para llegar a la conclusión.



Entre $\triangle ABD$ y $\triangle ACD$,

$\overline{AD} \cong \overline{AD}$ puede usarse para obtener un segundo par de lados congruentes.

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{BD} \cong \overline{CD}$	Por hipótesis
2) $\overline{AD} \perp \overline{BC}$	Por hipótesis
3) $\angle ADB \cong \angle ADC$	Por 2) y ser ambos ángulos rectos
4) $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	Por congruencia del mismo segmento
5) $\triangle ABD \cong \triangle ACD$	Por 1), 3), 4) y criterio de congruencia LAL
6) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	Por 5) y ser lados correspondientes de triángulos congruentes.

Ejemplo 3.9

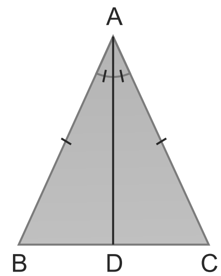
En la siguiente figura, los segmentos AB y AC son congruentes y el segmento AD biseca al ángulo BAC, demuestre que los segmentos BD y CD son congruentes.

Solución:

Hipótesis: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

$\angle BAD \cong \angle CAD$

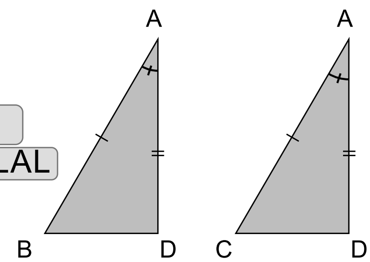
Conclusión: $\overline{BD} \cong \overline{CD}$



Recuerde que el camino para llegar a la conclusión es primero observar la relación entre ΔABD y ΔACD.

Entre Δ ABD y Δ ACD,

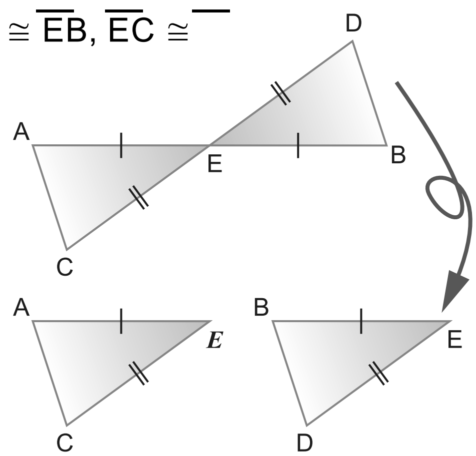
Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	Por hipótesis
2) $\angle BAD \cong \angle CAD$	Por hipótesis
3) $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	Por congruencia del mismo segmento
	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia LAL
	Por 4) y ser lados correspondientes de triángulos congruentes



Ejercicio 3.7 En la siguiente figura, el segmento AB y el segmento CD se bisecan en el punto E, demuestre que los segmentos AC y BD son congruentes.

Hipótesis: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisecan en E. ($\overline{EA} \cong \overline{EB}$, $\overline{EC} \cong \overline{ED}$)

Conclusión: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

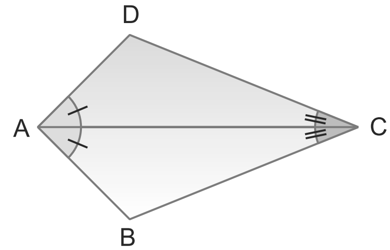


Entre Δ y Δ,

Afirmaciones	Justificaciones
1) ___ $\cong \overline{EB}$	Por hipótesis
2) $\overline{EC} \cong \overline{ED}$	___
3) $\angle AEC \cong \angle BED$	Por ser ángulos ___
4) ___	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia ___
5) $\overline{AC} \cong \overline{BD}$	Por 4) y ser ___ correspondientes de triángulos congruentes

Ejemplo 3.10

En la siguiente figura, si el segmento AC es bisectriz de los ángulos DAB y BCD, demuestre que los lados DC y BC son congruentes.



Solución:

Paso 1: Identificar la hipótesis y la conclusión

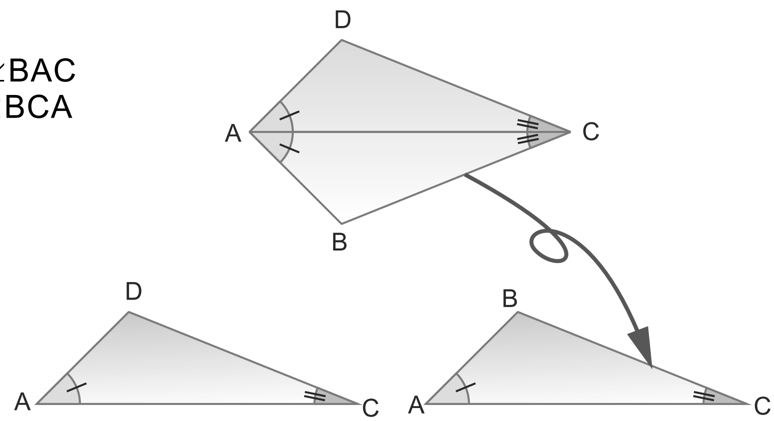
Que el segmento AC sea bisectriz del $\angle DAB$ significa que el $\overline{AC}$ divide al $\angle DAB$ en dos ángulos congruentes.
En la figura se pueden observar que $\angle DAC \cong \angle BAC$.

Para el $\angle BCD$ significa lo mismo, es decir, el $\overline{AC}$ divide al $\angle BCD$ en dos ángulos congruentes, esto es, $\angle DCA \cong \angle BCA$.

Luego, hipótesis y la conclusión son:

Hipótesis: $\angle DAC \cong \angle BAC$
$\angle DCA \cong \angle BCA$

Conclusión: $\overline{DC} \cong \overline{BC}$



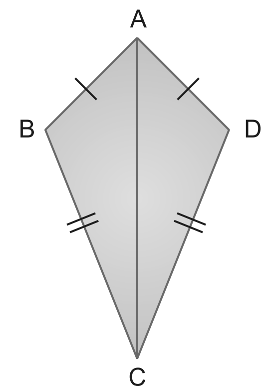
Paso 2: Completar el esquema de demostración
El camino para llegar a la conclusión es primero observar la relación entre ΔADC y ΔABC

Entre ΔADC y ΔABC ,

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $\angle DAC \cong \angle BAC$	Por hipótesis
2) $\overline{AC} \cong \overline{AC}$	Por congruencia del mismo segmento
3) $\angle DCA \cong \angle BCA$	Por hipótesis
4) $\Delta ADC \cong \Delta ABC$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia ALA
5) $\overline{DC} \cong \overline{BC}$	Por 4) y ser lados correspondientes de triángulos congruentes

Ejercicio 3.8 Si el cuadrilátero ABCD tiene dos pares de lados congruentes, $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DC}$, entonces los ángulos B y D también son congruentes.

a) Identifique la hipótesis y la conclusión
b) Complete el esquema de demostración



Hipótesis: ______

Conclusión: ______

Entre Δ ______ y Δ ______,

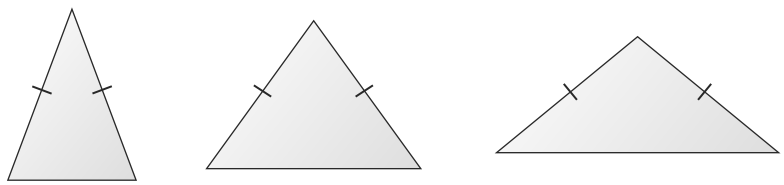
Afirmaciones	**Justificaciones**
1) ______ $\cong \overline{AD}$	Por hipótesis
2) $\overline{BC} \cong \overline{DC}$	______
3) ______ $\cong \overline{AC}$	Por congruencia del mismo segmento
4) $\Delta ABC \cong \Delta ADC$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia ______
5) ______ $\cong \angle D$	Por 4) y ser ______ correspondientes de triángulos congruentes

Lección 4: Triángulos isósceles y rectángulo

Sección 1: Triángulos isósceles

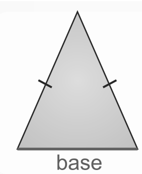
En 3er grado se identificaron varios tipos de triángulos y se clasificaron de acuerdo a la medida de sus lados y también de acuerdo a la medida de sus ángulos. En esta lección se harán demostraciones de las características de los triángulos isósceles aplicando lo que se ha aprendido en lecciones anteriores.

Observa los siguientes triángulos:



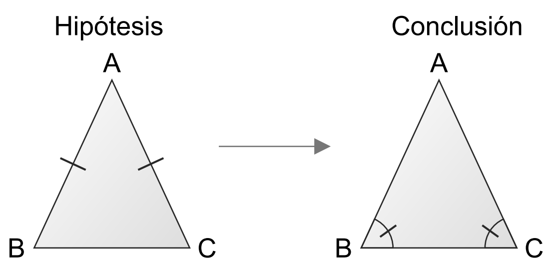
Los triángulos presentados tienen diferente tamaño pero todos coinciden en que cada uno tiene dos lados de igual medida (congruentes).

Un triángulo que tenga un par de lados congruentes, es un **triángulo isósceles**.



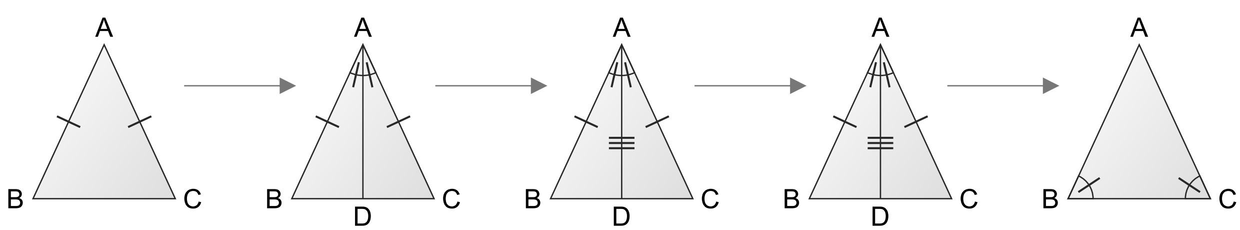
Ejemplo 4.1

Sea el $\triangle ABC$ isósceles, donde $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, demuestre que los dos ángulos opuestos, estos son, $\angle B$ y $\angle C$, son congruentes entre sí.



Solución:

Los dibujos nos muestran el proceso que se seguirá para hacer la demostración.

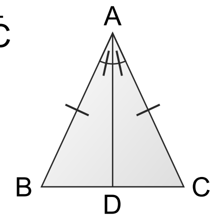


$\triangle ABD \cong \triangle ACD$

Se parte de que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ por ser un triángulo isósceles, luego se trazará $\overline{AD}$ que es la bisectriz del ángulo BAC, hasta llegar a la conclusión $\angle B \cong \angle C$.

La construcción del $\overline{AD}$ como bisectriz del $\angle BAC$, se incluirá en la hipótesis de la demostración, por lo que el esquema de demostración es el siguiente:

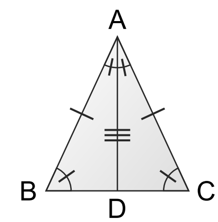
Hipótesis: ΔABC es isósceles, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
$\overline{AD}$ es bisectriz del $\angle BAC$



Para llegar a la conclusión lo primero es observar la relación entre ΔABD y ΔACD.

Conclusión: $\angle B \cong \angle C$

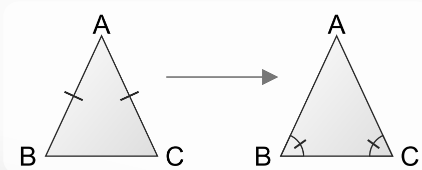
Entre Δ ABD y Δ ACD,



Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	Por hipótesis
2) $\angle BAD \cong \angle CAD$	Por hipótesis
3) $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	Por congruencia del mismo segmento
4) $\Delta ABD \cong \Delta ACD$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia LAL
5) $\angle B \cong \angle C$	Por 4) y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes

La demostración anterior puede enunciarse como la siguiente propiedad de triángulos isósceles:

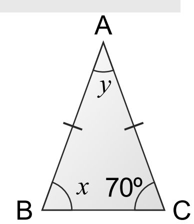
Propiedad 1 de triángulos isósceles:
Si dos lados de un triángulo son congruentes entonces los ángulos opuestos a estos son congruentes.



$\angle B$ y $\angle C$ también se les llama ángulos basales

Ejemplo 4.2

Dado que el ΔABC es isósceles donde $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, encuentre la medida de los ángulos x y y



Solución:

Aplicando la propiedad 1 de los triángulos isósceles tenemos que:
$m\angle x = 70°$ (1)

Luego, la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°, entonces:
$m\angle x + m\angle y + 70° = 180°$ (2)

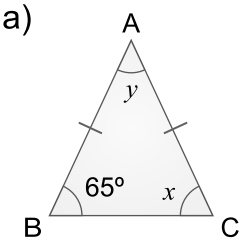
Sustituyendo (1) en (2):

$70° + m\angle y + 70° = 180°$
$m\angle y + 140° = 180°$
$m\angle y = 180° - 140°$
$m\angle y = 40°$

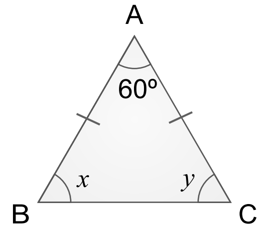
Respuesta: $m\angle x = 70°$, $m\angle y = 40°$

Ejercicio 4.1 Dado que los siguientes triángulos ABC son isósceles, donde $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, encuentre la medida de los ángulos x y y.

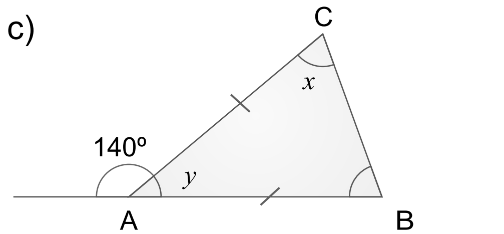
a)



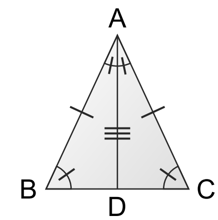
b)



c)



Observando la congruencia de los triángulos ABD y ACD (paso 4 del **Ejemplo 4.1**), además de concluir que $\angle B \cong \angle C$, se puede llegar a estas dos conclusiones:



1) $\overline{BD} \cong \overline{CD}$, por lo tanto, el punto D es el punto medio del $\overline{BC}$.

2) $\angle ADB \cong \angle ADC$ y por ser suplementarios, entonces

$m\angle ADB = m\angle ADC = 90°$.

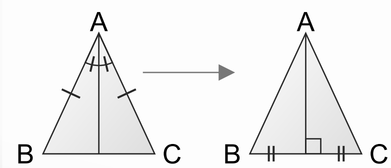
Por 1) y 2), $\overline{AD}$ es mediatriz del $\overline{BC}$.

De lo anterior, se deduce la siguiente propiedad:

Propiedad 2 de triángulos isósceles

La bisectriz de un ángulo comprendido entre dos lados congruentes es también la mediatriz del lado opuesto.

Se sabe que el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto se llama **mediana**.



Ejemplo 4.3

Los triángulos ABC son isósceles, donde $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ y $\overline{AD}$ es la bisectriz del $\angle BAC$.

Encuentre para la figura [a] : medida del segmento DC

Encuentre para la figura [b] : medida del ángulo ADC

Figura [a]

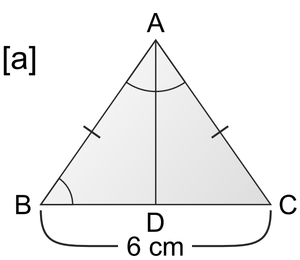
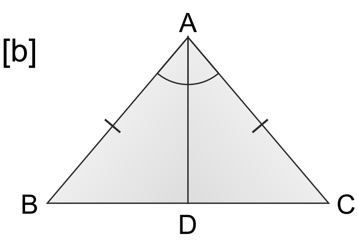


Figura [b]



Aplicando la propiedad 2, se tiene que:

Solución

Figura [a] $DC = \frac{1}{2}\ BC = 3$ cm

Figura [b] $m\angle ADC = 90°$

En un triángulo isósceles la bisectriz, mediatriz, altura y mediana relativas a la base se encuentran en la misma recta.

Ejercicio 4.2 Los triángulos ABC son isósceles, donde $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ y $\overline{AD}$ es la bisectriz del $\angle$BAC.
Encuentre para la figura [a] : medida del $\overline{DC}$
Encuentre para la figura [b] : medida del $\angle$ADC

Figura [a]

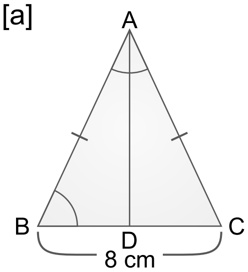
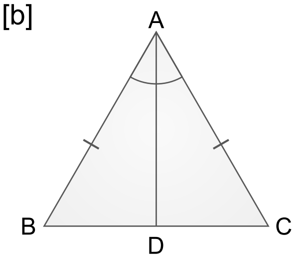
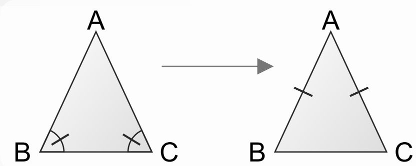


Figura [b]



En el caso de las propiedades **1** y **2**, primero se hizo la demostración y luego se enunciaron. Para la propiedad **3**, primero se enunciará y luego se hará la demostración.

Propiedad 3 de triángulos isósceles
Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces ese triángulo es isósceles.



Ejemplo 4.4

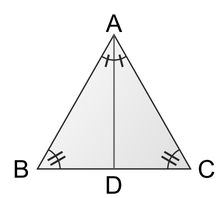
Sea el ΔABC, demuestre que si $\angle B \cong \angle C$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, es decir, ΔABC es isósceles.

Solución:

Para demostrar esta propiedad del triángulo isósceles, se trazará $\overline{AD}$ como bisectriz del $\angle$BAC y se incluirá en la hipótesis de la demostración, por lo que el esquema de demostración es el siguiente:

Hipótesis: $\angle B \cong \angle C$
$\overline{AD}$ es bisectriz del $\angle$BAC ($\angle BAD \cong \angle CAD$)

Conclusión: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (Δ ABC es isósceles)

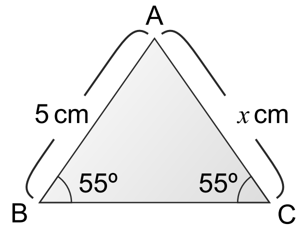


Entre Δ ABD y Δ ACD,

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $\angle BAD \cong \angle CAD$	Por hipótesis
2) $\angle B \cong \angle C$	Por hipótesis
3) $m\angle ADB = 180° - (m\angle BAD + m\angle B)$	Por 1), 2) y por la propiedad de la suma de las medidas de ángulos internos de un triángulo
4) $m\angle ADC = 180° - (m\angle CAD + m\angle C)$	Por 1), 2) y por la propiedad de la suma de las medidas de ángulos internos de un triángulo
5) $m\angle ADB = m\angle ADC$	Por 1), 2), 3) y 4)
6) $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	Por congruencia del mismo segmento
7) $\Delta ABD \cong \Delta ACD$	Por 1), 5), 6) y criterio de congruencia ALA
8) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	Por 7) y ser lados correspondientes de triángulos congruentes

Ejemplo 4.5

Encuentre la medida del lado AC. Observe que los ángulos de la base son congruentes.



Solución:

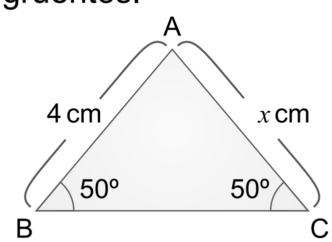
Aplicando la propiedad **3** "Si dos ángulos de un triángulo son congruentes entonces los lados opuestos a éstos son congruentes".

$x = 5$

Respuesta: AC $=$ 5 cm

Ejercicio 4.3

Encuentre la medida del lado AC. Observe que los ángulos de la base son congruentes.



Sección 2: *Triángulo equilátero*

Aplicando el conocimiento sobre las propiedades de congruencia de triángulos isósceles ahora se va a demostrar que en un triángulo equilátero los tres ángulos son congruentes y cada uno mide 60°.

Ejemplo 4.6

Si el $\triangle$ABC es equilátero, analice y responda:

a) ¿Cuál es la relación entre las medidas del $\angle$B y $\angle$C?

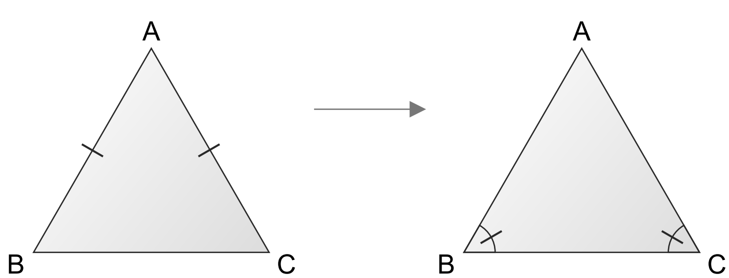
b) ¿Cuál es la relación entre las medidas del $\angle$A y $\angle$B?

c) ¿Cuáles son las medidas de los tres ángulos?

Solución:

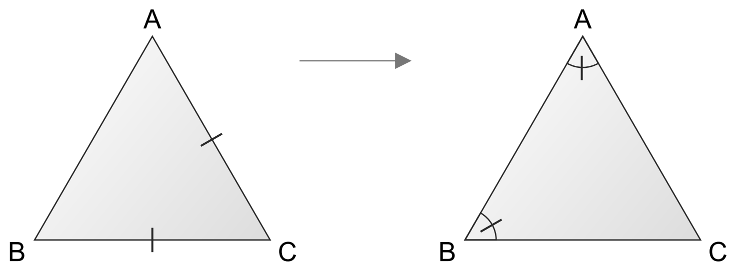
a) Si el $\triangle$ABC es equilátero, entonces $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Por tanto, $\triangle$ABC también es isósceles.

Aplicando la propiedad **1** de triángulos isósceles, se tiene que $\angle B \cong \angle C$.



b) Como $\overline{CA} \cong \overline{CB}$, aplicando la propiedad **1** de triángulos isósceles, se tiene que

$\angle A \cong \angle B$



c) Por a) y b), $\angle B \cong \angle C$ y $\angle A \cong \angle B$, por tanto, $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ **c**

Por la propiedad de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo, se tiene que:

$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$ **d**

Sustituyendo, **c** en **d**

$m\angle A + m\angle A + m\angle A = 180°$

$m\angle A = 60°$

Por tanto, $m\angle A = m\angle B = m\angle C = 60°$

Un triángulo equilátero tiene sus tres lados y sus tres ángulos congruentes.

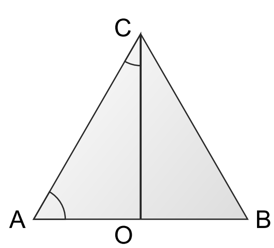
Ejemplo 4.7

Si el ΔABC es equilátero y $\overline{CO}$ es bisectriz del $\angle ACB$ encuentre:

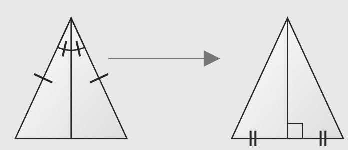
a) $m\angle CAO$

b) $m\angle OCA$

c) $m\angle BOC$



Propiedad **2** de triángulos isósceles



Solución:

a) $m\angle CAO = 60°$ por ser triángulo equilátero

b) $m\angle OCA = 30°$ por ser $\overline{CO}$ bisectriz del $\angle ACB$

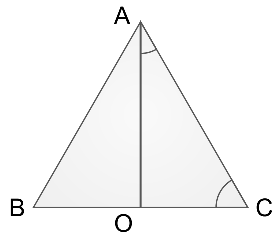
c) Si el ΔABC es equilátero, entonces se puede pensar como en el caso del triángulo isósceles, de tal manera que $\overline{CA} \cong \overline{CB}$ y al ser $\overline{CO}$ bisectriz del $\angle ACB$, es también mediatriz del $\overline{AB}$, esto es, $\overline{CO} \perp \overline{AB}$, por tanto $m\angle BOC = 90°$

Ejercicio 4.4 Si el ΔABC es equilátero y $\overline{AO}$ es bisectriz del $\angle$BAC, encuentre:

a) $m\angle$ACB

b) $m\angle$CAO

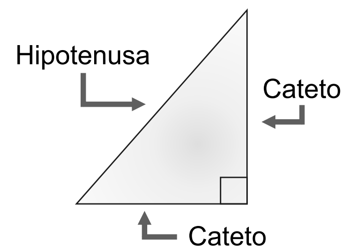
c) $m\angle$BOA



Sección 3: Criterios de congruencia de triángulos rectángulos

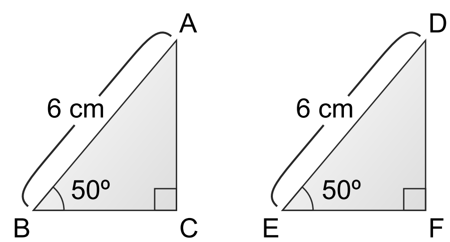
Recordando
Triángulo rectángulo es un triángulo que tiene un ángulo recto.

La **hipotenusa** es el lado opuesto al ángulo recto y es el de mayor longitud.
Los **catetos** son los otros dos lados que forman el ángulo recto.



Ejemplo 4.8

Auxiliándose de la figura de la derecha, demuestre que los triángulos ABC y DEF son congruentes



Solución:

Entre ΔABC y ΔDEF,

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) AB $\cong$ DE	Por hipótesis
2) $\angle$B $\cong$ $\angle$E	Por hipótesis
3) $\angle$C $\cong$ $\angle$F	Por hipótesis

4) Por la propiedad de la suma de las medidas de los ángulos internos de ΔABC y ΔDEF, se tiene que:

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180° \qquad m\angle D + m\angle E + m\angle F = 180°$$
$$m\angle A + 50° + 90° = 180° \qquad m\angle D + 50° + 90° = 180°$$
$$m\angle A + 140° = 180° \qquad m\angle D + 140° = 180°$$
$$m\angle A = 180° - 140° \qquad m\angle D = 180° - 140°$$
$$m\angle A = 40° \qquad m\angle D = 40°$$

5) $m\angle A = m\angle D = 40°$	Por 4)
6) ΔABC $\cong$ ΔDEF	Por 1), 2), 5) y criterio de congruencia ALA

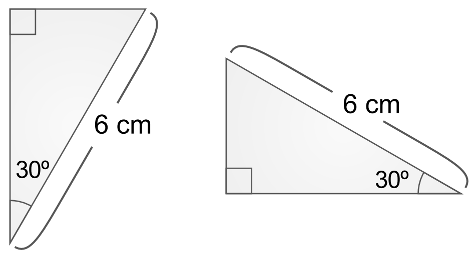
Del **Ejemplo 4.8** se muestra que dos triángulos rectángulos son congruentes si la hipotenusa y un ángulo agudo son congruentes respectivamente.

Ejercicio 4.5 ¿Qué criterio de congruencia indica que los siguientes triángulos rectángulos son congruentes?

a) LLL

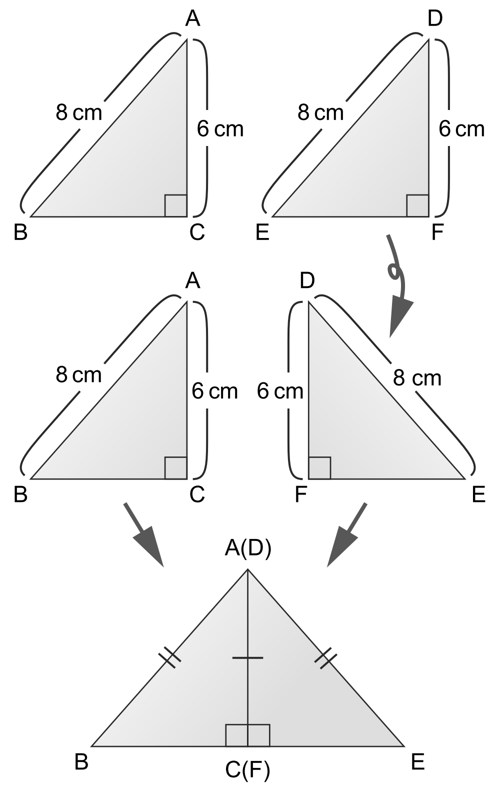
b) LAL

c) ALA



Ejemplo 4.9

Auxiliándose de la figura de la derecha, demuestre que los triángulos ABC y DEF son congruentes.



Solución:

Al voltear el ΔDEF, se observa que AC $=$ DF. Además, como $m\angle$BCA $+$ $m\angle$EFD $=$ 90° $+$ 90° $=$ 180°, entonces cuando se unen el ΔABC y el ΔDEF por los lados AC y DF, los puntos B, C(F) y E son colineales. Por lo tanto, el ΔABE que se forma es isósceles.

El esquema de demostración es el siguiente:

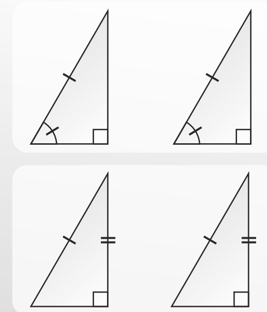
Entre ΔABC y ΔDEF,

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $\overline{AB} \cong \overline{DE}$	Por hipótesis
2) $\angle B \cong \angle E$	Por construcción de triángulos isósceles ABE
3) $\angle C \cong \angle F$	Por hipótesis (son ángulos rectos)
4) $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$ $m\angle D + m\angle E + m\angle F = 180°$	Por la propiedad de la suma de las medidas de los ángulos internos de ΔABC y ΔDEF
5) $m\angle A = m\angle D$	Por 2), 3) y 4)
6) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$	Por 1), 2), 5) y criterio de congruencia ALA

De este **Ejemplo 4.9** se muestra que dos triángulos rectángulos son congruentes si la hipotenusa y un cateto son congruentes respectivamente.

Criterios de congruencia de triángulos rectángulos

Dos triángulos rectángulos son congruentes si se satisface uno de los siguientes criterios:



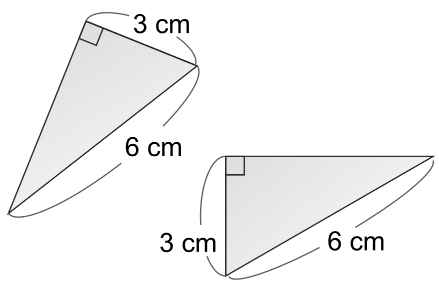
1. La hipotenusa y un ángulo agudo son respectivamente congruentes (hipotenusa - ángulo).

2. La hipotenusa y un cateto son respectivamente congruentes (hipotenusa - cateto).

Ejemplo 4.10

¿Cuál de los siguientes criterios es utilizado para indicar que el siguiente par de triángulos rectángulos es congruente?

1. Hipotenusa - ángulo
2. Hipotenusa - cateto

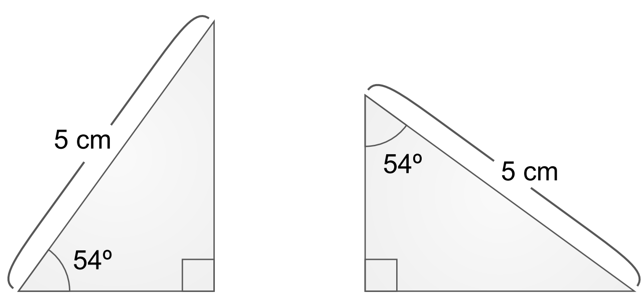


Solución:

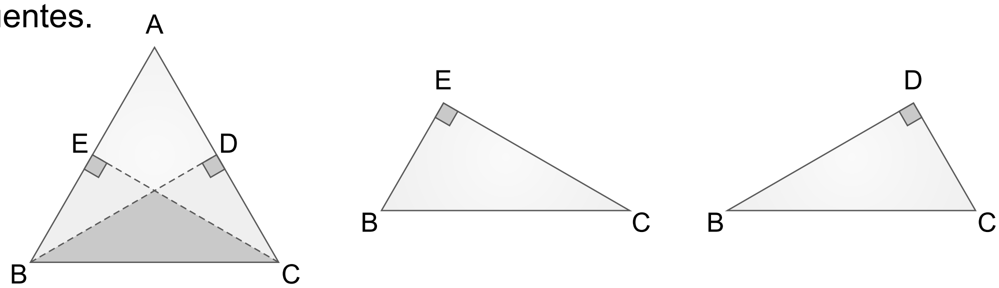
El criterio 2: "La hipotenusa y un cateto son respectivamente congruentes".

Ejercicio 4.6 ¿Cuál de los siguientes criterios es utilizado para indicar que el siguiente par de triángulos rectángulos es congruente?

1. Hipotenusa - ángulo
2. Hipotenusa - cateto



Ejercicio 4.7 Dado el ΔABC isósceles, donde $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Sean los puntos E y D en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, se cumple que $\overline{AB} \perp \overline{CE}$ y $\overline{AC} \perp \overline{BD}$. Demuestre que la pareja de triángulos rectángulos BCE y CBD son congruentes.



Solución:

Hipótesis: ΔABC es isósceles $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

$\overline{AB} \perp \overline{CE}$

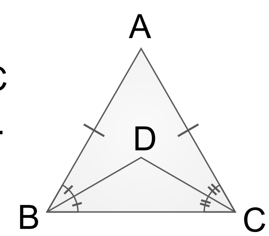
$\overline{AC} \perp \overline{BD}$

Conclusión: $\Delta BCE \cong \Delta CBD$

Entre ΔBCE y ΔCBD,

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	____
2) ____ $\cong \angle DCB$	Por 1) y propiedad de triángulo isósceles al ΔABC
3) $\overline{BC} \cong$ ____	Por congruencia del mismo segmento
4) $m\angle BEC =$ ____ $= 90°$	Por hipótesis
5) $\Delta BCE \cong \Delta CBD$	Por ____, ____ y criterio de congruencia ____ de triángulos rectángulos

Ejercicio 4.8 El ΔABC es isósceles, las bisectrices de los ángulos opuestos a los lados congruentes $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se cortan en un punto D. Demuestre que $\overline{DB} \cong \overline{DC}$.



Solución:

Hipótesis: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

$\overline{BD}$ y $\overline{CD}$ son bisectrices de $\angle ABC$ y $\angle ACB$ respectivamente

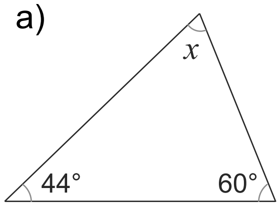
Conclusión: $\overline{DB} \cong \overline{DC}$

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\angle ABC \cong$ ____	Por hipótesis y propiedad de triángulo isósceles al ΔABC
2) ____ $= \frac{1}{2} m\angle ABC$	Por hipótesis ($\overline{BD}$ es bisectriz del $\angle ABC$)
3) $m\angle DCB =$ ____	Por hipótesis ($\overline{CD}$ es bisectriz del ____)
4) $m\angle DBC =$ ____	Por 1), 2) y 3)
5) $\overline{DB} \cong$ ____	Por 4) y propiedad de triángulo isósceles al ΔDCB

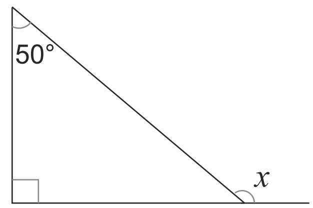
Ejercicios

1 Encuentre la medida del $\angle x$.

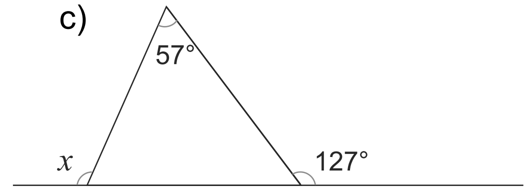
a)



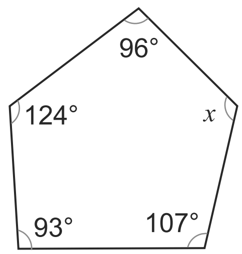
b)



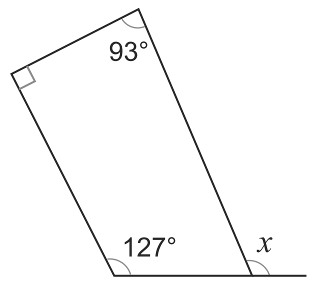
c)



d)



e)



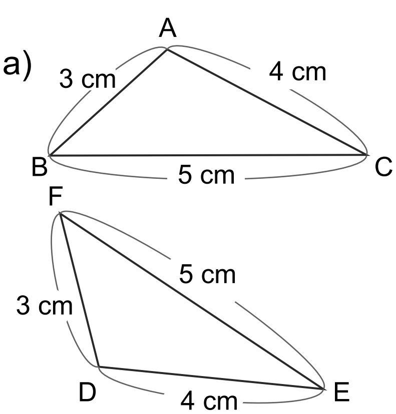
2 ¿Cuál es la suma de las medidas de los ángulos internos de un decágono?

a) 1800° b) 1440° c) 1260° d) 900°

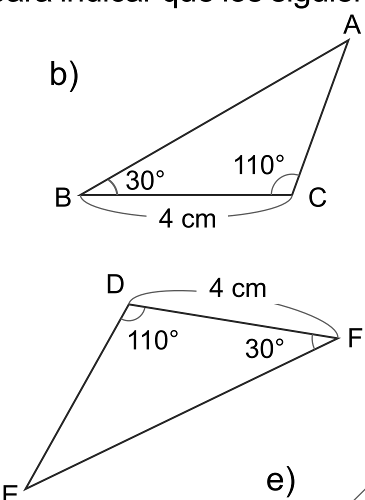
3 Si el ΔABC es congruente con el ΔEFD. ¿cómo se corresponden los vértices, los lados y los ángulos de ambos triángulos?

4 Identifique el criterio de congruencia de triángulos (LLL, LAL, ALA, hipotenusa - ángulo, hipotenusa - cateto) utilizado para indicar que los siguientes triángulos son congruentes.

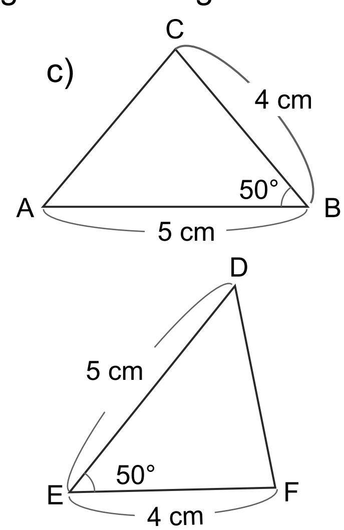
a)



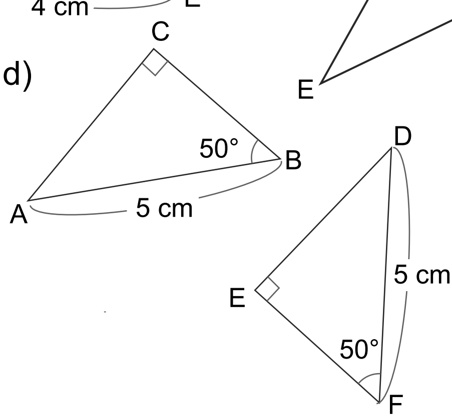
b)



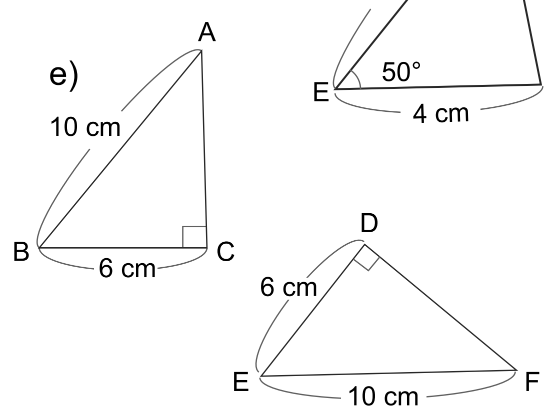
c)



d)

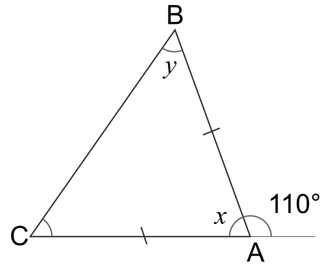


e)

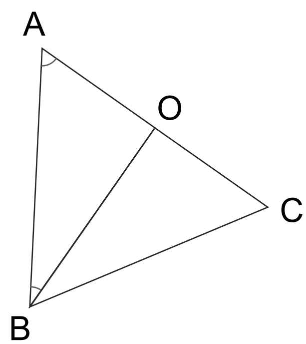


5 ¿Será posible construir un único ΔABC donde $AB = 7$ cm, $m\angle A = 50°$ y $BC = 6$ cm? Haga la construcción.

6 Dado que el ΔABC es isósceles donde $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, encuentre la medida del $\angle x$ y $\angle y$



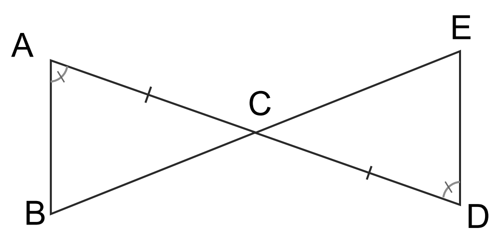
7 Dado que el ΔABC es equilátero y BO es bisectriz del $\angle ABC$, encuentre la medida del $\angle OAB$, $\angle OBA$ y $\angle COB$.



8 El segmento AD y el segmento BE se cruzan en el punto C. Dado que C es el punto medio del $\overline{AD}$ y $m\angle CAB = m\angle CDE$, demuestre que los triángulos ABC y DEC son congruentes.

a) Identifique la hipótesis y la conclusión

b) Complete el esquema de demostración



Hipótesis ______

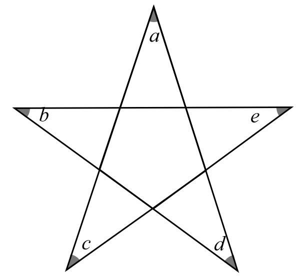
Conclusión ______

Entre ΔABC y ΔDEC ,

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) ____ $\cong \overline{DC}$	Por hipótesis
2) $\angle CAB \cong \angle CDE$	______
3) $\angle ACB \cong$ ____	Por ser ángulos ______
4) ______	Por ___, ___, ___ y criterio de congruencia ___

¿Cuál es la suma total de las medidas de los ángulos resaltados en la estrella?

$$m\angle a + m\angle b + m\angle c + m\angle d + m\angle e = ¿?$$

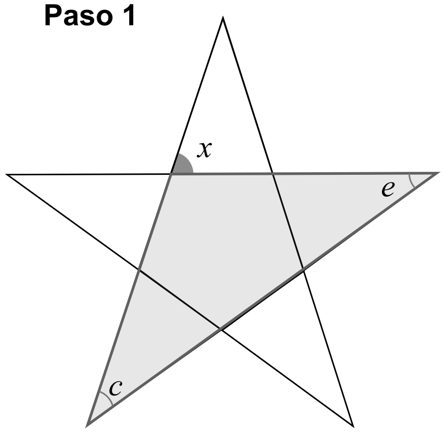


Recordemos

1. La medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no contiguos.
2. La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180º.

Solución:

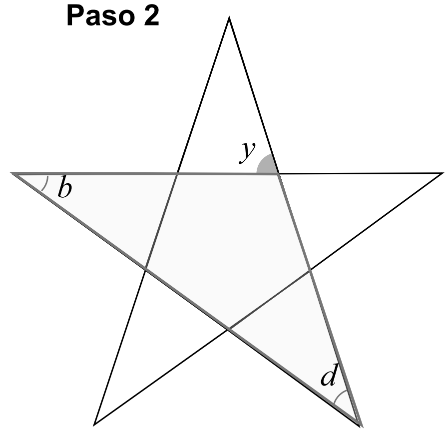
Paso 1



El ángulo x es un ángulo externo del triángulo rojo, y es igual a la suma de las medidas del ángulo c y el ángulo e.

$$m\angle x = m\angle c + m\angle e$$

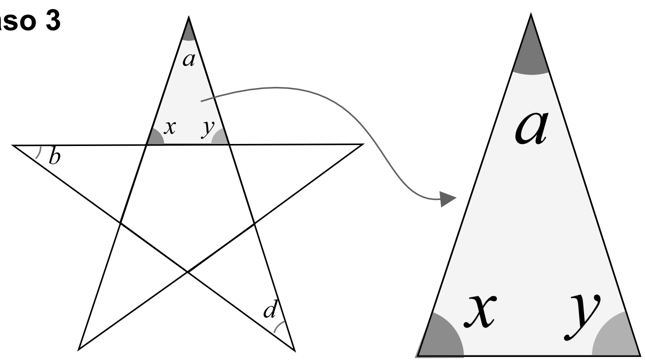
Paso 2



El ángulo y es un ángulo externo del triángulo azul, y es igual a la suma de las medidas del ángulo b y el ángulo d.

$$m\angle y = m\angle b + m\angle d$$

Paso 3



La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°. Entonces,

$$m\angle a + m\angle x + m\angle y = 180°$$

Por pasos 1 y 2:

$$m\angle a + m\angle x + m\angle y = 180°$$
$$m\angle a + (m\angle c + m\angle e) + (m\angle b + m\angle d) = 180°$$
$$m\angle a + m\angle b + m\angle c + m\angle d + m\angle e = 180°$$

Respuesta: 180°

Unidad 5

Cuadriláteros

Lección 1: Cuadriláteros

Unidad 5

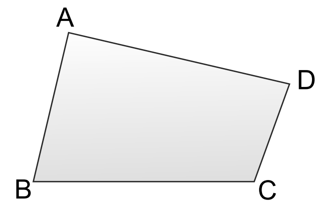
Cuadriláteros

Lección 1: Cuadriláteros

Sección 1: Cuadriláteros

Ejemplo 1.1

Observe el cuadrilátero ABCD y conteste lo siguiente:



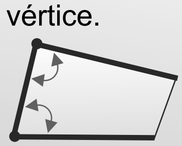
a) ¿Qué lados del cuadrilátero coinciden en los mismos vértices con el $\overline{AD}$?
b) ¿Qué lados del cuadrilátero NO coinciden en ningún vértice con el $\overline{AD}$?
c) ¿Qué ángulos del cuadrilátero comparten un lado con el $\angle A$?
d) ¿Qué ángulos del cuadrilátero NO comparten un lado con el $\angle A$?

Solución:

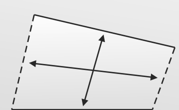
a) $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ coinciden en los vértices A y D con el $\overline{AD}$ respectivamente.
b) $\overline{BC}$ NO coincide en ningún vértice con el $\overline{AD}$.
c) $\angle B$ y $\angle D$ comparten el $\overline{AB}$ y el $\overline{AD}$ con el $\angle A$ respectivamente.
d) $\angle C$ NO comparte ningún lado con el $\angle A$.

En un cuadrilátero:

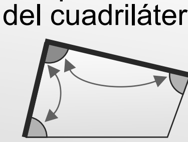
Dos lados son **adyacentes** si coinciden en un vértice.



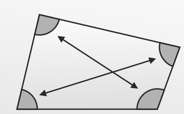
Dos lados son **opuestos** si NO coinciden en un vértice.



Dos ángulos son **adyacentes** si comparten un lado del cuadrilátero.



Dos ángulos son **opuestos** si NO comparten un lado del cuadrilátero.

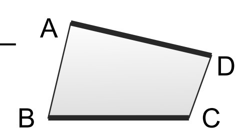


Ejemplo 1.2

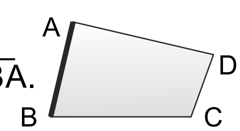
En el **Ejemplo 1.1** identifique:
a) Lados adyacentes al $\overline{CD}$.
b) Lado opuesto al $\overline{CD}$.

Solución:

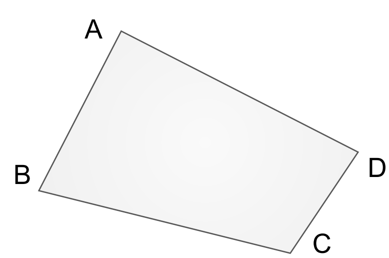
a) Lados adyacentes al $\overline{CD}$ son $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.



b) Lado opuesto al $\overline{CD}$ es el $\overline{BA}$.



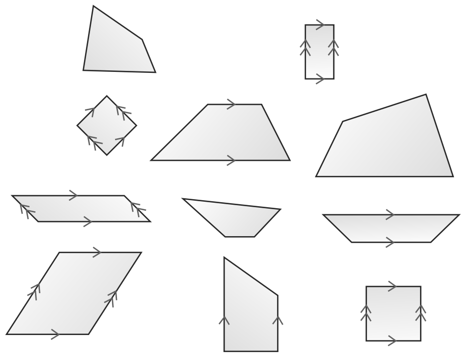
Ejercicio 1.1 En el cuadrilátero ABCD de la derecha, identifique:

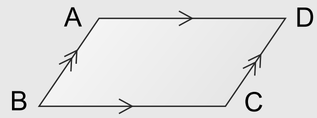


a) Lados adyacentes al $\overline{AB}$.
b) Lado opuesto al $\overline{AB}$.
c) Ángulos adyacentes al $\angle C$.
d) Ángulo opuesto al $\angle C$.

Ejemplo 1.3

Clasifique los siguientes cuadriláteros por el paralelismo de sus lados.

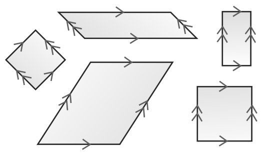




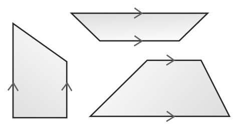
El símbolo ">"sobre $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ significa que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. Igual ocurre con los lados AB y DC, el símbolo ">>" sobre estos lados significa que $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

Respuesta:

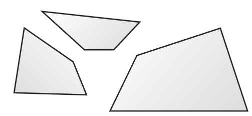
Grupo 1
Dos pares de lados opuestos paralelos



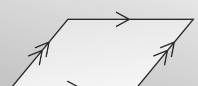
Grupo 2
Un par de lados opuestos paralelos



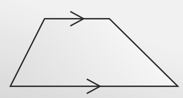
Grupo 3
Los lados opuestos no son paralelos.



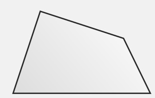
El cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos se llama **paralelogramo.**



El cuadrilátero con solo un par de lados opuestos paralelos se llama **trapecio.**



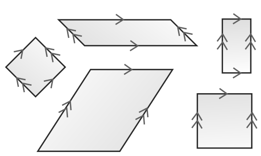
El cuadrilátero sin lados opuestos paralelos se llama **trapezoide.**



Ejercicio 1.2 De los grupos formados en el **Ejemplo 1.3** escriba si son paralelogramos, trapecios o trapezoides.

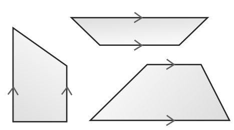
Grupo 1

____



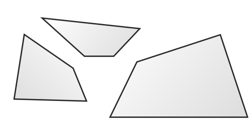
Grupo 2

____



Grupo 3

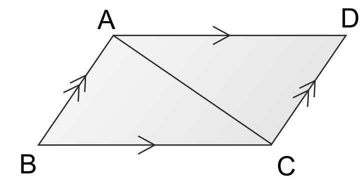
____



Ejemplo 1.4

El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo. Demuestre que $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

Solución:



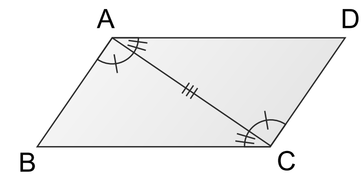
Se trazará la diagonal AC del paralelogramo ABCD para facilitar la demostración.

Hipótesis: El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

Conclusión: $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

Entre Δ ABC y ΔCDA,

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$	Por hipótesis y definición de paralelogramo
2) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	Por hipótesis y definición de paralelogramo
3) $\angle BAC \cong \angle DCA$	Por 1) y ser ángulos alternos internos
4) $\angle BCA \cong \angle DAC$	Por 2) y ser ángulos alternos internos
5) $\overline{AC} \cong \overline{CA}$	Por congruencia del mismo segmento
6) $\Delta ABC \cong \Delta CDA$	Por 3), 4), 5) y criterio de congruencia ALA



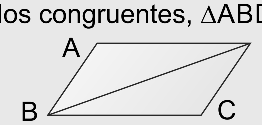
Se acaba de demostrar que: la diagonal de un paralelogramo descompone a éste en dos triángulos congruentes.

A partir del paso 6 de la demostración anterior se deduce que:

a) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AD} \cong \overline{CB}$ por ser lados correspondientes de triángulos congruentes.

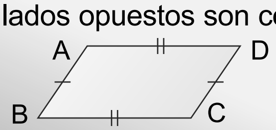
b) $\angle B \cong \angle D$ y $\angle A \cong \angle C$ por ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes.

Para ver mejor que $\angle A \cong \angle C$, tiene que considerar la otra diagonal del paralelogramo ABCD, que también lo divide en dos triángulos congruentes, $\Delta ABD \cong \Delta CDB$

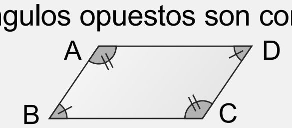


Si el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo entonces:

a) Los lados opuestos son congruentes.

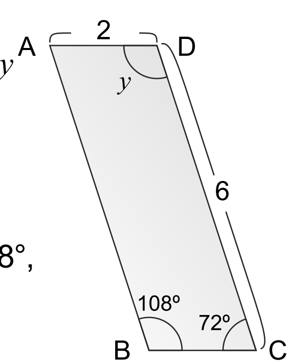


b) Los ángulos opuestos son congruentes.



Ejemplo 1.5

En el paralelogramo ABCD dado encuentre las medidas del $\overline{AB}$ y $\angle y$



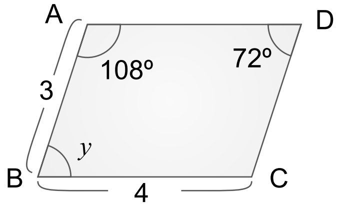
Solución:

$\overline{AB}$ es el lado opuesto al $\overline{DC}$ y $\overline{DC}$ mide 6 cm. Así que, AB $= 6$, porque los lados opuestos en un paralelogramo son congruentes.

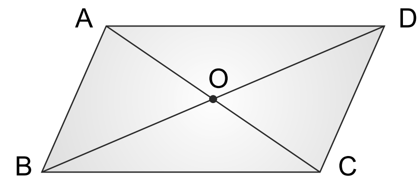
$\angle D$ es el ángulo opuesto al $\angle B$ y $\angle B$ mide 108°. Así que $m\angle y = 108°$, porque los ángulos opuestos en un paralelogramo son congruentes.

Respuesta: AB $= 6$, $m\angle y = 108°$

Ejercicio 1.3 En el paralelogramo ABCD dado encuentre las medidas del $\overline{AD}$ y $\angle y$



Ejemplo 1.6



Demuestre que las diagonales del paralelogramo se cortan en el punto medio.

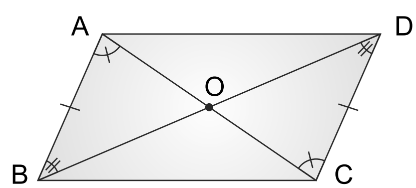
Solución:

Hipótesis: El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

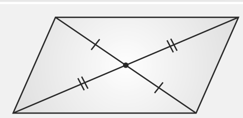
Conclusión: O es punto medio del $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$

Entre $\triangle OAB$ y $\triangle OCD$,

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$	Por hipótesis y definición de paralelogramo
2) $\angle BAO \cong \angle DCO$	Por 1) y ser ángulos alternos internos
3) $\angle ABO \cong \angle CDO$	Por 1) y ser ángulos alternos internos
4) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	Por ser los lados opuestos de un paralelogramo
5) $\triangle OAB \cong \triangle OCD$	Por 2), 3), 4) y criterio de congruencia ALA
6) $\overline{AO} \cong \overline{CO}$	Por 5) y ser lados correspondientes de triángulos congruentes
7) O es punto medio del $\overline{AC}$	Por 6)
8) $\overline{BO} \cong \overline{DO}$	Por 7) y ser lados correspondientes de triángulos congruentes
9) O es punto medio del $\overline{BD}$	Por 8)



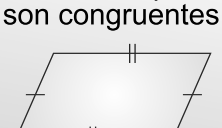
Se demostró que: las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio.



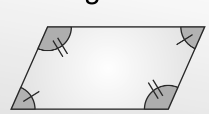
A partir de los Ejemplo 1.4 y Ejemplo 1.6 se concluye con las siguientes características.

Características de los paralelogramos

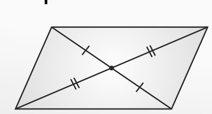
1. Los lados opuestos son congruentes.



2. Los ángulos opuestos son congruentes.

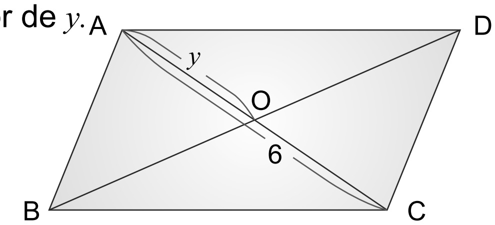


3. Las diagonales se cortan en el punto medio.



Ejemplo 1.7

En el paralelogramo ABCD dado, encuentre el valor de y.



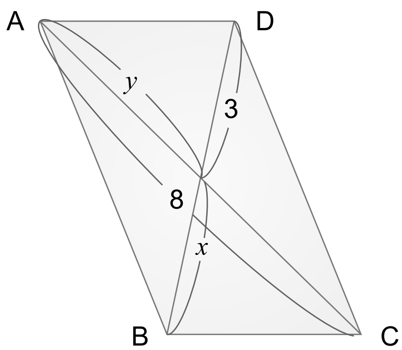
Solución:

y representa la longitud de la diagonal AC hasta el punto donde se corta con la diagonal BD. Entonces y mide la mitad de lo que mide el $\overline{AC}$, porque las diagonales de un paralelogramo se cortan el punto medio.

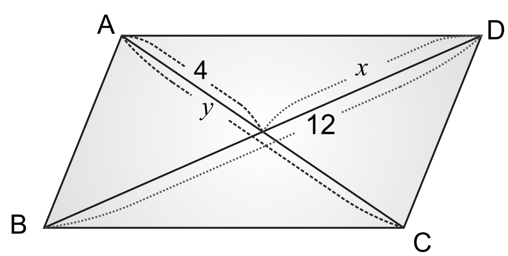
Respuesta: $y = 3$

Ejercicio 1.4 En los paralelogramos ABCD dados encuentre el valor de x y y

a)

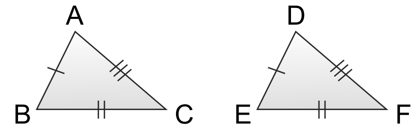


b)

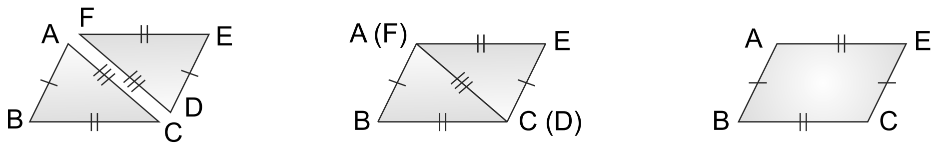


Sección 3: : Condiciones para ser un paralelogramo

El $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son congruentes.



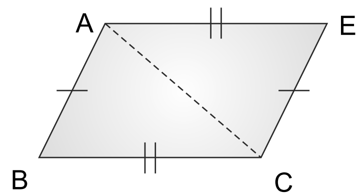
La figura que se forma cuando se une el $\overline{AC}$ del $\triangle ABC$ con el $\overline{FD}$ del $\triangle DEF$



parece un paralelogramo, pero aún falta saber si lados opuestos son paralelos. Por ahora se sabe con certeza que es un cuadrilátero con sus lados opuestos congruentes. Para que el cuadrilatero ABCE sea un paralelogramo se debe probar que sus 2 pares de lados opuestos congruentes, también son paralelos.

Ejemplo 1.8

Demuestre que el cuadrilátero ABCE con lados opuestos congruentes ($\overline{AB} \cong \overline{CE}$ y $\overline{AE} \cong \overline{CB}$) es un paralelogramo.



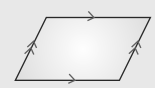
Solución:

Se trazará la diagonal AC del cuadrilátero ABCE para facilitar la demostración.

Hipótesis: $\overline{AB} \cong \overline{CE}$ y $\overline{AE} \cong \overline{CB}$

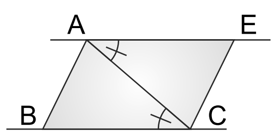
Conclusión: $\overline{AB} \parallel \overline{EC}$, $\overline{AE} \parallel \overline{BC}$ (El cuadrilátero ABCE es un paralelogramo)

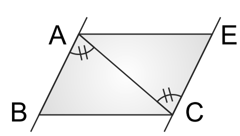
Definición de paralelogramo
Cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos.



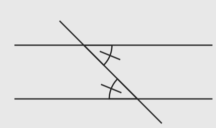
Entre $\triangle ABC$ y $\triangle CEA$,

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $\overline{AB} \cong \overline{CE}$	Por hipótesis
2) $\overline{AE} \cong \overline{CB}$	Por hipótesis
3) $\overline{AC} \cong \overline{CA}$	Por congruencia del mismo segmento
4) $\triangle ABC \cong \triangle CEA$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia LLL
5) $\angle BCA \cong \angle EAC$	Por 4) y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes
6) $\overline{AE} \parallel \overline{BC}$	Por 5) y condición de paralelismo
7) $\angle BAC \cong \angle ECA$	Por 4) y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes
8) $\overline{AB} \parallel \overline{EC}$	Por 7) y condición de paralelismo
9) El cuadrilátero ABCE es un paralelogramo	Por 6), 8) y definición de paralelogramo

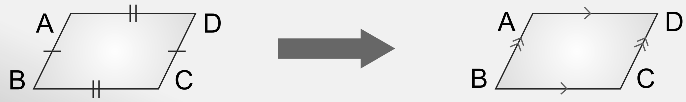




Condición de paralelismo
Si dos ángulos alternos internos son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

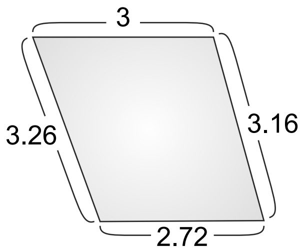


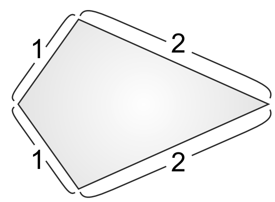
Un cuadrilátero que tiene sus dos pares de lados opuestos congruentes también es un paralelogramo.

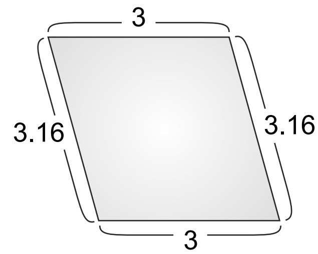


Ejemplo 1.9

Indique cuál de los siguientes cuadriláteros es un paralelogramo y por qué.

a)


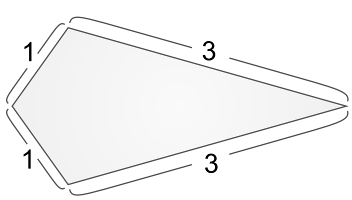
b)


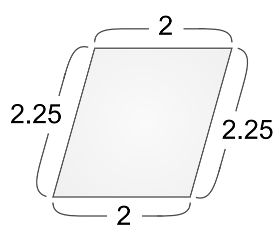
c)


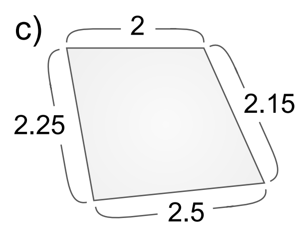
Solución:

a) No es un paralelogramo, porque ninguno de sus lados es congruente.
b) No es un paralelogramo. A pesar de que tiene dos pares de lados congruentes, esos lados no son opuestos.
c) Si es un paralelogramo. Se probó que un cuadrilátero con dos pares de lados opuestos congruentes es un paralelogramo.

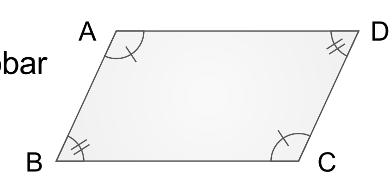
Ejercicio 1.5 Indique cuál de los siguientes cuadriláteros es un paralelogramo.

a)


b)


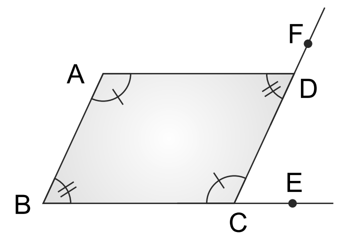
c)


El cuadrilátero ABCD tiene sus 2 pares de ángulos opuestos congruentes. Aunque parece un paralelogramo, aún falta probar si cada par de lados opuestos son paralelos.



Ejemplo 1.10

Demuestre que el cuadrilátero ABCD dado cuyo 2 pares de ángulos opuestos son congruentes, es un paralelogramo.

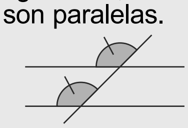


Solución:

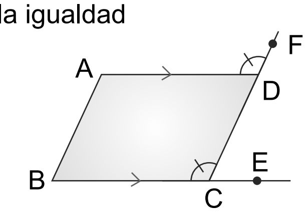
Hipótesis: $\angle A \cong \angle C$, $\angle B \cong \angle D$ en el cuadrilátero ABCD.

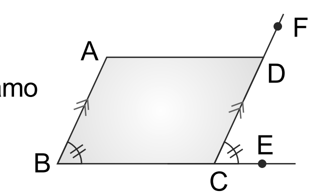
Conclusión: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo)

Condición de paralelismo
Si dos ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

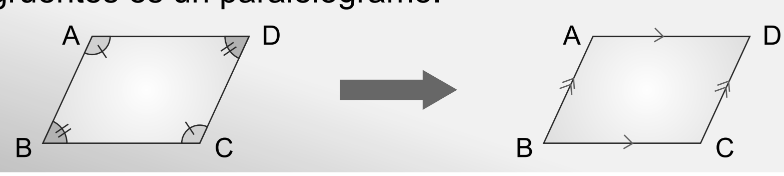


Afirmaciones	**Justificaciones**
1) Sean E y F puntos en la prolongación del $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, respectivamente	Por construcción auxiliar.
2) $\angle A \cong \angle C$, $\angle B \cong \angle D$	Por hipótesis.
3) $m\angle C = m\angle DCB$	Por ser el mismo ángulo
4) $m\angle D = m\angle ADC$	Por ser el mismo ángulo
5) $m\angle A = m\angle DCB$	Por 2) y 3)
6) $m\angle B = m\angle ADC$	Por 2) y 4)
7) $m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360°$	Por ser la suma de las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero 360°
8) $2m\angle DCB + 2m\angle ADC = 360°$	Por sustitución de 3), 4), 5) y 6) en 7) y suma de términos semejantes
9) $m\angle DCB + m\angle ADC = 180°$	Por dividir entre 2 a ambos lados de la igualdad
10) $m\angle FDA + m\angle ADC = 180°$	Por ser ángulos suplementarios
11) $m\angle DCB = m\angle FDA$	Por 9) y 10)
12) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	Por 11) y condición de paralelismo
13) $2m\angle DCB + 2m\angle B = 360°$	Por sustitución de 6) en 8)
14) $m\angle DCB + m\angle B = 180°$	Por dividir entre 2 a ambos lados de la igualdad.
15) $m\angle DCB + m\angle ECD = 180°$	Por ser ángulos suplementarios
16) $m\angle B = m\angle ECD$	Por 14) y 15)
17) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$	Por 16) y condición de paralelismo
18) El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.	Por 12), 17) y definición de paralelogramo



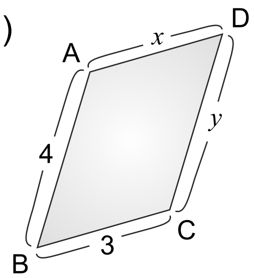


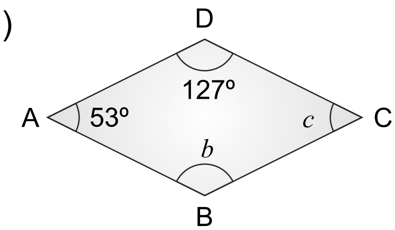
Se probó que un cuadrilátero cuyos dos pares de ángulos opuestos son congruentes es un paralelogramo.



Ejemplo 1.11

Encuentre la medida que debe tener x, y, $\angle b$, $\angle c$ para que el cuadrilátero sea un paralelogramo.

a) 

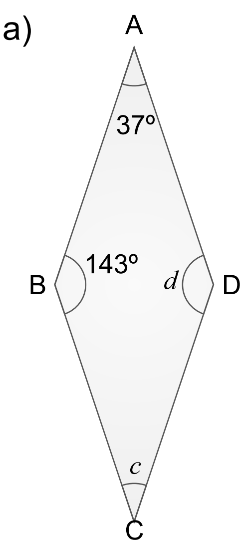
b) 

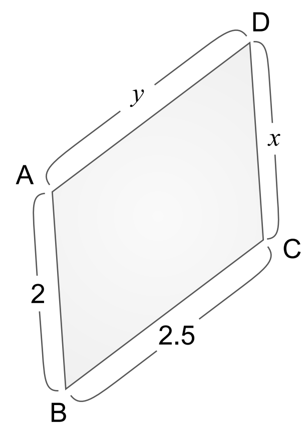
Solución:

a) Anteriormente se probó que un cuadrilátero con sus pares de lados opuestos congruentes es un paralelogramo, así que $x = 3$ y $y = 4$.

b) También se probó que un cuadrilátero con sus pares de ángulos opuestos congruentes es un paralelogramo, así que $m\angle b = 127°$ y $m\angle c = 53°$.

Ejercicio 1.6 Encuentre la medida que debe tener $\angle c$, $\angle d$, x, y, para que el cuadrilátero sea un paralelogramo.

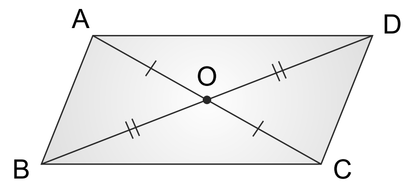
a) 

b) 

Ejemplo 1.12

Demuestre que un cuadrilátero cuyas diagonales se cortan en un punto medio es un paralelogramo.

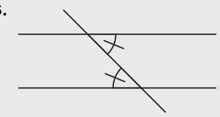
Solución:



Hipótesis: Las diagonales del cuadrilátero ABCD se cortan en el punto medio O, es decir, $\overline{AO} \cong \overline{CO}$ y $\overline{BO} \cong \overline{DO}$

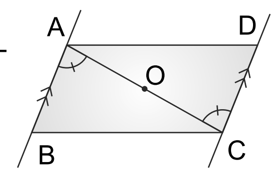
Conclusión: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo)

Condición de paralelismo
Si dos ángulos alternos internos son congruentes, entonces las rectas son paralelas.



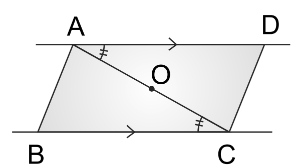
Entre $\triangle AOB$ y $\triangle COD$,

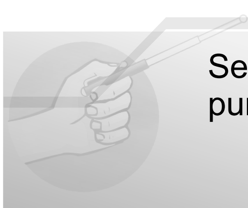
Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $\overline{AO} \cong \overline{CO}$	Por hipótesis
2) $\overline{BO} \cong \overline{DO}$	Por hipótesis
3) $\angle AOB \cong \angle COD$	Por ser ángulos opuestos por el vértice
4) $\triangle AOB \cong \triangle COD$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia LAL
5) $\angle BAO \cong \angle DCO$	Por 4) y por ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes
6) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$	Por 5) y condición de paralelismo



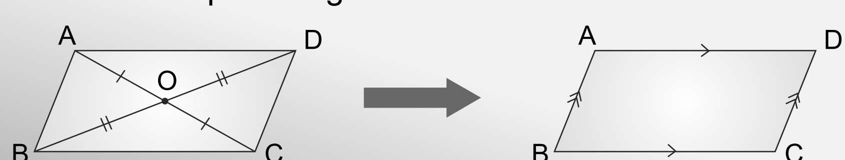
Entre $\triangle AOD$ y $\triangle COB$,

7) $\angle AOD \cong \angle COB$	Por ser ángulos opuestos por el vértice
8) $\triangle AOD \cong \triangle COB$	Por 1), 2) y 7) y criterio de congruencia LAL
9) $\angle DAO \cong \angle BCO$	Por 8) y por ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes
10) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	Por 9) y condición de paralelismo
11) El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo	Por 6), 10) y definición de paralelogramo



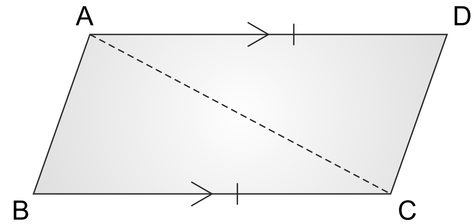


Se verificó que un cuadrilátero cuyas diagonales se cortan en un punto medio es un paralelogramo.



Ejercicio 1.7 Complete la siguiente demostración. Si un cuadrilátero con un par de lados opuestos paralelos y congruentes es un paralelogramo. Sugerencia: trace la diagonal AC.

Hipótesis: $\overline{AD} \cong \overline{CB}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ en el cuadrilátero ABCD

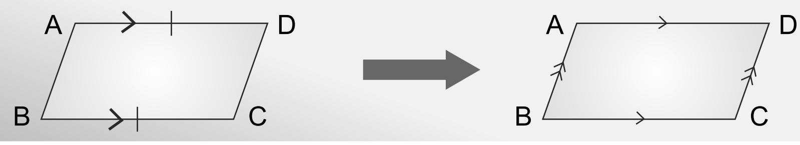


Conclusión: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ (El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo)

Entre ΔBAC y ΔDCA,

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $\overline{AD} \cong \overline{CB}$	
2) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	
3) Sea $\overline{AC}$ la diagonal del cuadrilátero ABCD	Por construcción auxiliar
4) $\angle DAC \cong$	Por 2) y ser ángulos alternos internos
5) $\overline{AC} \cong \overline{CA}$	
6) $\Delta BAC \cong \Delta DCA$	Por 1), 4), 5) y criterio de congruencia
7) $\angle BAC \cong$	Por 6) y ser de triángulos congruentes
8) $\overline{AB} \parallel$	Por 7) y condición de paralelismo
9)	Por 2), 8) y definición de paralelogramo

Se verificó que si un cuadrilátero tiene un par de lados opuestos congruentes y paralelos es un paralelogramo.

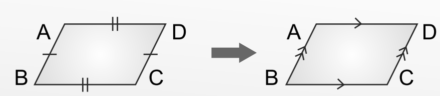


Por los **Ejemplos 1.8 , 1.10, 1.12** y **Ejercicio 1.7** se concluye lo siguiente:

Condiciones para que un cuadrilátero sea un paralelogramo

Si un cuadrilátero:

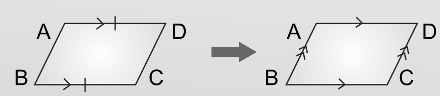
Tiene sus dos pares de lados opuestos congruentes, es un paralelogramo.



Tiene dos pares de ángulos opuestos congruentes, es un paralelogramo.

Sus diagonales se cortan en un punto medio, es un paralelogramo.

Tiene un par de lados opuestos congruentes y paralelos, es un paralelogramo.



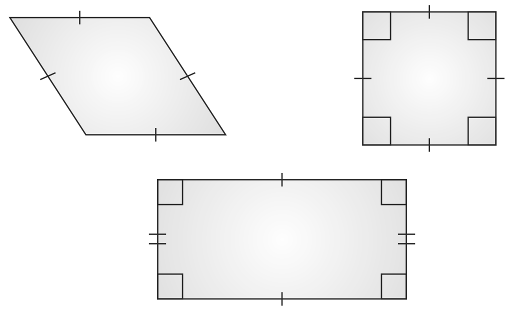
Ejemplo 1.13

En los siguientes cuadriláteros identifique:

a) El que tiene cuatro lados congruentes (escriba su nombre).

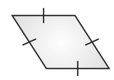
b) El que tiene cuatro ángulos congruentes (escriba su nombre).

c) El que tiene sus cuatro ángulos y cuatro lados congruentes (escriba su nombre).

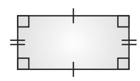


Solución:

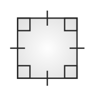
a) El rombo tiene cuatro lados congruentes.



b) El rectángulo tiene cuatro ángulos congruentes.

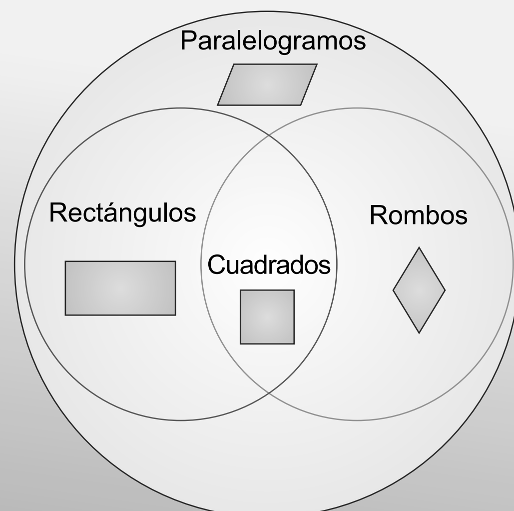


c) El cuadrado tiene cuatro lados y ángulos congruentes.



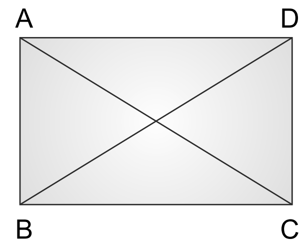
Los ángulos del rectángulo y cuadrado miden 90°.
$360° \div 4 = 90°$

Si observa bien las características de los rombos, rectángulos y cuadrados, estos cumplen con las condiciones para ser paralelogramos. Por esta razón, los rombos, los rectángulos y los cuadrados también son paralelogramos.
El cuadrado puede ser considerado un rectángulo o rombo.



Ejemplo 1.14

Demuestre que las diagonales de un rectángulo son congruentes.



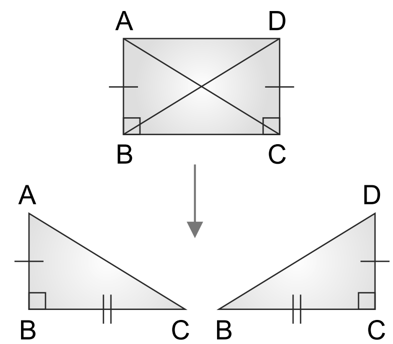
Solución:

Hipótesis: El cuadrilátero ABCD es un rectángulo.

Conclusión: $\overline{AC} \cong \overline{DB}$

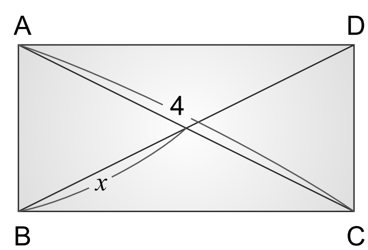
Entre ΔABC y ΔDCB,

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo	Por hipótesis y porque el rectángulo cumple las condiciones para ser paralelogramo
2) $\overline{AB} \cong \overline{DC}$	Por 1) y características de los paralelogramos
3) $\overline{BC} \cong \overline{CB}$	Por congruencia del mismo segmento
4) $\angle ABC \cong \angle DCB$	Por hipótesis y definición de rectángulo
5) $\Delta ABC \cong \Delta DCB$	Por 2), 3), 4) y criterio de congruencia LAL
6) $\overline{AC} \cong \overline{DB}$	Por 5) y ser lados correspondientes de triángulos congruentes



Ejemplo 1.15

El cuadrilátero ABCD es un rectángulo. Encuentre el valor de x

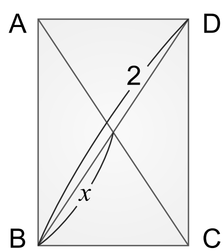


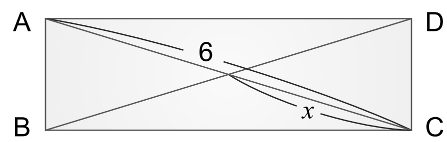
Solución:

Como la diagonal AC mide 4, entonces la diagonal BD también mide 4. x representa la mitad de la longitud del $\overline{BD}$, porque se sabe que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

Respuesta: $x = 2$

Ejercicio 1.8 El cuadrilátero ABCD es un rectángulo. Encuentre el valor de x.

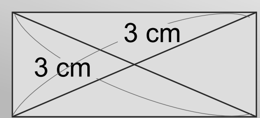
a)


b)


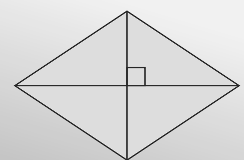
Por ahora solo se demostró la propiedad que cumplen las diagonales del rectángulo. Las propiedades que cumplen las diagonales de un rombo y cuadrado se mencionan a continuación:

Las diagonales de los:

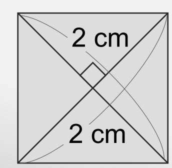
Rectángulos son congruentes.



Rombos son perpendiculares.



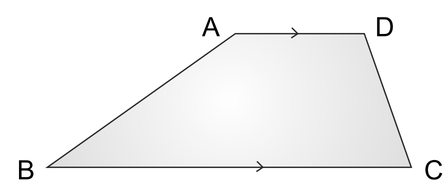
Cuadrados son congruentes y perpendiculares.



Sección 5: Trapecios.

Ejemplo 1.16

Observe la siguiente figura y escriba:
a) ¿Qué par de lados son paralelos?
b) ¿Qué tipo de cuadrilátero es?
c) ¿Qué pares de ángulos son adyacentes a los lados AD y BC?



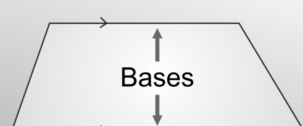
Solución:

a) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

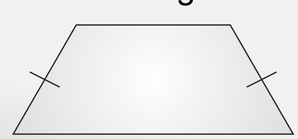
b) Es un trapecio, porque solo tiene un par de lados opuestos paralelos.

c) Los ángulos adyacentes al $\overline{AD}$ son el $\angle A$ y $\angle D$ y los ángulos adyacentes al $\overline{BC}$ son el $\angle B$ y $\angle C$.

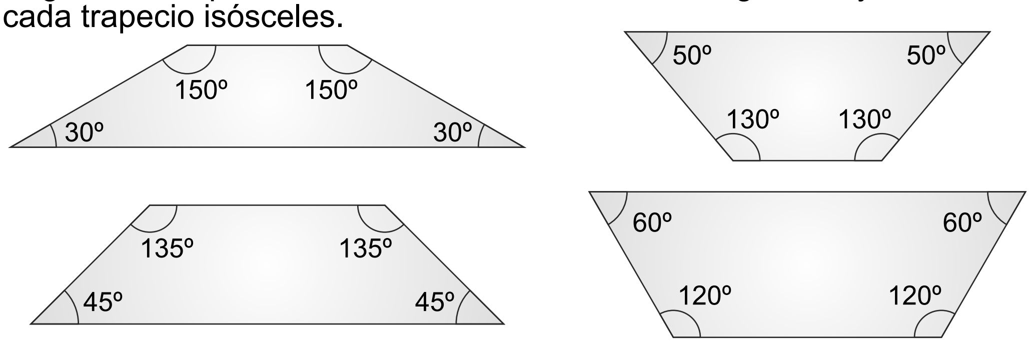
A los lados paralelos de un trapecio se les llaman **bases**.



Un **trapecio isósceles** es aquel cuyos lados opuestos **NO** paralelos son congruentes.



Los siguientes trapecios son isósceles. Observe los ángulos adyacentes a las bases de cada trapecio isósceles.



¿Cómo son entre sí cada par de ángulos adyacentes a las bases del trapecio?, ¿son congruentes?

Si construye otro trapecio isósceles, ¿piensa que los ángulos adyacentes a una misma base serán congruentes?

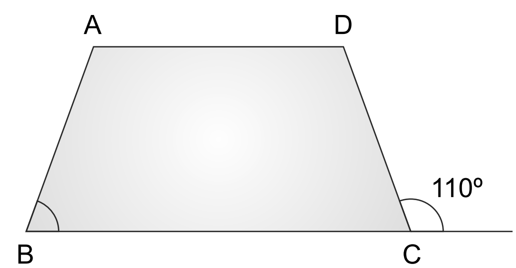
¿Qué puede concluir acerca de los ángulos adyacentes a una misma base de un trapecio isósceles?

Se debería demostrar que los ángulos adyacentes a una misma base de un trapecio isósceles son congruentes, así como se ha hecho anteriormente con las propiedades de algunas figuras. Por ahora no se hará, pero se aceptará como verdadero que para todo trapecio isósceles se cumple lo siguiente:

> Los ángulos adyacentes a una misma base de un trapecio isósceles son congruentes.

Ejemplo 1.17

El cuadrilátero ABCD es trapecio isósceles, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$. Encuentre la medida del $\angle$B.



Solución:

$m\angle C + 110° = 180°$, porque el $\angle C$ es el suplemento del ángulo de 110°. Despejando para la $m\angle C$, se tiene que

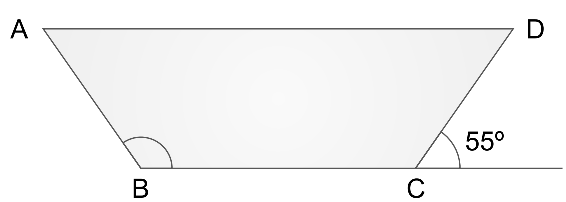
$m\angle C = 180° - 110° = 70°$

Luego, $m\angle B = m\angle C$ por ser ángulos adyacentes a una misma base del trapecio isósceles ABCD.

Entonces $m\angle B = 70°$

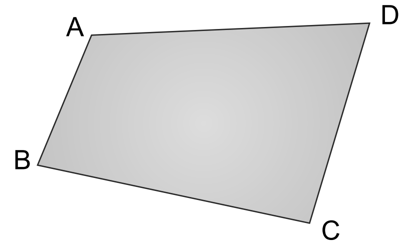
Respuesta: $m\angle B = 70°$

Ejercicio 1.9 El cuadrilátero ABCD es trapecio isósceles, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$. Encuentre la medida del $\angle$B.



Ejercicios

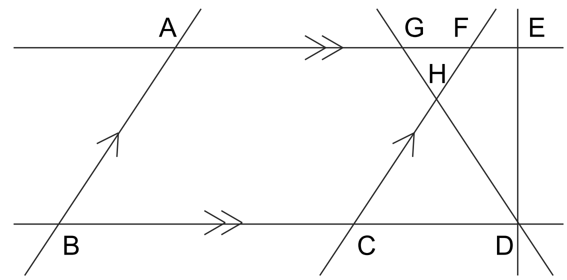
1 Observe el cuadrilátero ABCD y conteste lo siguiente:
a) ¿Qué lados del cuadrilátero son adyacentes al $\overline{BC}$?
b) ¿Qué lados del cuadrilátero son opuestos al $\overline{BC}$?
c) ¿Qué ángulos del cuadrilátero son adyacentes al $\angle B$?
d) ¿Qué ángulos del cuadrilátero son opuestos al $\angle B$?



2 En la figura de la derecha:
a) ¿Cuáles cuadriláteros logra identificar?

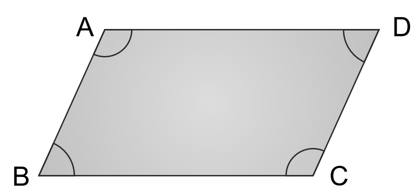
b) ¿Cuáles de ellos son paralelogramos?, ¿por qué?

c) ¿Cuáles de ellos son trapecios?, ¿por qué?



3 Complete la siguiente demostración. Si los ángulos consecutivos de un cuadrilátero ABCD son suplementarios, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo. (Esta sería otra condición que deben cumplir los cuadriláteros para ser paralelogramos.)

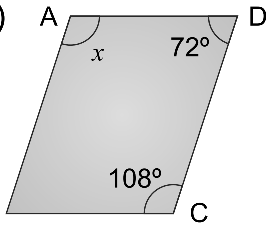
Hipótesis: $m\angle A + m\angle B = 180°$
$m\angle B + m\angle C = 180°$
$m\angle C + m\angle D = 180°$
$m\angle D + m\angle A = 180°$

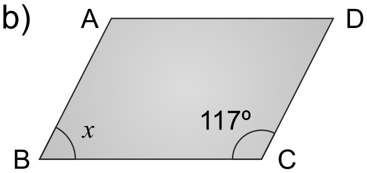


Conclusión: El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo

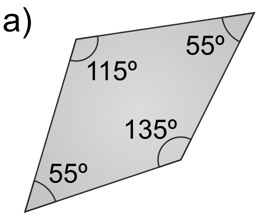
Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $m\angle A + m\angle B = 180°$	
2) $m\angle B + m\angle C = 180°$	
3) $m\angle A + m\angle B = m\angle B + m\angle C$	Igualando 1) y 2)
4) $m\angle A = m\angle C$	Por 3) y reducción de términos semejantes
5) $m\angle C + m\angle D = 180°$	
6) $m\angle B + m\angle C =$	Igualando 2) y 5)
7) $m\angle B =$	Por 6) y reducción de términos semejantes
8) Los ángulos opuestos del cuadrilátero ABCD son congruentes	
9) El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo	Por 8) y condiciones para ser un paralelogramo

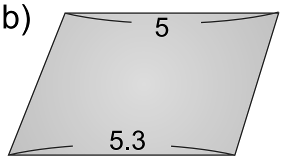
4 En los siguientes paralelogramos encuentre la medida del $\angle x$.

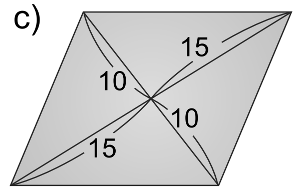
a)


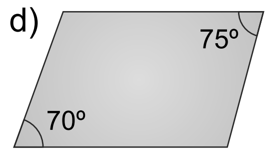
b)


5 ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros son paralelogramos?, ¿por qué?

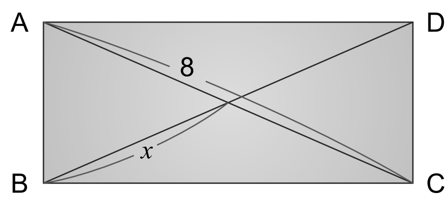
a)


b)


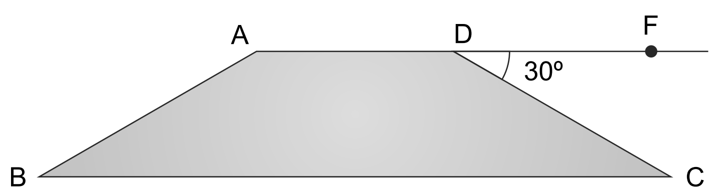
c)


d)


6 El cuadrilátero ABCD es un rectángulo. Encuentre el valor de x.

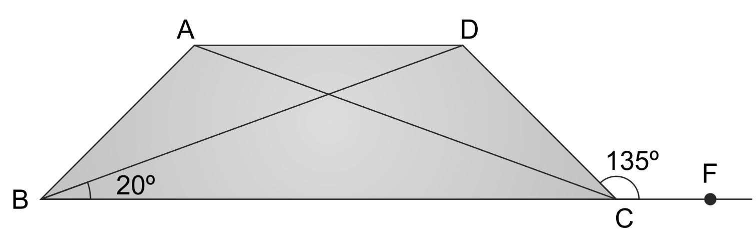


7 Encuentre la medida de los ángulos internos del trapecio isósceles ABCD, donde $\overline{AB} \cong \overline{DC}$.



8 En el trapecio isósceles ABCD, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$. Encuentre la medida de los siguientes ángulos:

a) $\angle$DCB
b) $\angle$ABD
c) $\angle$BAC



Unidad 6

Funciones de primer grado

Lección 1: Funciones de primer grado

Lección 2: Gráficas de funciones de primer grado

Lección 3: Solución gráfica de un sistema de ecuaciones de primer grado

Lección 4: Aplicación de las funciones de primer grado

Unidad 6

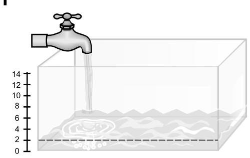
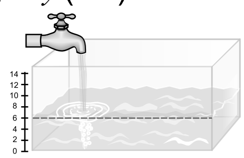
Funciones de primer grado

Lección 1: Funciones de primer grado

Sección 1: Funciones de primer grado

Ejemplo 1.1

En un recipiente que tiene la forma de un prisma rectangular se echa agua de modo que el nivel de la superficie del agua aumenta 2 cm por minuto. Observe la tabla.
Si el recipiente estaba vacío cuando se empezó a echar el agua, ¿cómo se puede expresar la altura del agua y (cm) cuando se expresa el tiempo después de x (min)?

Tiempo (min)	0	1	2	3	4	5	6	7
Altura (cm)	0	2	4	6	8	10	12	14

Solución:

Analice la tabla.
Cuando el tiempo es 0 min el recipiente está vacío o sea 0 cm

Si transcurre 1 min, la altura del agua es 2 cm
Si transcurre 2 min, la altura del agua es 4 cm
Si transcurre 3 min, la altura del agua es 6 cm
Si transcurre 4 min, la altura del agua es 8 cm
⋮ ⋮
Si transcurre 7 min, la altura del agua es 14 cm

Observe que por cada minuto que pasa el nivel del agua aumenta 2 cm

Ahora si se expresa la altura en términos de y (cm) y el tiempo en términos de x (min), y se sabe que el agua sube 2 cm cada minuto que transcurre, entonces la expresión que resulta es $y = 2x$.

Respuesta: $y = 2x$

En este caso el valor de y depende únicamente del valor de x.

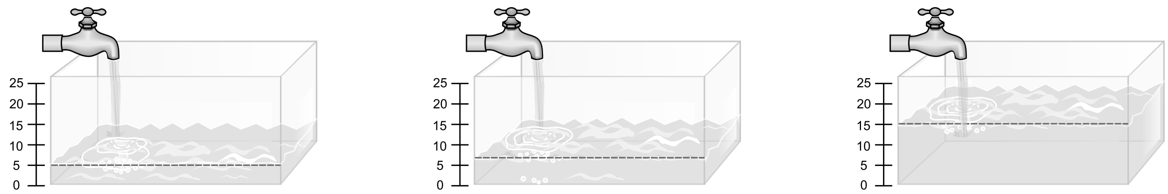
Ejercicio 1.1 Observe la siguiente tabla y responda.

Tiempo (min)	0	1	2	3	...
Altura (cm)	0	3	6	9	...

¿Cómo se puede expresar la altura del agua y (cm) cuando se expresa el tiempo después de x (min)?

Ejemplo 1.2

En el Ejemplo 1.1, si se empieza a echar agua cuando el nivel del agua está a 5 cm de altura. Observe la tabla, ¿cómo puede expresar la altura del agua y (cm), cuando se expresa el tiempo después de x (min)?



Tiempo x (min)	0	1	2	3	4	5	6	7
Altura y (cm)	5	7	9	11	13	15	17	19

Solución:

Observe que entre el tiempo y la altura utilizando los datos de la tabla, podemos decir que:

Al inicio la altura del agua estaba en 5 cm de agua y se sabe que cada minuto que transcurre sube 2 cm de agua entonces:

x (min) y (cm)

La altura del agua después de 1 min se expresa ... $5 + 2 \times 1 = 5 + 2 = 7$

La altura del agua después de 2 min se expresa ... $5 + 2 \times 2 = 5 + 4 = 9$

La altura del agua después de 3 min se expresa ... $5 + 2 \times 3 = 5 + 6 = 11$

$\vdots$

La altura del agua después de 7 min se expresa ... $5 + 2 \times 7 = 5 + 14 = 19$

Si se sabe que el recipiente ya contiene 5 cm de agua y por cada minuto que transcurre sube 2 cm y si la altura es y (cm) y el tiempo es x (min) entonces la expresión que resulta es $y = 5 + 2\boxed{x}$ así que $y = 2\boxed{x} + 5$.

Respuesta: $y = 2\boxed{x} + 5$

Cuando en dos variables x y y, el valor que toma x determina un único valor de y, se dice que y es función de x.

y es función de primer grado de x cuando el valor de y está definido por una expresión de la forma $\boxed{y = ax + b}$, donde a y b son constantes con a distinto de 0 y x es la variable.

Ejercicio 1.2

Observe la siguiente tabla y responda.

x	0	1	2	3	4
y	3	5	7	9	11

¿Cómo se puede expresar y en función de x?

A la expresión, $y = ax + b$ también se llama función lineal.

Ejemplo 1.3

Observe que la tabla muestra los valores de x y y para la función de primer grado $y = 2x + 1$.

¿Cómo cambia el valor de y cuando x aumenta de 1 en 1?

	+1	+1	+1	+1	+1	+1			
x	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	4...
y	...	−5	−3	−1	1	3	5	7	9...

Solución

Observando la tabla cuando x aumenta de 1 en 1, el valor de y cambia de 2 en 2.

y	...	−5	−3	−1	1	3	5	7	...
			+2	+2	+2	+2	+2	+2	

Respuesta: y cambia de 2 en 2.

En $y = 2x + 1$ cuando x aumenta 1, y aumenta 2.

Ejemplo 1.4

Para la función de primer grado $y = 2x + 1$, cuando el valor de x cambia de 1 a 4 encuentre el valor de $\frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}$.

Solución

Cambio en x es: $4 - 1 = 3$
Cambio en y es: $9 - 3 = 6$

entonces $\frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x} = \frac{6}{3} = 2$

x	...	1	...	4	...
y	...	3	...	9	...

Respuesta: 2

Al comparar el cambio del valor de y respecto al valor de x, a esa razón se llama **razón de cambio.** Razón de cambio $= \frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}$

En el **Ejemplo 1.3** en este caso el cambio de x es 1 y el cambio en y es 2 entonces razón de cambio $= \frac{2}{1} = 2$.

Cambio en x es $1 - 0 = 1$
Cambio en y es $3 - 1 = 2$

Comparando **Ejemplo 1.3** y **Ejemplo 1.4** observe que la razón de cambio es 2 y que es igual al coeficiente de x en la función de primer grado $y = 2x + 1$.

En la función de primer grado $y = ax + b$, la razón de cambio es igual al coeficiente a de x.

Razón de cambio $= \dfrac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x} = a$ (constante)

Ejemplo 1.5 Encuentre la razón de cambio en la función de primer grado $y = -3x + 7$.

Solución

Como el coeficiente de x es igual a la razón de cambio entonces es -3.

Respuesta: -3

Ejercicio 1.3 Encuentre la razón de cambio en las siguientes funciones de primer grado.

a) $y = 4x + 1$

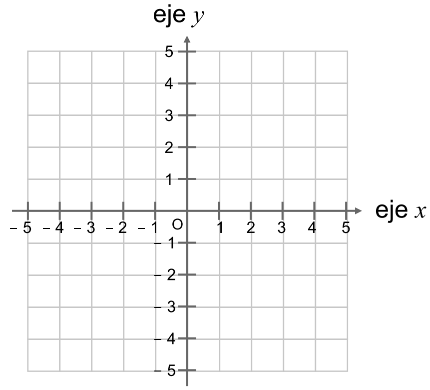
b) $y = -5x + 6$

c) $y = 3x - 2$

Lección 2: Gráficas de funciones de primer grado

Sección 1: Sistema de coordenadas

En 4to grado aprendimos que para ubicar puntos en el plano se toman 2 rectas numéricas que se cortan perpendicularmente (una horizontal y otra vertical).



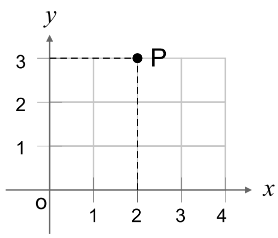
Se convierten en rectas numéricas de manera que la distancia de 0 a 1 o para cualquier par de números consecutivos debe ser las misma.

Las coordenadas del punto O son (0,0).
O: Origen

- A la recta horizontal se llama eje x o eje de las **abscisas**.
- La recta vertical se llama eje y o eje de las **ordenadas**.
- A los dos ejes juntos se le denomina sistema de **coordenadas**.
- Al punto de intersección de los dos ejes se le llama **origen del sistema de coordenadas.**

Ejemplo 2.1

Encuentre las coordenadas del punto P.

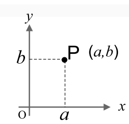


En el punto P (2, 3), 2 representa el valor de x y 3 el valor de y
Se expresa: (2, 3)
x y

Solución:

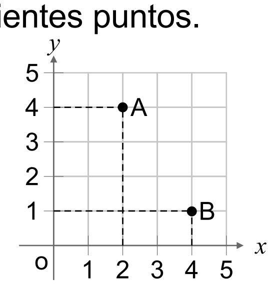
Como el segmento vertical corta al eje x en 2 y el segmento horizontal corta al eje y en 3, entonces las coordenadas de P son (2, 3).

Si los segmentos trazados cortan a los ejes x y y en los puntos a y b respectivamente se dice que el punto P tiene coordenadas (a, b) y se escribe P (a, b).



Ejercicio 2.1

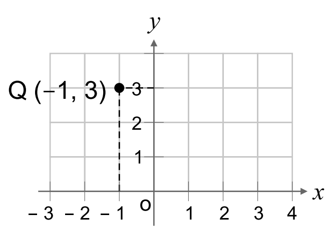
Encuentre las coordenadas de los siguientes puntos.



Ejemplo 2.2

Ubique el punto Q (−1, 3) en el sistema de coordenadas.

Solución:



Ejercicio 2.2

Ubique los siguientes puntos en un sistema de coordenadas.

a) A (1, 4) b) B (−5, 3) c) C (−3, −2) d) D (0, 3)

Ejemplo 2.3

En la función de primer grado $y = 2x + 2$ complete la tabla tomando los valores de x: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

Solución

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x + 2$							

Si sustituimos $x = -3$, $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, en $y = 2x + 2$ entonces

Si $x = -3$	Si $x = 0$	Si $x = 2$
$y = 2(-3) + 2$	$y = 2(0) + 2$	$y = 2(2) + 2$
$= -6 + 2$	$= 0 + 2$	$= 4 + 2$
$= -4$	$= 2$	$= 6$

Respuesta:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x + 2$	-4	-2	0	2	4	6	8

Ejemplo 2.4

Con los valores de la tabla del **Ejemplo 2.3** ubique marcando los puntos de la función de primer grado $y = 2x + 2$ en el sistema de coordenadas.

Solución

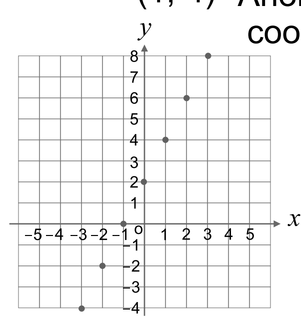
Formando las parejas ordenadas de la tabla observe que:

$x = -3, y = -4 \longrightarrow (-3, -4)$ $\quad x = -2, y = -2 \longrightarrow (-2, -2)$

$x = -1, y = 0 \longrightarrow (-1, 0)$ $\quad x = 0, y = 2 \longrightarrow (0, 2)$

$x = 1, y = 4 \longrightarrow (1, 4)$ Ahora ubique y marque los puntos en el sistema de coordenadas.

Respuesta:

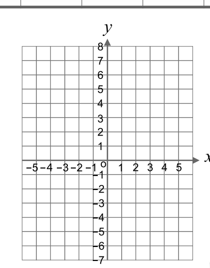


En una función de primer grado a cada valor de x y su respectivo valor de y le corresponde un punto en el sistema de coordenadas, cuyas coordenadas son los valores de x y y.

Ejercicio 2.3 En la función de primer grado $y = 3x - 1$ complete la tabla tomando como valores de x: $-2, -1, 0, 1, 2, 3$.

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 3x - 1$						

Ejercicio 2.4 Con los valores de la tabla del **Ejercicio 2.3** ubique y marque los puntos de la función de primer grado $y = 3x - 1$ en el sistema de coordenadas.



Ejemplo 2.5

Trace la gráfica de la función de primer grado $y = -2x + 1$.

Solución:

Para trazar la gráfica de una función de primer grado considere los siguientes pasos:

Paso 1

Elabore y complete la tabla.

x	-3	−2	−1	0	1	2	3
$y = -2x + 1$	7	5	3	1	− 1	− 3	− 5

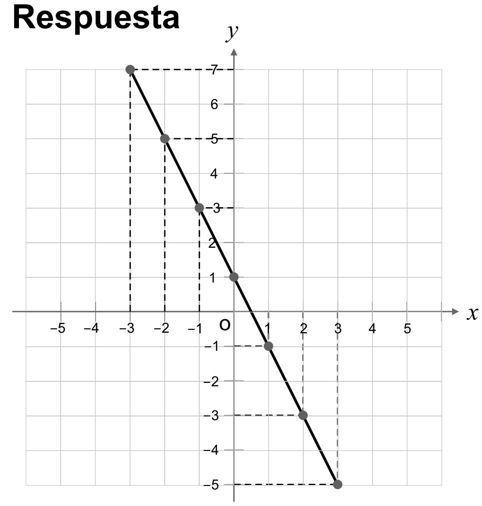
Paso 2

Ubique los puntos de la función en el sistema de coordenadas.

Paso 3

Una los puntos trazados con una línea recta.

Respuesta



$y = -2x + 1$

A esta recta se le llama gráfica de función de primer grado $y = -2x + 1$.
También se le llama recta $y = -2x + 1$.
Es el conjunto de los puntos cuyas coordenadas satisfacen la igualdad de la ecuación $y = -2x + 1$.

Ejercicio 2.5 Trace la gráfica de las siguientes funciones de primer grado en un mismo sistema de coordenadas.

a) $y = x + 2$

b) $y = -4x + 1$

Ejemplo 2.6

Trace la gráfica de las funciones de primer grado $y = 2x$ y $y = 2x + 3$ y compare cada una de las funciones.

Solución:

1) Elabore la tabla.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = 2x$	−6	-4	-2	0	2	4	6
$y = 2x + 3$	-3	-1	1	3	5	7	9

Si $x = -3$ en $y = 2x = 2(-3) = -6$

Si $x = 0$ en $y = 2x = 2(0) = 0$

Si $x = 2$ en $y = 2x = 2(2) = 4$

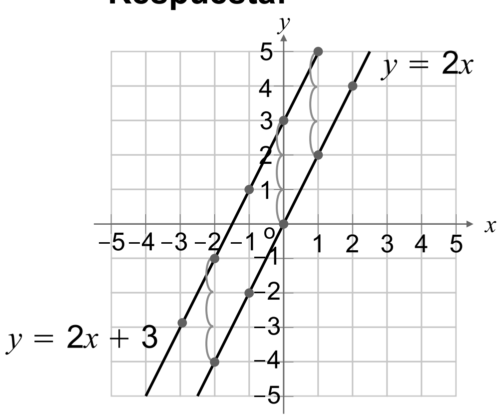
Si $x = -3$ en $y = 2x + 3 = 2(-3) + 3 = -6 + 3 = -3$

Si $x = 0$ en $y = 2x + 3 = 2(0) + 3 = 0 + 3 = 3$

Si $x = 2$ en $y = 2x + 3 = 2(2) + 3 = 4 + 3 = 7$

2) Ubique los puntos de cada función de primer grado en el sistema de coordenadas y trace la gráfica.

Respuesta:



Comparando las gráficas se puede observar que:

- La diferencia en los valores de la tabla en las funciones de primer grado $y = 2x$ y $y = 2x + 3$ es 3 más que el valor de $y = 2x$.
- La gráfica de $y = 2x + 3$ se obtiene trasladando hacia arriba 3 unidades de la gráfica $y = 2x$.
- La gráfica de $y = 2x + 3$ corta al eje y en 3.

Ejemplo 2.7

Trace la gráfica de las funciones de primer grado $y = 2x - 1$ y $y = 2x$ y compare la diferencia de cada función.

Solución:

1) Elabore la tabla.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = 2x$	−6	−4	−2	0	2	4	6
$y = 2x - 1$	−7	−5	−3	−1	1	3	5

Si $x = -3$ en $y = 2x = 2(-3) = -6$

Si $x = 0$ en $y = 2x = 2(0) = 0$

Si $x = 2$ en $y = 2x = 2(2) = 4$

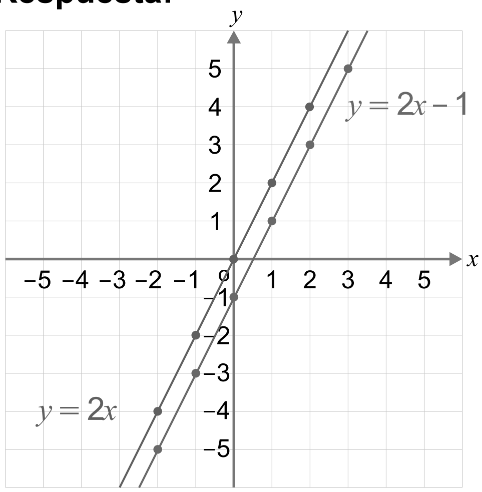
Si $x = -3$ en $y = 2x - 1 = 2(-3) - 1 = -6 - 1 = -7$

Si $x = 0$ en $y = 2x - 1 = 2(0) - 1 = 0 - 1 = -1$

Si $x = 2$ en $y = 2x - 1 = 2(2) - 1 = 4 - 1 = 3$

2) Ubique los puntos de cada función de primer grado en el sistema de coordenadas y trace la gráfica.

Respuesta:



Comparando las gráficas se puede observar que:

- La diferencia en los valores de la tabla en las funciones de primer grado $y = 2x$ y $y = 2x - 1$ es 1 menos que el valor de $y = 2x$.
- La gráfica de $y = 2x - 1$ se obtiene trasladando hacia abajo 1 unidad de la gráfica de $y = 2x$.
- La gráfica de $y = 2x - 1$ corta al eje y en -1.

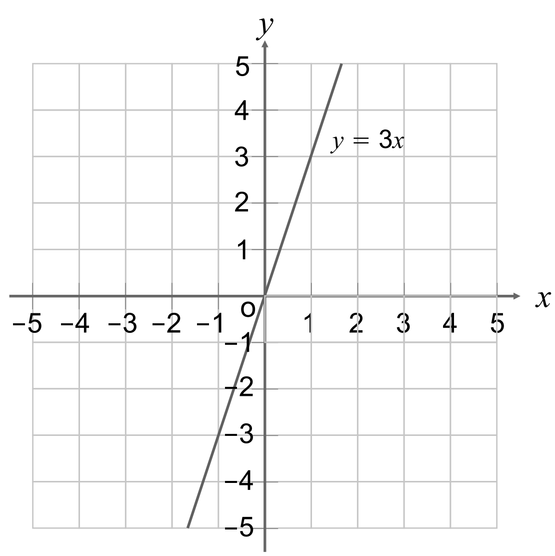
La recta $y = ax + b$ se obtiene trasladando $|b|$ unidades hacia arriba o hacia abajo de la recta $y = ax$, b se llama **ordenada al origen**.

Ejercicio 2.6 Dada la recta $y = 3x$ trazar la gráfica de las siguientes funciones de primer grado en un mismo sistema de coordenadas.

a) $y = 3x + 1$

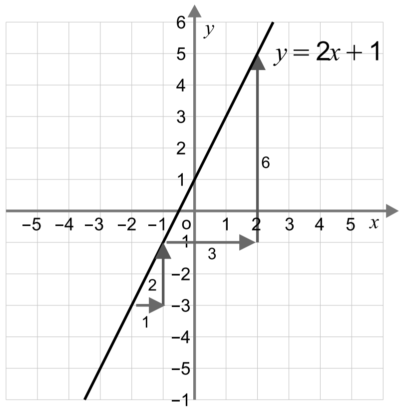
b) $y = 3x - 3$

c) $y = 3x + 4$



Interprete el significado de 2 en la recta $y = 2x + 1$

Observe que en la gráfica cuando se avanza 1 unidad hacia la derecha se avanza 2 unidades hacia arriba y si se avanza 3 unidades hacia la derecha se avanzan 6 unidades hacia arriba.



Como el coeficiente de x es 2, la razón de cambio $\left(\frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}\right)$ es 2 por lo tanto:

Si x aumenta de 1 en 1 el valor de y cambia de 2 en 2.
Si x aumenta de 3 en 3 al valor de y cambia de 6 en 6.

Razón de cambio $= \dfrac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x} = \dfrac{2}{1} = \dfrac{6}{3} = 2$

Razón de cambio, se conoce como **pendiente** de la recta.

Ahora interprete el significado de 1 en la recta $y = 2x + 1$

Observe la recta $y = 2x + 1$, 1 significa que se traslada una unidad hacia arriba con respecto a la recta $y = 2x$.

También significa que 1 es la ordenada al origen.
(0,1) es el punto donde la gráfica corta el eje y.

En la recta $y = ax + b$, el coeficiente a de x se llama pendiente de la recta y b se llama **ordenada al origen**.

El punto en donde la recta corta el eje y se llama **intercepto** en y.

El intercepto en y de la recta $y = 2x + 1$ es el punto (0,1).

Ejemplo 2.8

En la recta $y = 3x + 2$, ¿qué significa 3 y 2?, ¿cuál es el intercepto en y?

Respuesta:

3 es la pendiente y 2 la ordenada al origen de la recta $y = 3x + 2$, el intercepto en y es el punto (0, 2).

$y = ax + b$
Pendiente — Ordenada al origen

Ejercicio 2.7 Tomando como referencia el **Ejemplo 2.8** complete la tabla.

	Pendiente	Ordenada al origen	Intercepto en y
$y = 3x + 6$	3	6	(0, 6)
$y = 5x - 7$			
$y = 2x + 3$			

$y = 5x - 7$ se puede decir $y = 5x + (-7)$.

Ejemplo 2.9

En la función de primer grado $y = 2x - 1$, compare el significado 2, − 1 en la tabla, en la expresión y en la gráfica.

Solución:

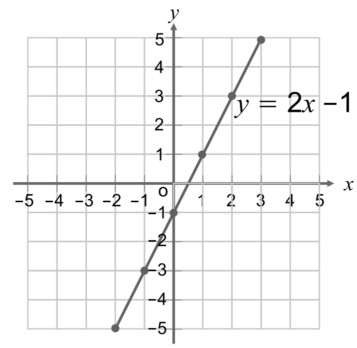
	La tabla	La expresión	La gráfica
Significado de -1	$y = -1$ cuando $x = 0$	Término constante	La ordenada al origen
Significado de 2	Razón de cambio $= \dfrac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x} = \dfrac{2}{1} = 2$	El coeficiente de x	La Pendiente

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$2x - 1$	−7	−5	−3	−1	1	3	5

1 1

2 2

$y = \boxed{2}\,x - 1$



$y = ax + b$ ← Ordenada al origen

Pendiente

Ejercicio 2.8

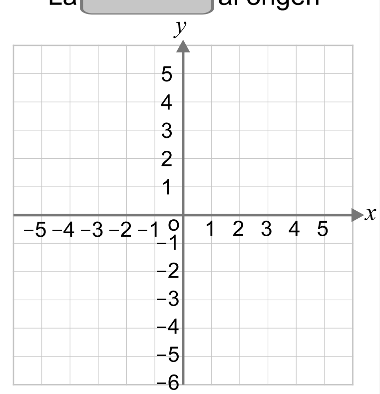
En la función de primer grado $y = 3x + 2$ establezca la relación entre la expresión y la gráfica.

Solución:

	La tabla	La expresión	La gráfica
Significado de 2	$y = \bigcirc$ cuando $x = 0$	Término $\boxed{}$	La $\boxed{}$ al origen
Significado de 3	Razón de cambio $= \dfrac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x} = \boxed{}$	El $\boxed{}$ de x	La $\boxed{}$

x	−2	−1	0	1	2
$3x + 2$			$\bigcirc$		

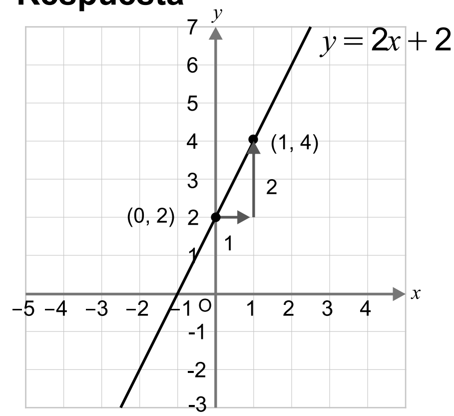
$y = \boxed{}\,x + \bigcirc$



Ejemplo 2.10

Grafique la función de primer grado $y = 2x + 2$.

Respuesta



Solución:

Paso 1: Como la ordenada al origen es 2, la gráfica pasa por (0, 2).

Paso 2: Como la pendiente es 2, cuando se avanza 1 hacia la derecha se avanza 2 hacia arriba, es decir que pasa por el punto (1, 4).

Paso 3: Unir los dos puntos (0, 2) y (1, 4).

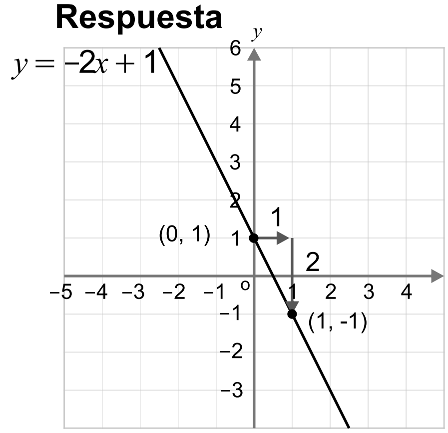
Ejercicio 2.9 Grafique las siguientes funciones de primer grado.

a) $y = x + 2$ b) $y = 5x - 1$

Ejemplo 2.11

Grafique la función de primer grado $y = -2x + 1$.

Respuesta



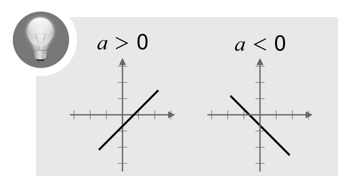
Solución:

Paso 1: Como la ordenada al origen es 1, la gráfica pasa por (0, 1).

Paso 2: Como la pendiente es −2, cuando se avanza 1 hacia la derecha se avanza 2 hacia abajo, es decir que se pasa por el punto (1, −1).

Paso 3: Unir los dos puntos (0, 1) y (1, −1).

En la recta $y = ax + b$, cuando en x se avanza a la derecha, si a es positivo entonces en y se avanza hacia arriba, y si a es negativo entonces en y se avanza hacia abajo.



La inclinación de la recta

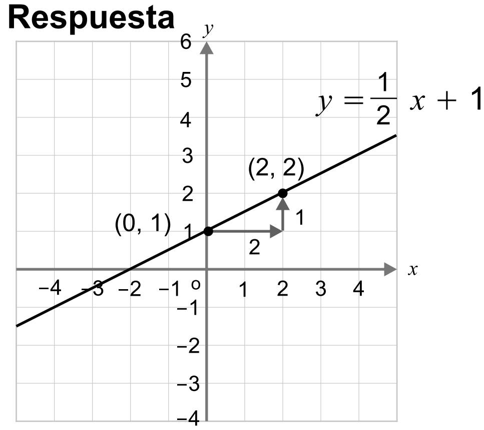
Ejercicio 2.10 Grafique las siguientes funciones.

a) $y = -3x + 4$ b) $y = -x + 3$

Ejemplo 2.12

Grafique la función de primer grado $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Respuesta



Solución:

Paso 1: Como la ordenada al origen es 1, la gráfica pasa por (0, 1).

Paso 2: Como la pendiente es $\frac{1}{2}$, cuando se avanza 2 hacia la derecha se avanza 1 hacia arriba, es decir que se pasa por el punto (2, 2).

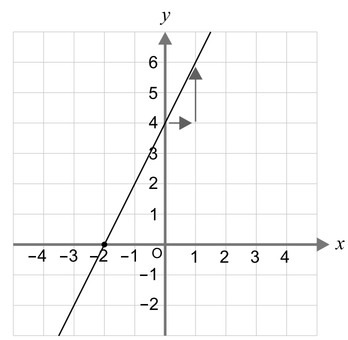
Paso 3: Unir los dos puntos (0, 1) y (2, 2).

Ejercicio 2.11 Grafique la función de primer grado $y = \frac{1}{4}x + 2$, evalúe para $x = 0$ y $x = 4$.

Sección 3: Expresión de una función de primer grado en la forma $y = ax + b$ dada su gráfica

Ejemplo 2.13

Exprese la función de primer grado en la forma $y = ax + b$, dada su gráfica.



Solución:

Observando su gráfica la recta corta el eje y en 4 que es la ordenada al origen.

La ordenada al origen es 4.

La pendiente es la razón de cambio $\frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x} = \frac{2}{1} = 2.$

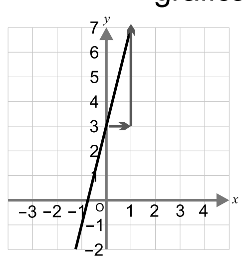
Ahora sustituyendo el valor de $a = 2$, $b = 4$ en $y = ax + b$ encuentra su expresión.

Respuesta: $y = 2x + 4$

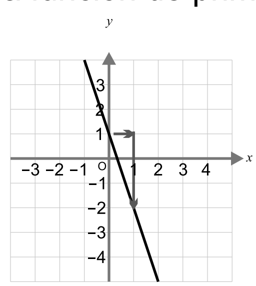
Para escribir la función de primer grado en la forma $y = ax + b$ a partir de su gráfica es necesario identificar la ordenada al origen y determinar la pendiente de la recta.

Ejercicio 2.12 Encuentre la función de primer grado en la forma $y = ax + b$, dadas sus gráficas.

a)



b)



$y = ax + b$ ← Ordenada al origen

Pendiente

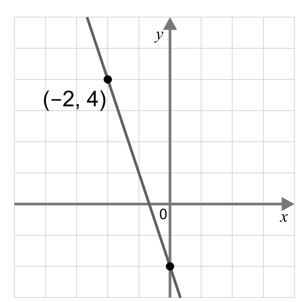
En este libro, cuando se le pregunte **"Encuentre la función de primer grado"** conteste en la forma $y = ax + b$

Ejemplo 2.14

Encuentre la función de primer grado cuya gráfica pasa por $(-2, 4)$ y su pendiente es -3.

Solución:

1. La expresión de la función de primer grado es $y = ax + b$ y como su pendiente es -3, $a = -3$, entonces $y = -3x + b$... ①
2. Como la recta pasa por el punto $(-2, 4)$ sustituyendo $x = -2$ y $y = 4$ en ①, tenemos que
$y = -3x + b$
$4 = -3(-2) + b$
$4 = 6 + b$
$b = -2$



Respuesta: $y = -3x - 2$

Observe que cuando $a = -3$ y $b = -2$ la gráfica de la función de primer grado $y = ax + b$ es la recta $y = -3x + (-2)$ entonces $y = -3x - 2$

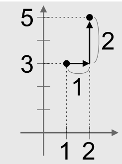
Ejercicio 2.13

Encuentre la función de primer grado cuya gráfica pasa por $(0, 1)$ y su pendiente es -2.

Sección 4: Expresión de una función de primer grado en la forma $y = ax + b$ a partir de dos puntos

Ejemplo 2.15

Encuentre la función de primer grado cuya gráfica pasa por los puntos (1, 3) y (2, 5).



Note que si avanza 1 hacia la derecha avanza 2 hacia arriba.

Por lo tanto la pendiente de la recta es $\dfrac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x} = \dfrac{5-3}{2-1}$

Solución:

Observe dos puntos (1, 3) y (2, 5).

Cambio en y de 3 a 5 es: $5 - 3 = 2$

Cambio en x de 1 a 2 es: $2 - 1 = 1$

Entonces la pendiente de la recta es $a = \dfrac{5-3}{2-1} = \dfrac{2}{1} = 2$.

La función de primer grado que buscamos es

$y = 2x + b$

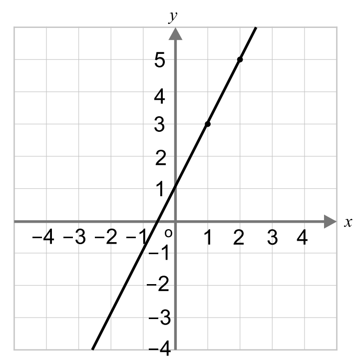
Como la recta pasa por el punto (1, 3), sustituyendo $x = 1$, $y = 3$ en $y = 2x + b$ se tiene:

$y = 2x + b$

$3 = 2\ (1) + b$

$3 = 2 + b$

$b = 1$



Respuesta: $y = 2x + 1$

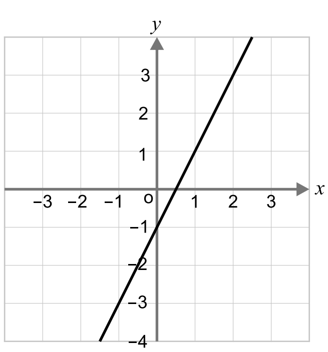
Para encontrar una función de primer grado ($y = ax + b$) a partir de dos puntos es necesario:

1. Determinar la pendiente "a", utilizando la razón de cambio.
2. Sustituir el valor de la pendiente "a" en $y = ax + b$.
3. Elegir uno de los puntos, sustituir los valores de x y y en $y = ax + b$, para encontrar el valor de b.

Ejercicio 2.14 Encuentre la función de primer grado cuya gráfica pasa por los puntos (2, 3) y (4, 9).

Ejercicio 2.15 Resuelva.

a) Encuentre la función de primer grado cuya gráfica es la siguiente recta.



b) Encuentre la función de primer grado cuya gráfica pasa por el punto (2, −1) y su pendiente es 5.

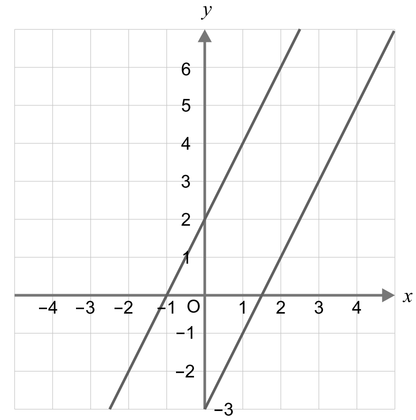
c) Encuentre la función de primer grado cuya gráfica pasa por los puntos (1, −1) y (2, −6).

Con la gráfica de la derecha lea y observe detenidamente.

1) Observe las gráficas de las siguientes funciones de primer grado.

2) Observe que si las rectas $y = 2x + 2$ y $y = 2x - 3$ por más que se prolongan, nunca se van a tocar en un punto.

Por lo tanto se puede asumir que son paralelas.
Observe que las pendientes de ambas rectas son iguales, es decir, ambas tienen pendiente 2.
De lo anterior se concluye lo siguiente.



$y = 2x + 2$ $\qquad$ $y = 2x - 3$

Criterio de paralelismo entre rectas.
Dos rectas son paralelas cuando sus pendientes son iguales.

Cuando $a_1 = a_2$
Las rectas $\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases}$
son paralelas

Ejercicio 2.16 Seleccione, cuáles de las siguientes rectas son paralelas a la recta $y = -3x + 4$ utilizando el criterio de paralelismo.

a) $y = 3x + 4$ $\qquad$ b) $y = -2x + 4$ $\qquad$ c) $y = -3x - 5$ $\qquad$ d) $y = -3x$

Ejemplo 2.16

Encuentre la función de primer grado cuya gráfica es paralela a $y = 3x - 2$ y pasa por $(-1, -2)$.

Solución:

Se conoce que ambas ecuaciones tienen la misma pendiente, por lo tanto, tomando como pendiente $a = 3$, tenemos que $y = 3x + b$ y también sabemos que pasa por el punto $(-1, -2)$ entonces sustituyendo estos valores encontramos b.

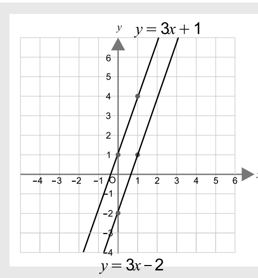
$y = 3x + b$

$-2 = 3(-1) + b$

$-2 = -3 + b$

$b = 1$

Respuesta: $y = 3x + 1$



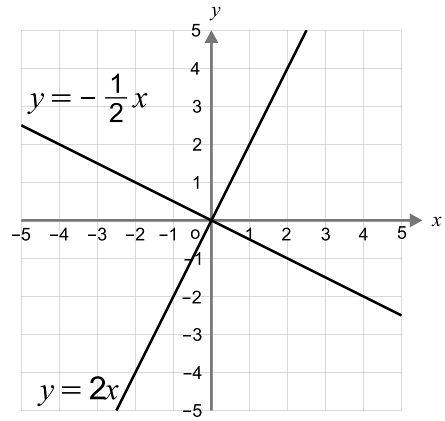
Ejercicio 2.17 Encuentre la función de primer grado cuya gráfica es paralela a la recta:

a) $y = 2x + 5$ y pasa por (1, 1) $\qquad$ b) $y = -x + 4$ y pasa por (-2, 1)

Con la gráfica de la derecha lea y observe detenidamente.

1) Las dos rectas se intersecan en un punto. Por lo que determinan 4 ángulos.

2) Utilice el transportador para medir el ángulo comprendido entre las dos rectas.



Note que la medida de cada ángulo es de 90º, es decir, que cada ángulo es un ángulo recto.
Por lo tanto, la recta $y = -\frac{1}{2}\ x$ y $y = 2x$ son perpendiculares.
Además observe al multiplicar sus pendientes
$-\frac{1}{2} \times 2 = -1$

Criterio de perpendicularidad entre rectas.
Dos rectas son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es igual a −1.

Cuando $a_1 \times a_2 = -1$

Las rectas $\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases}$

son perpendiculares

Ejemplo 2.17

Seleccione cuáles de las siguientes rectas son perpendiculares a la recta $y = 2x + 1$.

a) $y = \frac{1}{2}x + 3$ b) $y = -2x + 8$ c) $y = -\frac{1}{2}x + 2$

Solución:

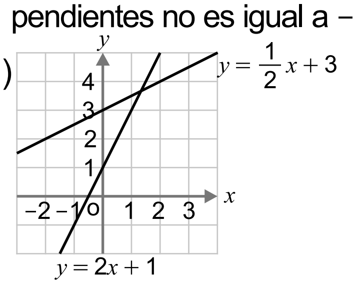
Para determinar si las rectas son perpendiculares es suficiente aplicar el criterio de perpendicularidad.

a) $2 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

No son perpendiculares ya que al multiplicar ambas pendientes no es igual a −1.

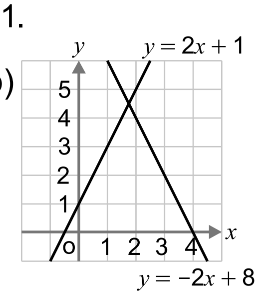
b) $2 \times (-2) = -4$

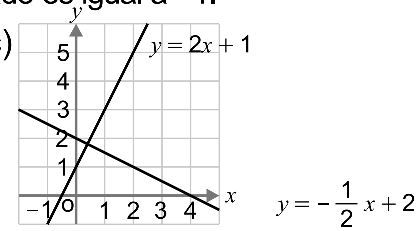
No son perpendiculares ya que al multiplicar ambas pendientes no es igual a −1.

a)


c) $2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{2} = -1$

Sí, son perpendiculares porque al multiplicar ambas pendientes el resultado es igual a −1.

b)


c)


Respuesta: inciso "c"

Ejercicio 2.18 Seleccione cuáles de las siguientes rectas son perpendiculares a la recta $y = 3x + 5$.

a) $y = -3x + 8$ b) $y = -\frac{1}{3}x + 2$ c) $y = \frac{1}{3}x - 6$

d) $y = 3x - 6$ e) $y = -\frac{2}{3}x + 8$ f) $y = -\frac{1}{3}x - 10$

Ejemplo 2.18

Encuentre la función de primer grado si su gráfica pasa por el punto (−3, 2) y es perpendicular a $y = 3x + 4$.

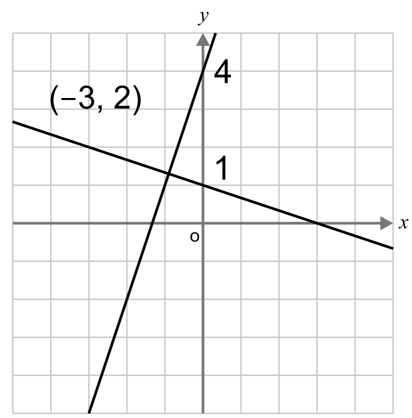
Solución:

Sea $y = ax + b$ la función que se pide.

Por el criterio de perpendicularidad sabemos que

$3 \times a = -1$ implica que $a = -\frac{1}{3}$

y queda $y = -\frac{1}{3}x + b$ y como sabemos que pasa por el punto (−3, 2) tenemos que



$$y = -\frac{1}{3}x + b$$

$$2 = -\frac{1}{3}(-3) + b$$

$$2 = \frac{3}{3} + b$$

$$2 = 1 + b$$

$$b = 1$$

Respuesta: $y = -\frac{1}{3}x + 1$

Ejercicio 2.19

Encuentre la función de primer grado si su gráfica es perpendicular a la recta:

a) $y = 4x - 1$ y que pasa por el punto (0, 4)

b) $y = -\frac{1}{2}x + 3$ y que pasa por el punto (1, 6)

Lección 3: Solución gráfica de un sistema de ecuaciones de primer grado

Sección 1: Solución gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables

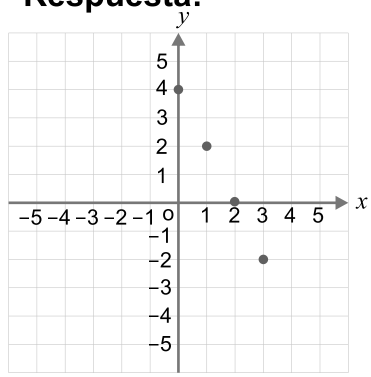
Ahora vamos a pensar en las soluciones de la ecuación de primer grado en dos variables.

Los pares de valores de x y y, (0,4), (1,2), (2,0) y (3, − 2) cumplen la ecuación $2x + y = 4$, es decir estos pares son las soluciones de $2x + y = 4$.

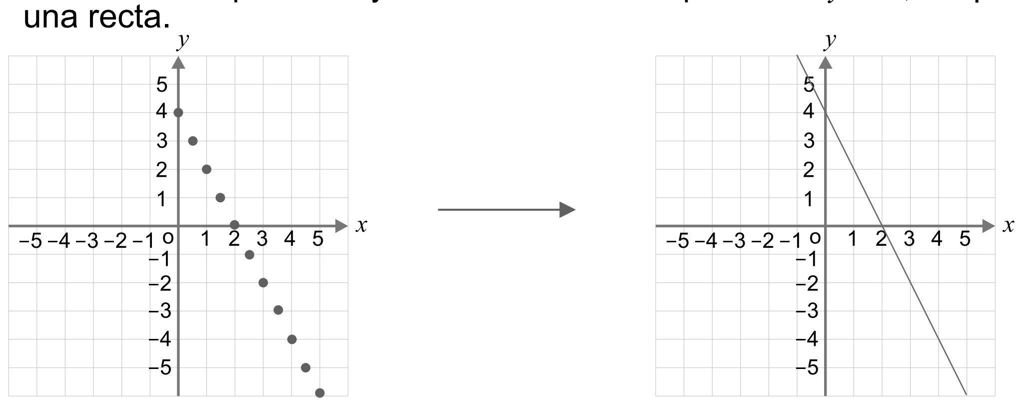
Ejemplo 3.1

Ubique los puntos (0,4), (1,2), (2,0), y (3, − 2) en el sistema de coordenadas.

Respuesta:



Tomando más puntos cuyas coordenadas cumplen $2x + y = 4$, los puntos van a formar una recta.



Si se despeja para y en $2x + y$, $y = -2x + 4$
Entonces se puede considerar que y es una función de primer grado de x.
Ahora el conjunto de los puntos cuyas coordenadas son soluciones de la ecuación $2x + y = 4$ coinciden con la gráfica de la función de primer grado $y = -2x + 4$ y es una recta.

A esta recta se le llama gráfica de la ecuación $2x + y = 4$.

La gráfica de la ecuación $\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} = \boldsymbol{c}$ donde por lo menos uno de a y b es distinto de cero, es una recta. La ecuación $\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} = \boldsymbol{c}$, se llama ecuación de la recta.

Ejemplo 3.2

Convierta la ecuación $x + y = 2$ a la forma $y = ax + b$ y trace su gráfica.

Solución:

Paso 1 Pasar la ecuación $x + y = 2$ a la forma $y = ax + b$

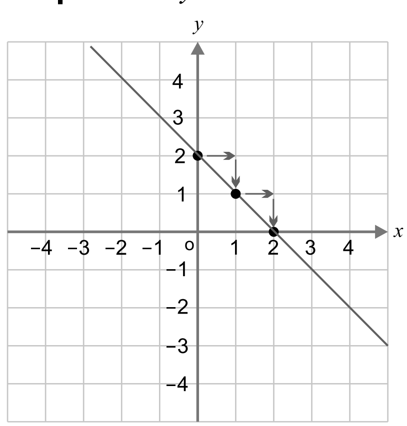
$$x + y = 2$$
$$y = -x + 2$$

Paso 2 Como la ordenada al origen es 2, la gráfica pasa por el punto (0,2).

Paso 3 Como la pendiente es -1 entonces cuando avanza 1 a la derecha avanza 1 hacia abajo, es decir, que la recta pasa por los puntos (1,1), (2,0).

Paso 4 Al unir los puntos (1,1), (2,0) se obtiene su recta.

Respuesta $y = -x + 2$



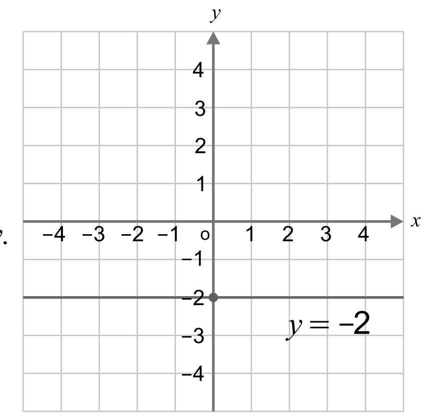
La gráfica de una función de primer grado es un recta.

Ejercicio 3.1 Convierta las siguientes ecuaciones a la forma $y = ax + b$ y trace su gráfica.

a) $3x + y = -6$ b) $-x + y = -3$ c) $y - 2x = -3$

Ejemplo 3.3

Trace la gráfica de la ecuación $2y + 4 = 0$.



Solución:

Lo primero que se debe hacer es despejar para y.

$$2y + 4 = 0$$
$$2y = -4$$
$$y = -\frac{4}{2}$$
$$y = -2$$

Observando que en la ecuación $y = -2$, independientemente del valor de x, el valor de y siempre será el mismo. Su gráfica es una recta horizontal, es decir, paralela al eje x.

x	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...
y	...	−2	−2	−2	−2	−2	−2	−2	...

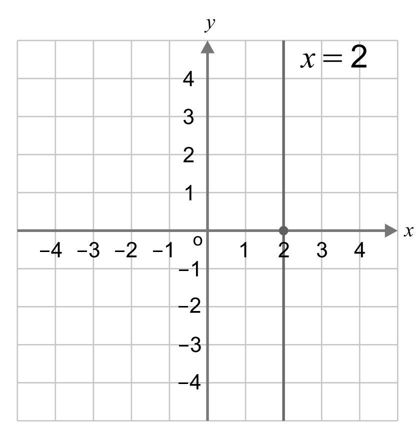
Ejercicio 3.2

Trace la gráfica de las siguientes ecuaciones.

a) $y = 2$ b) $y = -5$ c) $4y - 12 = 0$ d) $2y + 2 = 0$

Ejemplo 3.4

Trace la gráfica de la ecuación $3x - 6 = 0$.



Solución:

$$3x = 6$$
$$x = \frac{6}{3}$$
$$x = 2$$

Note que la ecuación $3x = 6$ no se puede convertir a la forma $y = ax + b$.

Sin embargo en la ecuación $x = 2$ independientemente del valor de y, el valor de x siempre será el mismo. Su gráfica es una recta vertical, es decir, paralela al eje y.

La gráfica de la ecuación $ax + by = c$ donde a y/o b son distintos de cero es una recta.

Si $a = 0$ entonces la recta es horizontal.
Si $b = 0$ entonces la recta es vertical.

En este caso, a no significa pendiente, b no significa ordenada al origen, porque no estamos hablando de la forma $y = ax + b$.

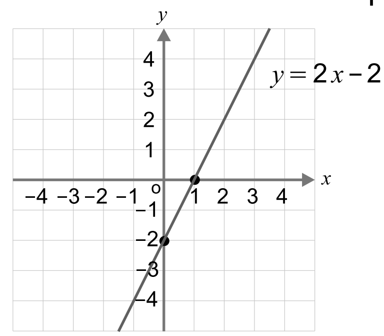
Ejercicio 3.3

Trace la gráfica de las siguientes ecuaciones.

a) $x = 3$ b) $2x + 8 = 0$ c) $5x - 25 = 0$ d) $x = 0$

Ejemplo 3.5 Observe la recta $y = 2x - 2$. ¿Cúales son las coordenadas de los puntos de la recta que cortan al eje x y y?

Solución:

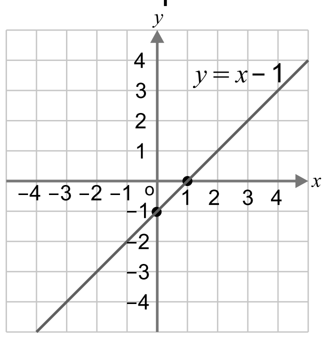


Observe que la recta $y = 2x - 2$ corta al eje x en (1, 0), y corta al eje y en (0, −2).

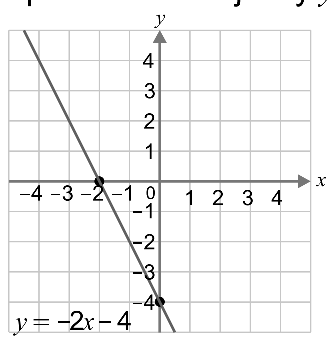
Respuesta: (0,−2) y (1,0)

Ejercicio 3.4 Observe las siguientes rectas. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos de la recta que cortan al eje x y y?

a)



b)



En general sabemos que el punto en donde la gráfica corta el eje y se llama intercepto en y, de igual manera el punto donde la gráfica corta el eje x se llama intercepto en x.

Los **interceptos** en x y y son los puntos donde la gráfica corta los ejes x y y respectivamente.

Ejemplo 3.6 Encuentre los interceptos en x y y de la recta $y = -2x + 10$

Solución:

En el eje x el valor de y es 0, por tanto para encontrar el intercepto en x se sustituye $y = 0$ en $y = -2x + 10$ de donde se obtiene

$$y = -2x + 10$$
$$0 = -2x + 10$$
$$2x = 10$$
$$x = 5$$

En el eje y el valor de x es 0, por tanto para encontrar el intercepto en y se sustituye $x = 0$ en $y = -2x + 10$ de donde se obtiene

$$y = -2x + 10$$
$$y = -2\,(0) + 10$$
$$y = 10$$

Ya se sabe que 10 es la ordenada al origen, por lo tanto se puede encontrar el intercepto en y si calcular.

Respuesta: El intercepto en x es (5, 0) El intercepto en y es (0, 10)

Ejercicio 3.5 Encuentre los interceptos en x y y de las siguientes rectas.

a) $y = 3x - 6$ b) $y = -4x + 12$

Ejemplo 3.7

Trace la gráfica de la ecuación $4x - 3y = 12$ utilizando los interceptos en x y y.

Solución:

❶ Para encontrar el intercepto en y haga lo siguiente:

Si $x = 0$ entonces

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 12 \\ 4(0) - 3y &= 12 \\ -3y &= 12 \\ y &= -4 \end{aligned}$$

Por lo que, el intercepto en y es el punto $(0, -4)$.

❷ Para encontrar el intercepto en x haga lo siguiente:

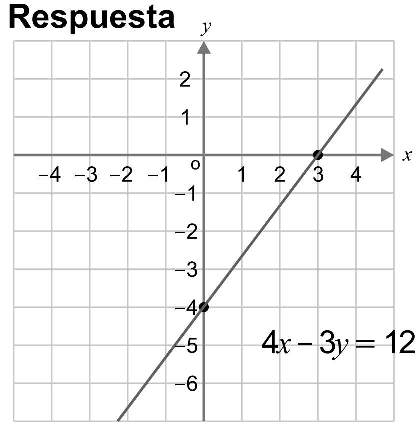
Si $y = 0$ entonces

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 12 \\ 4x - 3(0) &= 12 \\ 4x &= 12 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Por lo que, el intercepto en x es el punto $(3, 0)$.

❸ Una los puntos $(0,-4)$ y $(3,0)$.

Respuesta



Para trazar la gráfica de una ecuación solo se necesita encontrar los interceptos en x y y.

Ejercicio 3.6 Trace la gráfica de las siguientes ecuaciones utilizando los interceptos en x y y.

a) $2x + y = 10$

b) $2x + 3y = 6$

Ejemplo 3.8

Trace la gráfica de la ecuación $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 1$ utilizando los interceptos en x y y.

Solución:

❶ Para encontrar el intercepto en y haga lo siguiente:

Si $x = 0$ entonces

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y &= 1 \\ -\frac{1}{3}(0) + \frac{1}{2}y &= 1 \\ \frac{1}{2}y &= 1 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Por lo que el intercepto en y es $(0, 2)$.

❷ Para encontrar el intercepto en x haga lo siguiente:

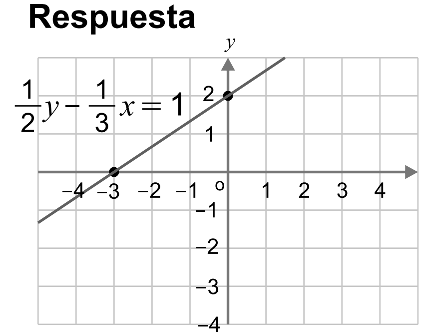
Si $y = 0$ entonces

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y &= 1 \\ -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}(0) &= 1 \\ -\frac{1}{3}x &= 1 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Por lo que el intercepto en x es $(-3, 0)$.

❸ Una los puntos (0,2) y (-3,0).

Respuesta



Ejercicio 3.7 Trace la gráfica de las siguientes ecuaciones utilizando los interceptos.

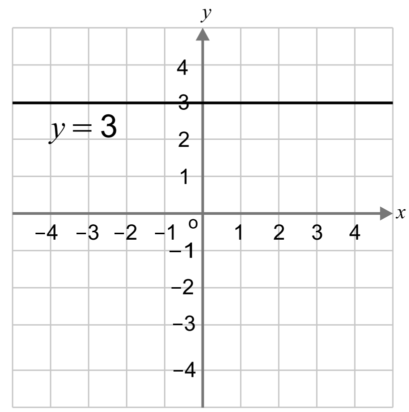
a) $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 1$ b) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 1$

Ejemplo 3.9

Encuentre los interceptos de las siguientes rectas.

a) $3y - 9 = 0$ b) $8x = 16$

Solución:



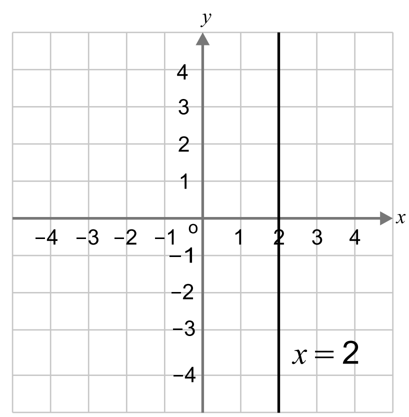
a) Como la recta $3y - 9 = 0$ no corta al eje x el intercepto en x no existe.
El intercepto en y se obtiene al despejar para y.

$3y - 9 = 0$

$3y = 9$

$y = 3$

Respuesta: El intercepto en y es el punto (0, 3), y no tiene intercepto en el eje x.



b) Como la recta $8x = 16$ no corta al eje y el intercepto en y no existe.
El intercepto en x se obtiene al despejar para x.

$8x = 16$

$x = 2$

Respuesta: El intercepto en x es el punto (2, 0), y no tiene intercepto en el eje y.

La gráfica es muy útil para comprender e imaginar las rectas.

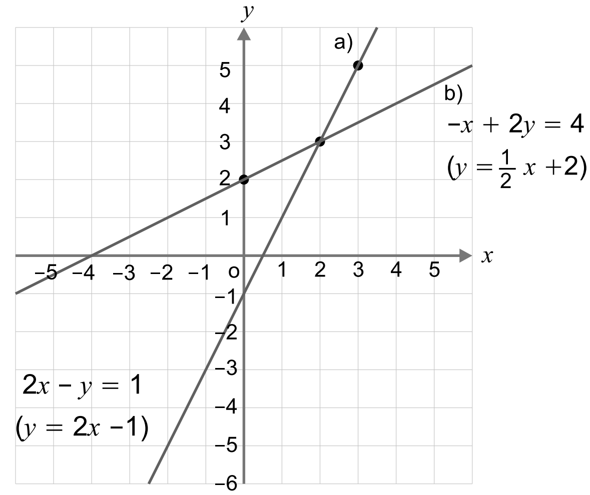
Ejercicio 3.8 Encuentre los interceptos de las siguientes rectas.

a) $4y + 3 = 7$ b) $5x + 20 = 0$

Ejemplo 3.10

Dadas las siguientes gráficas encuentre el punto donde se intersecan ambas rectas.

a) $2x - y = 1$ b) $-x + 2y = 4$



Solución:

Observe las gráficas y pregúntese, ¿qué punto en común tienen ambas rectas?

Es fácil de encontrar el punto donde se intersecan las dos rectas. Sus coordenadas son (2,3).

Respuesta: El punto (2, 3)

Ahora vamos a formar el sistema de ecuaciones y resolverlo

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & \text{①} \\ -x + 2y = 4 & \text{②} \end{cases}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones vamos a eliminar una variable del sistema y así obtener una ecuación de primer grado.

Observar los coeficientes de la variable y, tienen − 1 y 2 entonces vamos multiplicar ① x 2 y luego vamos a sumarlas

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + 2y = 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} \text{①} \times 2 \\ \text{②} \end{matrix} \longrightarrow \begin{array}{r} 4x - 2y = 2 \\ +)\ -x + 2y = 4 \\ \hline 3x \quad\ = 6 \\ x = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} A = B \\ +)\ C = D \\ \hline A + C = B + D \end{array}$$

Para encontrar el valor de y sustituye $x = 2$ en ①

$$2x - y = 1$$
$$2(2) - y = 1$$
$$4 - y = 1$$
$$-y = -3$$
$$y = 3$$

También puede tomar la ecuación ② para encontrar el valor de y.

La solución del sistema es $x = 2,\ y = 3$.

Entonces se puede concluir que a través de sus gráficas se puede observar que las rectas se intersecan en el punto (2,3) y que al resolver el sistema de ecuaciones la respuesta es la misma.

Las coordenadas del punto de intersección de dos rectas son la solución del sistema de ecuaciones de ambas rectas.

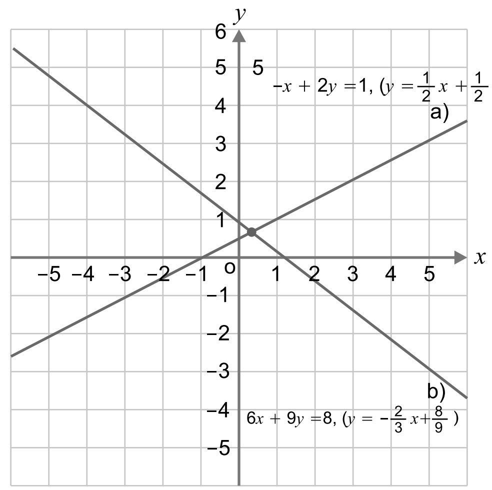
Ejercicio 3.9 Encuentre el punto de intersección de ambas rectas, forme un sistema de ecuaciones y resuelvalo.

a) $2x - y = 4$ b) $-3x + y = 1$

Ejemplo 3.11

Dadas las gráficas de las siguientes ecuaciones encuentre el punto donde se intersecan ambas rectas.

a) $-x + 2y = 1$ b) $6x + 9y = 8$



Solución:

Observando las dos gráficas vemos que se nos hace difícil encontrar el punto donde se intersecan las dos rectas.

Formando con ellas un sistema de ecuaciones, podemos encontrar fácilmente el punto donde se intersecan ambas rectas.

$$\begin{cases} -x + 2y = 1 & ① \\ 6x + 9y = 8 & ② \end{cases}$$

Para resolver el sistema vamos a multiplicar ① $\times$ 6 y luego sumamos las ecuaciones

$$\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 6x + 9y = 8 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} ① \times 6 \\ ② \end{matrix} \longrightarrow \begin{array}{r} -6x + 12y = 6 \\ +)\ 6x + \ \ 9y = 8 \\ \hline 21y = 14 \end{array} \longrightarrow y = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

Para encontrar el valor de x sustituimos $y = \frac{2}{3}$ en ① y obtenemos

$$-x + 2y = 1$$
$$-x + 2\left(\frac{2}{3}\right) = 1$$
$$-x + \frac{4}{3} = 1$$
$$-x = 1 - \frac{4}{3}$$
$$x = \frac{1}{3}$$

Con solo observar las gráficas, no siempre se puede determinar el punto de intersección exactamente. Por lo que en este caso, sí es necesario resolver el sistema de ecuaciones de primer grado.

Respuesta: El punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

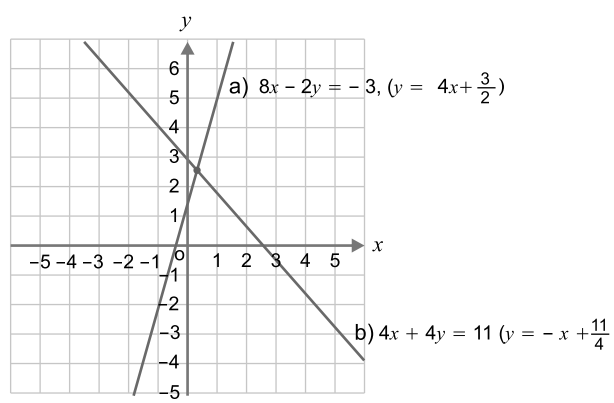
Ejercicio 3.10

Dadas las gráficas de las siguientes ecuaciones encuentre el punto donde se intersecan ambas rectas.

.

a) $8x - 2y = -3$

b) $4x + 4y = 11$



Ejercicio 3.11 Determine el punto de intersección de las rectas cuyas ecuaciones están dadas en los sistemas.

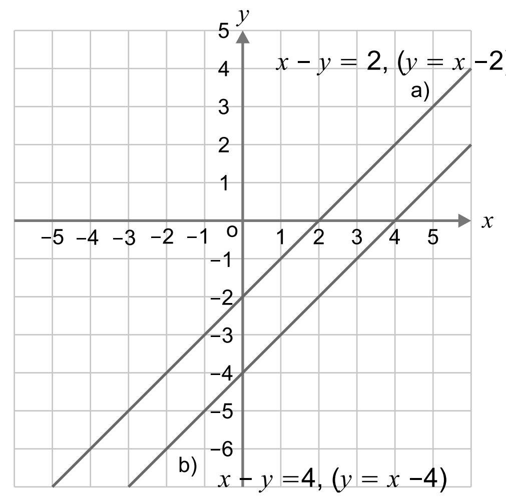
a) $\begin{cases} 2x - 4y = 4 \\ 3x + 8y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = -3 \\ 6x + 2y = 2 \end{cases}$

Anteriormente se aprendió que la solución de un sistema de dos ecuaciones es el punto donde se intersecan las gráficas de ellas.
Ahora observe qué sucede en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.12

Dada las siguientes gráficas de ambas ecuaciones, encuentre las coordenadas del punto donde se intersecan las siguientes rectas.

a) $x - y = 2$ b) $x - y = 4$



Solución:

Si observa las gráficas de ambas ecuaciones, estas no tienen un punto en común, por más que se prolonguen nunca se van a intersecar en un punto.
Por lo tanto, se puede asumir que son paralelas.

Respuesta
No hay ningún punto donde se intersequen ambas rectas.

En la clase anterior se explicó otra manera para encontrar el punto donde se intersecan ambas rectas.

Resolviendo un sistema de ecuaciones puede encontrar el punto donde se intersecan ambas rectas.

$$\begin{cases} x - y = 2 & (1) \\ x - y = 4 & (2) \end{cases}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones vamos a multiplicar ecuación (2) por -1 y luego sumamos las ecuaciones.

$$\begin{cases} x - y = 2 & (1) \\ x - y = 4 & (2) \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} (1) \\ (2) \times (-1) \end{matrix} \longrightarrow \begin{array}{r} x - y = 2 \\ +) -x + y = -4 \\ \hline 0 \neq -2 \end{array}$$

Observe que no se cumple, es decir, el sistema no tiene solución.

Cuando las dos rectas no tienen punto de intersección, se puede concluir que el sistema de ecuaciones formado por ellas **no tiene solución**.

Ejercicio 3.12 Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones.

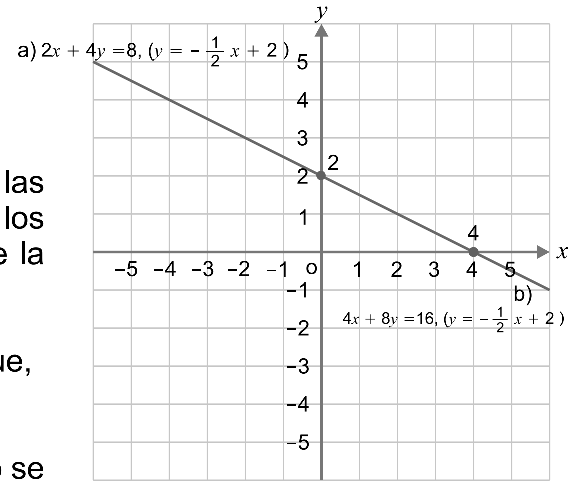
a) $\begin{cases} x + 4y = 5 \\ 4x + 16y = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 2y = 5 \\ x - y = 7 \end{cases}$

Un sistema de ecuaciones puede tener una solución o ninguna solución, ahora observemos lo que pasa en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.13

Trace las gráficas de las siguientes ecuaciones, encuentre el punto donde se intersecan ambas rectas.

a) $2x + 4y = 8$ b) $4x + 8y = 16$



Solución:

Si observa la gráfica de ambas ecuaciones las rectas a) y b) son idénticas, esto significa que los puntos de una de las rectas son los puntos de la otra.

Respuesta: Las dos rectas coinciden, por lo que, hay infinitas intersecciones.

Para resolver el sistema de ecuaciones primero se multiplica la ecuación ① por −2 y luego se suman las ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8 & ① \\ 4x + 8y = 16 & ② \end{cases} \xrightarrow{①\times(-2)} \begin{array}{r} -4x - 8y = -16 \\ +)\ 4x + 8y = 16 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

Observe que la igualdad se cumple. Dividiendo la ecuación ① y ② entre 2 y 4 respectivamente se obtiene la misma ecuación $x + 2y = 4$. Por lo tanto, las soluciones de una son las de la otra. Entonces tiene infinitas soluciones.

Cuando dos ecuaciones se reducen a la misma, las soluciones de la ecuación ① coinciden con las de la ecuación ② así que se puede concluir que el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones.

Ejercicio 3.13 ¿Cuántas soluciones tienen los siguientes sistemas de ecuaciones?

a) $\begin{cases} -x - 2y = 3 \\ -3x - 6y = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 9x + 3y = 27 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = -6 \\ -x + y = 6 \end{cases}$

Ejemplo 3.14

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 2x + 6y = 2 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 4y = 14 \\ x - 5y = -8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x + 2y = 5 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases}$

Solución:

a) $\begin{cases} 2x + 6y = 2 & (1) \\ x + 3y = 1 & (2) \end{cases}$

Para resolver el sistema de ecuaciones se multiplica (2) $\times (-2)$ y luego se suman ambas ecuaciones.

$\begin{cases} 2x + 6y = 2 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2) \times (-2) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rr} & 2x + 6y = 2 \\ +) & -2x - 6y = -2 \\ \hline & 0 = 0 \end{array}$

Es decir (1) y (2) $\times (-2)$ coinciden.

Respuesta: El sistema tiene infinitas soluciones.

b) $\begin{cases} 3x + 4y = 14 & (1) \\ x - 5y = -8 & (2) \end{cases}$

Para resolverlo multiplicamos (2) $\times (-3)$ y luego sumamos las ecuaciones.

$\begin{cases} 3x + 4y = 14 \\ x - 5y = -8 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2) \times (-3) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rr} & 3x + 4y = 14 \\ +) & -3x + 15y = +24 \\ \hline & 19y = 38 \\ & y = 2 \end{array}$

Sustituyendo $y = 2$ en (1)

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 14 \\ 3x + 4\ (2) &= 14 \\ 3x + 8 &= 14 \\ 3x &= 14 - 8 \\ 3x &= 6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Respuesta: La solución del sistema es $x = 2,\ y = 2$

c) $\begin{cases} -2x + 2y = 5 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases}$

Para resolver el sistema sumamos ambas ecuaciones.

$$\begin{array}{rr} & -2x + 2y = 5 \\ +) & 2x - 2y = 3 \\ \hline & 0 \neq 8 \end{array}$$

Respuesta: El sistema no tiene solución.

Un sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables es:

- **Inconsistente**: Si no tiene solución.
- **Consistente:** Si tiene exactamente una solución.
- **Dependiente**: Si tiene infinitas soluciones.

Ejercicio 3.14 Resuelva y clasifique los siguientes sistemas de ecuaciones en inconsistente, consistente y dependiente.

a) $\begin{cases} x - y = 6 \\ x + y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 8y = 4 \\ x - 4y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 3y = 3 \\ -x - y = 4 \end{cases}$

Ejercicio 3.15

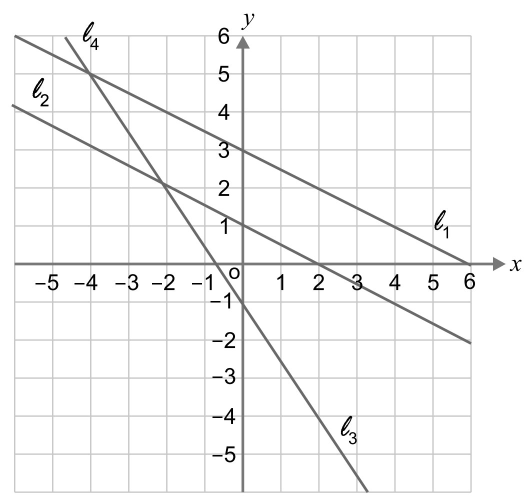
Clasifique en consistente, inconsistente y dependiente los siguientes sistemas de dos ecuaciones de primer grado determinados por el par de rectas dadas.

a) ℓ_1 y ℓ_2

b) ℓ_2 y ℓ_4

c) ℓ_3 y ℓ_4

d) ℓ_1 y ℓ_3



Lección 4: Aplicación de las funciones de primer grado

Sección 1: Datos experimentales

Ejemplo 4.1

La siguiente tabla muestra el cambio de la temperatura cuando se calienta el agua.

a) Ubique los puntos que corresponden a los datos de la tabla.

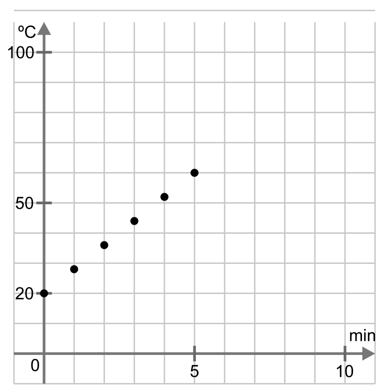
b) ¿Cuánto será la temperatura en el momento $x = 10$ (min)?

x (min)	0	1	2	3	4	5	…	10
y (ºC)	20	28	36	44	52	60	…	

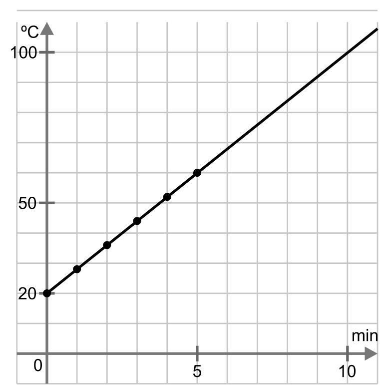
c) Si se supone que los valores de x y y están en la recta que une los puntos (0, 20) y (10, 100), ¿cuál sería la ecuación que representa la relación y en término de x?

Solución:

a) Observe que para ubicar los puntos se debe identificar las coordenadas x y y. Ejemplo: (0, 20), (1, 28)



b) Como los puntos están ubicados en una recta, se puede hacer uso de la gráfica y determinar el valor.



Respuesta: 100 ºC

c) Como la ordenada al origen es 20 y la pendiente es:

$$\frac{\textbf{Cambio en } y}{\textbf{Cambio en } x} = \frac{100 - 20}{10 - 0} = \frac{80}{10} = 8$$

Respuesta: $y = 8x + 20$

La relación entre la temperatura del agua al calentarse y el tiempo es una función de primer grado. En el Ejemplo 4.1.

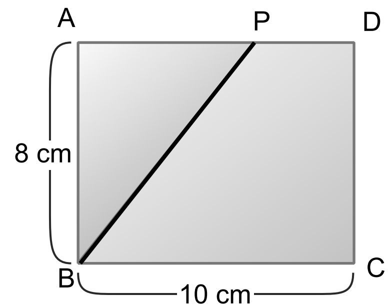
Ejercicio 4.1 La relación que existe entre la distancia recorrida y el tiempo de una persona que camina a 10 km por hora está representada por $y = 10x$, si x representa el tiempo en horas, y y la distancia recorrida en km.

a) Trace la gráfica que relaciona la distancia recorrida y (km) con el tiempo x (horas).

b) ¿Cuántos km recorre al transcurrir 3 horas?

Ejemplo 4.2

La figura de la derecha muestra el rectángulo ABCD. Los lados AB y BC miden 8 cm y 10 cm respectivamente. El punto P avanza en el lado AD desde el punto A hacia el punto D a la velocidad de 2 cm por segundo.



a) Exprese la distancia AP después de x segundos que P salió de A.

b) Si el área del cuadrilátero PBCD es y cm^2, exprese el área y en términos del tiempo x.

Considere que x solo puede tomar valores de 0 a 5 ya que AD mide 10 cm.

Solución:

a) Velocidad: 2 cm por segundo
Distancia recorrida = velocidad × tiempo

Respuesta: $2x$ (cm)

b) $$\left(\begin{array}{c}\text{área del}\\ \text{cuádrilatero PBCD}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{área del}\\ \text{rectángulo ABCD}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{área del}\\ \text{triángulo ABP}\end{array}\right)$$

$$y = (10 \times 8) - \left(2x \times 8 \times \frac{1}{2}\right)$$

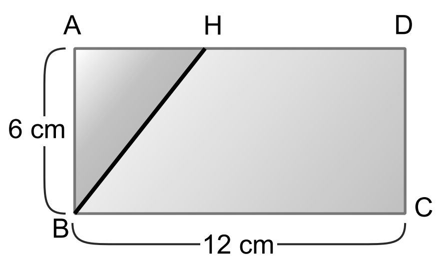
$$y = 80 - 8x$$

Respuesta: $y = -8x + 80$ (cm²)

Ejercicio 4.2 En la figura se muestra el rectángulo ABCD. Los lados AB y BC miden 6 cm y 12 cm respectivamente. El punto H avanza en el lado AD desde el punto A hacia el punto D a la velocidad de 3 cm por segundo.

a) Exprese la distancia AH después de x segundos que H salió de A.

b) Si el área del cuadrilátero HBCD es y cm², exprese el área y en términos del tiempo x.



Ejemplo 4.3

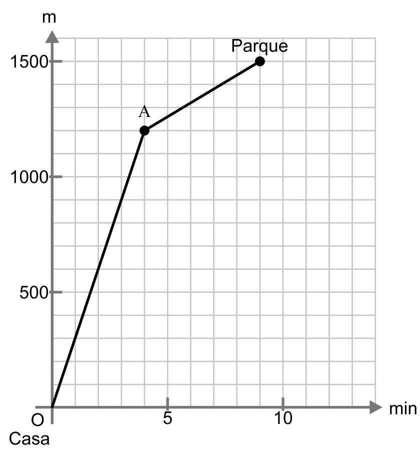
Juan salió de su casa hacia el parque que se encuentra a 1500 m de su casa. De la casa hasta el punto A viajó en bicicleta y de A hasta el parque caminó x (minutos). La gráfica de abajo muestra la distancia recorrida y en metros desde la salida de la casa cuando han transcurrido x (minutos).

a) Exprese la relación entre x y y cuando x tiene los valores de 0 a 4.

b) ¿A qué velocidad viajó en bicicleta?

c) Exprese la relación entre x y y cuando x tiene los valores 4 a 9.

d) ¿A qué velocidad caminó del punto A al parque?



Solución:

a) Observe que la ecuación de la recta OA tiene la forma $y = ax$, ya que el intercepto en y es 0.

Si sustituimos $x = 4$ y $y = 1200$ en $y = ax$ se obtiene que

$$\begin{aligned} y &= ax \\ 1200 &= a(4) \\ 4a &= 1200 \\ a &= 300 \end{aligned}$$

Respuesta: La relación entre x y y está dada por $y = 300x$ cuando x va de 0 a 4.

b) De la relación $y = 300x$, sabemos que en 1 minuto avanza 300 m.

Respuesta: velocidad en bicicleta es 300 m por minuto.

c) La ecuación de la recta del punto A hasta el parque tiene la forma $y = ax + b$, sabemos que la recta pasa por los puntos (4, 1200) y (9, 1500),

la pendiente $a = \dfrac{1500 - 1200}{9 - 4} = \dfrac{300}{5} = 60$, la ecuación buscada es de la forma $y = 60x + b$.

Como la recta pasa por (4, 1200), sustituyendo $x = 4$ y $y = 1200$ en $y = 60x + b$ obtenemos

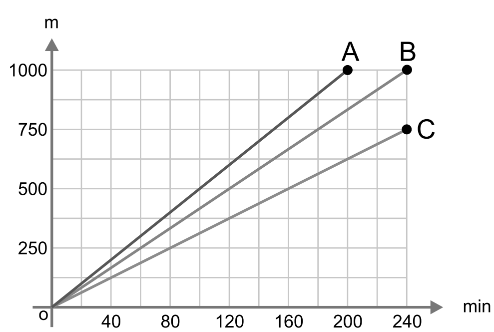
$$\begin{aligned} y &= 60x + b \\ 1200 &= 60\,(4) + b \\ 1200 &= 240 + b \\ b &= 960 \end{aligned}$$

Respuesta: La relación entre x y y está dada por $y = 60x + 960$ cuando x va de 4 a 9.

d) De la relación $y = 60x + 960$ se sabe que en 1 minuto avanza 60 m.

Respuesta: 60 m por minuto.

Ejercicio 4.3 Tres estudiantes, nombrados A, B y C, participan en una carrera de 1000 m. La gráfica muestra de forma aproximada su comportamiento en la carrera.



Conteste.

a) ¿Quién fue el ganador de la carrera?

b) ¿Cuál es la pendiente de la recta que representa al ganador de la carrera en la gráfica?

c) ¿Cuál fue la velocidad del jugador ganador?

Ejercicios

1 Las siguientes tablas muestran la relación entre x y y. Exprese el valor de y en términos de x.

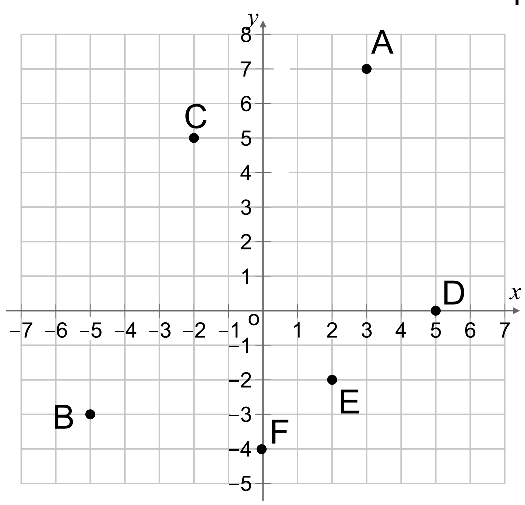
a)

x	0	1	2	3	4	5
y	0	7	14	21	28	35

b)

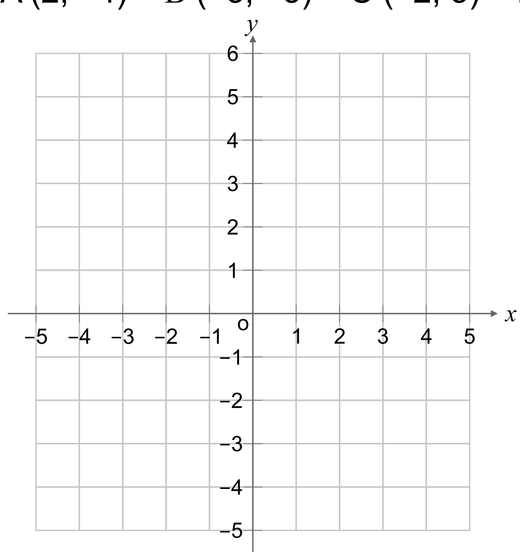
x	0	1	2	3	4	5
y	12	16	20	24	28	32

2 Encuentra las coordenadas de los puntos A, B, C, D, E, F.



3 Ubique los siguientes puntos en el sistema de coordenadas.

A (2, −4) B (−3, −3) C (−2, 5) D (4, 6) E (0, 3) F (5, 0)

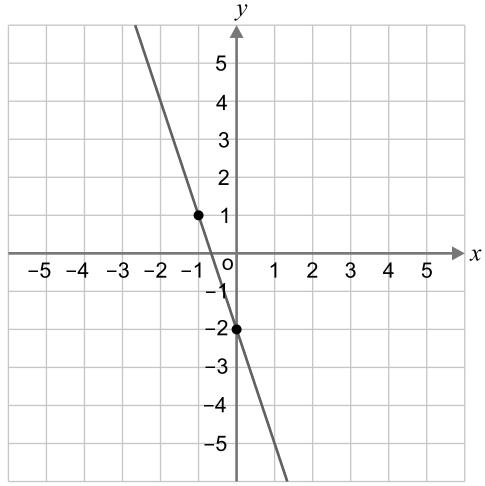


4 Grafique las siguientes funciones de primer grado en un sistema de coordenadas.

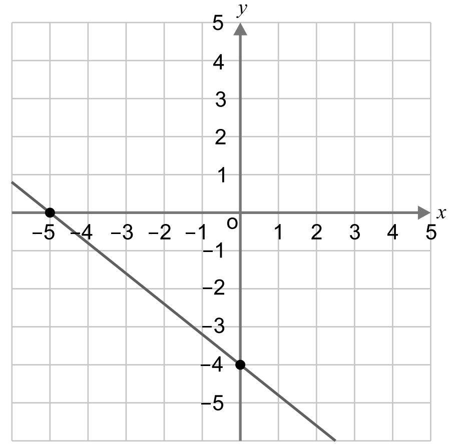
a) $y = 3x - 3$ b) $y = -x + 4$ c) $x = -2$ d) $y = -3$

5 Encuentre la función de primer grado cuya gráfica es la siguiente recta.

a)



b)



6 Encuentre la función de primer grado cuya gráfica pasa por el punto (4, −5) y su pendiente es −3.

7 Encuentre la función de primer grado cuya gráfica pasa por los puntos:

a) (1, 2) y (2, 7) b) (3, 7) y (−6, 1)

8 Encuentre la función de primer grado cuya gráfica es paralela a la recta $y = 3x - 2$ y pasa por el punto (3, 1).

9 Encuentre la función de primer grado cuya gráfica es perpendicular a la recta $y = 3x - 2$ y pasa por el punto (3, 1).

10 Encuentre los interceptos en x y y de las siguientes rectas.

a) $x + y = 1$ b) $4y - x = 4$ c) $x - y = 3$

11 Resuelva el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -2x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$ y luego trace su gráfica.

12 Clasifique en consistentes, inconsistentes y dependientes los siguientes sistemas de dos ecuaciones de primer grado determinadas por el par de rectas dadas.

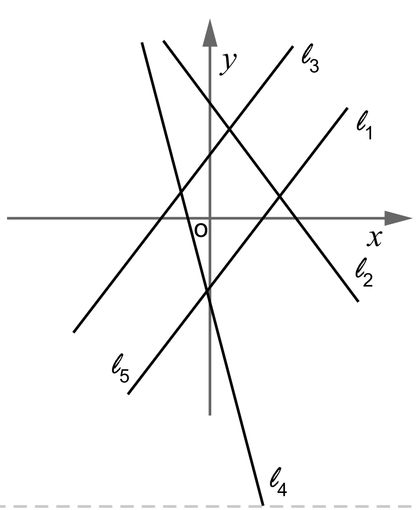
a) ℓ_1 y ℓ_3

b) ℓ_4 y ℓ_5

c) ℓ_1 y ℓ_5

d) ℓ_2 y ℓ_3

e) ℓ_2 y ℓ_4



Unidad 7

Manera de contar

Lección 1: Manera de contar

Unidad 7 Manera de contar

Lección 1: Manera de contar

Sección 1: Principio de la suma

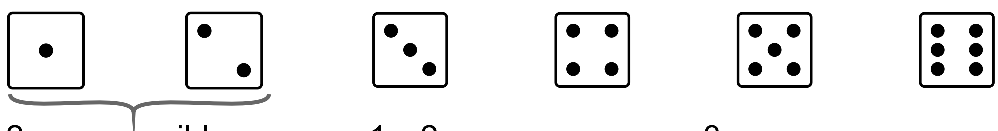
En esta lección se trata de contar el número de casos que ocurren como resultado de un ensayo o el número de maneras en las que se puede hacer un ensayo.

Ejemplo 1.1

Encuentre el número de casos posibles de obtener los números menores que 3 en el lanzamiento de un dado.

Solución:

Los números que tiene el dado (puntos) son 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
Al lanzarlo solo existen los números 1 y 2 que son menores que 3.



2 casos posibles, porque 1 y 2 son menores que 3.

Respuesta: Hay 2 casos posibles.

Ejercicio 1.1

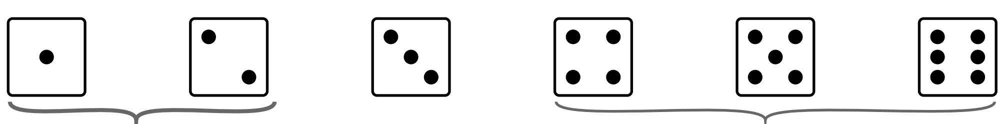
a) Encuentre el número de casos posibles de obtener los números mayores que 3 en el lanzamiento de un dado.

b) Encuentre el número de casos posibles de obtener los números pares en el lanzamiento de un dado.

Ejemplo 1.2

Encuentre el número de casos posibles de obtener los números menores que 3 o mayores que 3 en el lanzamiento de un dado.

Solución:



2 casos posibles, porque 1 y 2 son menores que 3.

3 casos posibles, porque 4, 5 y 6 son mayores que 3.

Entonces, en total hay 5 casos posibles.

$2 + 3 = 5$

Al sumar los casos menores que 3 (que son 2) con los casos mayores que 3 (que son 3) nos da un total de 5 casos.

Respuesta: Hay 5 casos posibles.

Cuando hay dos casos que no ocurren al mismo tiempo, el número de maneras de la ocurrencia de alguno de ellos es la suma del número de casos de estos.

Principio de suma
Si un evento o suceso ocurre de m formas y un segundo evento puede ocurrir de n formas y no es posible que ocurran ambos eventos de manera simultánea, entonces para realizar cualquiera de ellos puede utilizarse de $m + n$ formas.

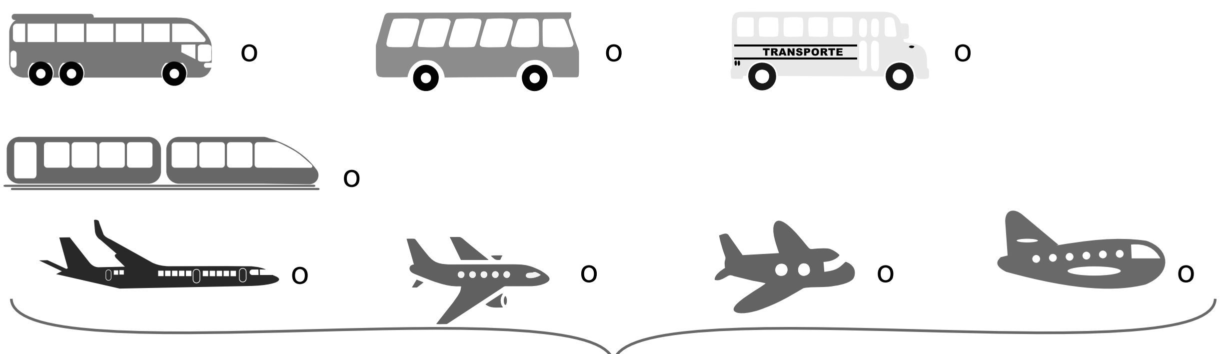
Ejercicio 1.2

a) Encuentre el número de casos posibles de obtener los números menores que 4 o mayores que 5 en el lanzamiento de un dado.
b) Encuentre el número de casos posibles de obtener los números menores que 2 o mayores que 4 en el lanzamiento de un dado.

Ejemplo 1.3

¿Cuántas son las maneras de hacer un viaje a un sitio determinado si para poder realizar el viaje hay 3 empresas de autobuses, 1 de tren y 4 compañías de aviación?

Solución:



8 maneras para viajar

Como hay 3 empresas de autobuses, 1 empresa de tren y 4 compañías de aviación, entonces tenemos $3 + 1 + 4 = 8$ maneras diferentes de viajar.

Respuesta: Hay 8 maneras diferentes de realizar el viaje.

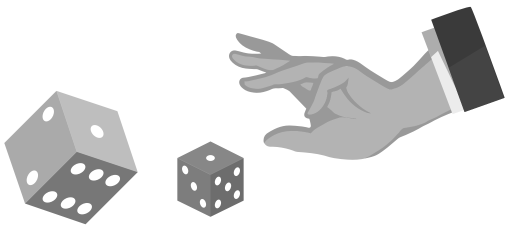
Cuando hay más de dos casos que no ocurren al mismo tiempo, también se pueden sumar los números de casos.

Ejercicio 1.3

¿Cuántas son las maneras de hacer un viaje a un sitio determinado si para poder realizar el viaje hay 2 empresas de autobuses, 3 empresas de aviones y 4 empresas de barcos?

Ejemplo 1.4

Se tiran dos dados, uno grande y otro pequeño. Encuentre el número de casos donde el número del dado pequeño es menor que 3 y el del grande es un número impar.



Solución:

Los casos se muestran a continuación:
Dado pequeño: 1, 2 (Números menores que 3)
Dado grande: 1, 3, 5 (Números impares)

Números del dado		Grande		
		1	3	5
Pequeño	1	(1, 1)	(1, 3)	(1, 5)
	2	(2, 1)	(2, 3)	(2, 5)

En la tabla podemos observar fácilmente el número de casos.

En este caso...
(1, 5)
Número que corresponde al dado pequeño
Número que corresponde al dado grande

Los casos son (1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 3) y (2, 5).

Respuesta: El número total de casos es 6.

Ejercicio 1.4

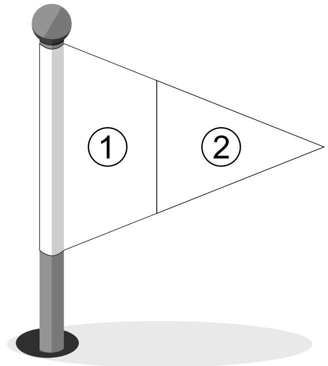
Se tiran dos dados, uno grande y otro pequeño. Encuentre el número de casos donde el número del dado pequeño es mayor que 3 y el del grande es un número par.

Complete la tabla y resuelva.

Números del dado		Grande		
Pequeño				

Ejemplo 1.5

Se dispone de los colores: azul, rojo, amarillo y verde para pintar las dos partes de la bandera con 2 colores diferentes. ¿De cuántas maneras se puede pintar?



Solución:

Se seleccionan los colores en el orden 1 y 2
y se hace la siguiente "tabla de las combinaciones".

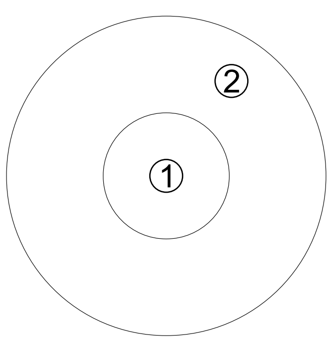
1 \ 2	azul	rojo	amarillo	verde
azul				
rojo				
amarillo				
verde				

no es válido, ya que se está utilizando el mismo color. Igual sucede para las demás combinaciones en la diagonal.

Respuesta: En total hay 12 maneras.

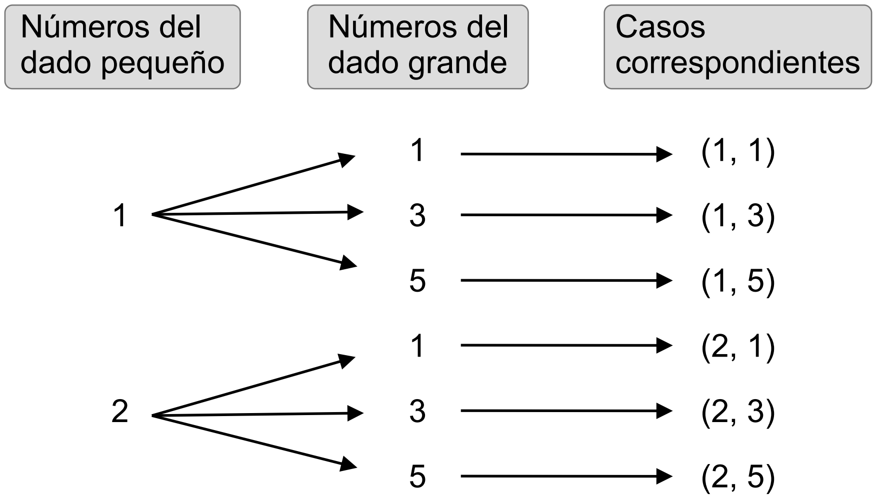
Ejercicio 1.5 Se dispone de los colores: negro, blanco, azul, rojo y amarillo para pintar las dos partes del tiro al blanco con dos colores diferentes. ¿De cuántas maneras se puede pintar?

Resuelve utilizando la tabla como el **Ejemplo 1.5** .



Ejemplo 1.6

En el Ejemplo 1.4 también se pueden mostrar los casos de otra forma diferente a la tabla de las combinaciones.



Esta manera que muestra como ramificaciones se llama "**diagrama de árbol**".
Un diagrama de árbol es una manera para contar las combinaciones en forma ordenada.
Cada una de las ramas muestra una combinación diferente.

Ejercicio 1.6 Exprese en un diagrama de árbol el Ejercicio 1.4.

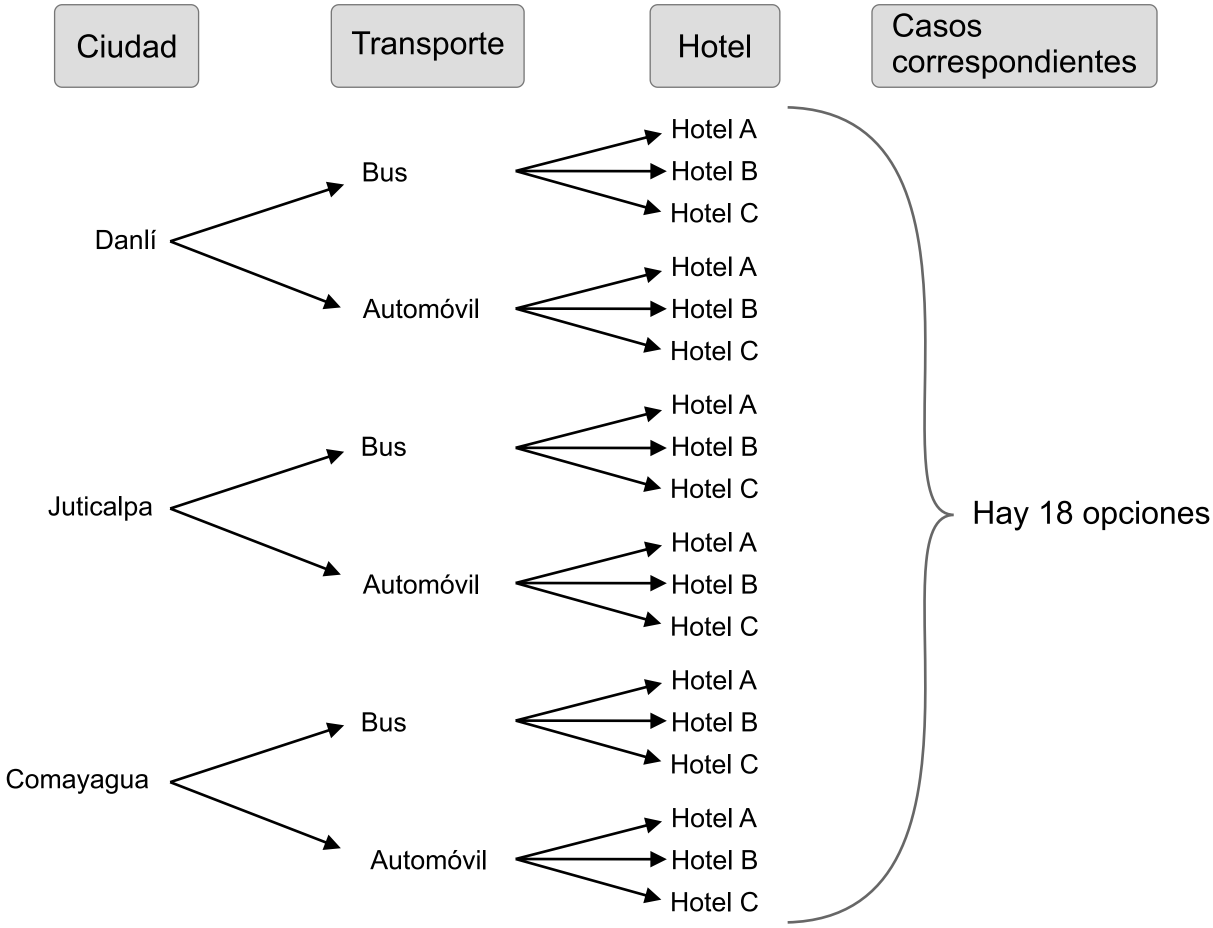
Ejemplo 1.7

En los meses de vacaciones un estudiante puede visitar las ciudades de Danlí, Juticalpa o Comayagua. Puede viajar en vehículo propio o bus interurbano y puede alojarse en 3 hoteles: A, B o C.
¿Cuántas maneras posibles hay para que el estudiante tome sus vacaciones?

Solución:

Se puede escoger primero la ciudad, luego el transporte y por último el hotel.

Vamos a hacer un diagrama de árbol.



Respuesta: Hay 18 maneras.

La ventaja de este diagrama es que se puede continuar con muchas más combinaciones.

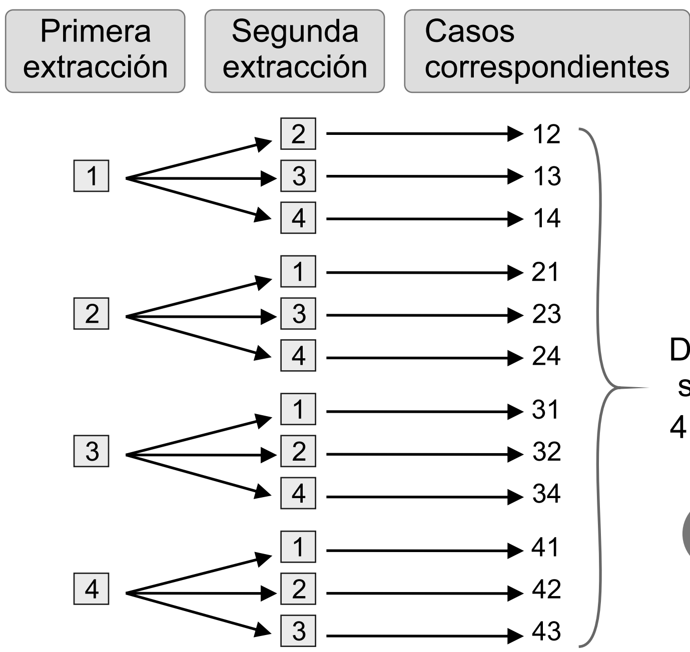
***Ejercicio* 1.7** Un estudiante tiene que seleccionar 1 de 3 materias optativas, 1 actividad extra escolar entre teatro, danza y música y 1 de los siguientes idiomas: inglés o francés.
¿Cuántas maneras distintas tiene para escoger?

Ejemplo 1.8

Se tienen 4 tarjetas numeradas del 1 al 4. De estas 4 tarjetas se hacen 2 extracciones sin reposición y se colocan las tarjetas en el orden de la extracción de izquierda a derecha formando un número de dos cifras. ¿Cuántos números distintos se pueden formar?

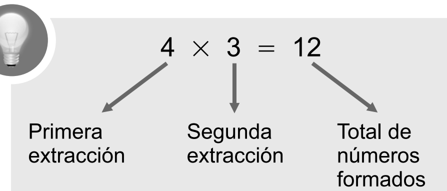
Solución:

Vamos a dibujar el diagrama de árbol.



De este diagrama se sabe que hay $4 \times 3 = 12$ casos

Sin reposición significa que una vez extraída una tarjeta, esta no puede colocarse o reponerse y extraerse de nuevo.



Respuesta: Hay 12 casos.

Principio de producto.

El número total de casos es el producto de los números de casos para cada parte, es decir, $n \times m$.

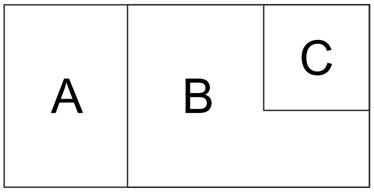
Para determinar la cantidad total de resultados, multiplica la cantidad de posibilidades de la primera característica por la cantidad de posibilidades de la segunda característica y así sucesivamente.

Ejercicio 1.8 Martha tiene en su armario 2 pantalones, uno de color azul y otro verde y 3 camisas, una de color blanco, una roja y una negra. ¿De cuántas maneras se puede combinar?

Ejercicio 1.9 Se va a decorar una carta. Hay 4 tipos de papeles, rojo, azul, amarillo y verde. También hay 2 tipos de cintas, una dorada y una plateada ¿Cuántos casos se pueden combinar?

Ejemplo 1.9

Se dispone de los colores: azul, amarillo, rojo y verde para pintar las tres partes del rectángulo de la derecha con 3 colores diferentes. ¿De cuántas maneras se puede pintar?

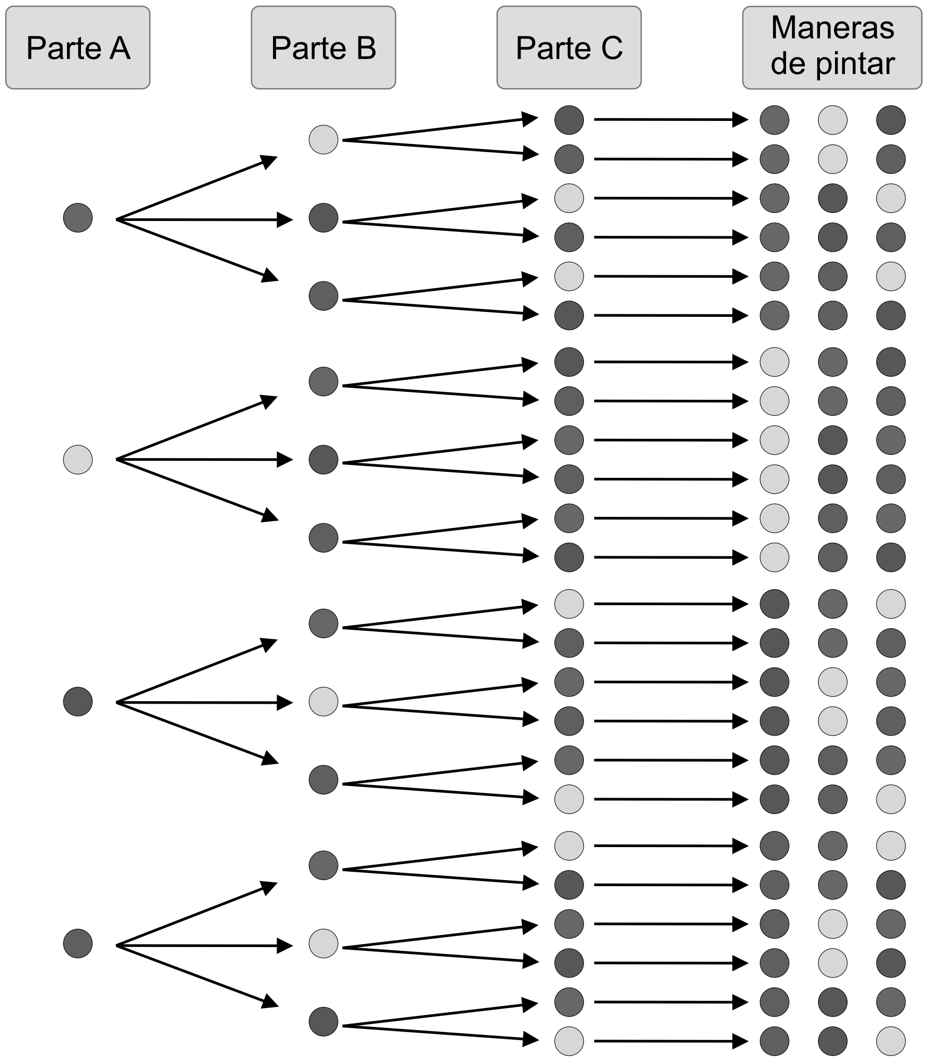


Solución:

Si se seleccionan los colores en el orden A, B y C, para la parte A hay 4 opciones, para la parte B hay 3 opciones y para la parte C hay 2 opciones. Por lo tanto el número total de opciones es $4 \times 3 \times 2 = 24$.

Respuesta: Hay 24 maneras.

Un diagrama de árbol para comprobar.



$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

Ejercicio 1.10 Hay 5 estudiantes y 3 cargos vacantes (director/a, subdirector/a y secretario/a) en una directiva. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden elegir?

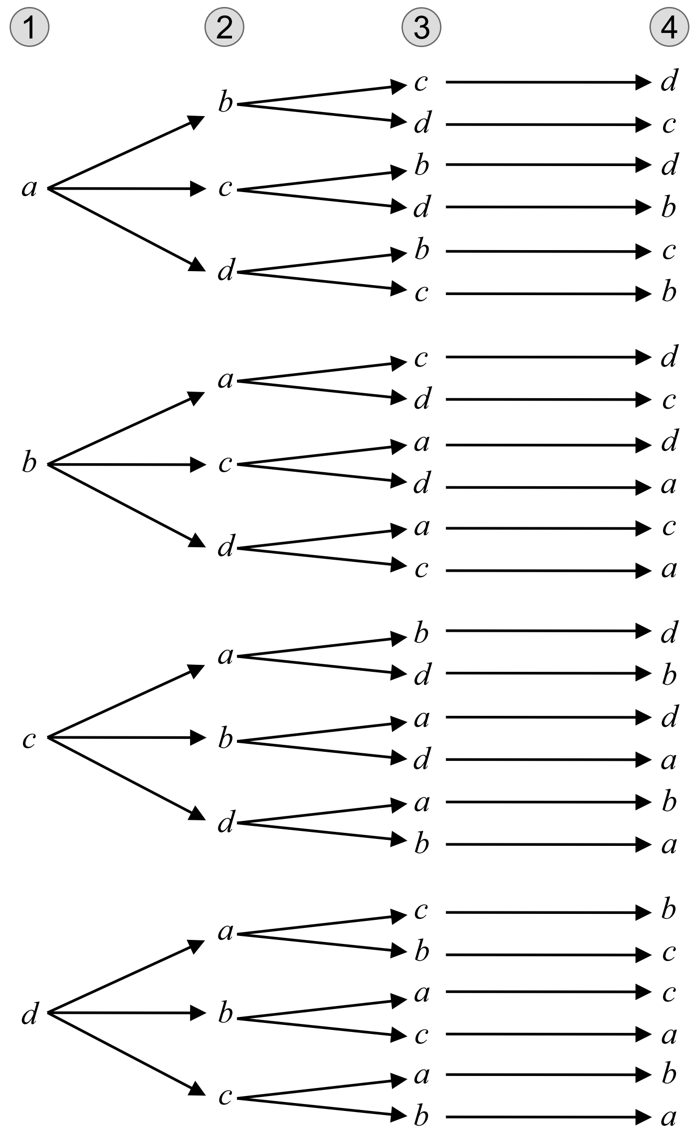
Ejemplo 1.10

Se van a fotografiar 4 estudiantes uno a la par del otro. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar?

Solución:

Hay 4 lugares para ubicarse, y vamos a utilizar a, b, c y d para los 4 estudiantes.

<Un diagrama de árbol>



$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Respuesta: Hay 24 maneras.

***Ejercicio* 1.11** Van a hacer una carrera de relevos. Hay 5 corredores de relevos. Ellos piensan en el orden para correr. ¿Cuántas maneras hay para el orden de relevos?

Ejemplo 1.11

Hay 4 equipos de fútbol. Si cada equipo juega con los otros 3, ¿cuántos partidos pueden jugarse?

Solución:
Si se denominan los 4 equipos con A, B, C y D se hace la siguiente tabla de los partidos.

	A	B	C	D
A		●	●	●
B			●	●
C				●
D				

Respuesta: En total pueden jugarse 6 partidos

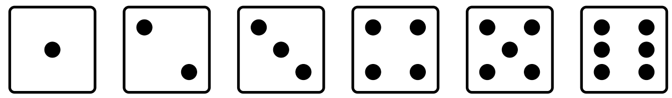
En este caso, equipo A vs equipo B es igual que equipo B vs equipo A.
Cuando se tiene que pensar el orden, AB y BA son distintos aunque en algunos casos no se necesita el orden, como por ejemplo el partido AB es el mismo BA.

Ejercicio 1.12 Hay 5 sabores de helados: chocolate, fresa, vainilla, mango y ron con pasas. Al comprar, puede elegir 2 sabores en una copa. ¿En cuántas combinaciones puede pensar para comprar? Resuelva utilizando una tabla como en el Ejemplo 1.11 .

Ejercicio 1.13 Hay 6 tipos de frutas: piñas, uvas, bananos, mangos, manzanas y sandías. Se van a comprar 2 tipos de frutas para llevar a la casa. ¿En cuántas combinaciones puede pensar para comprar? Resuelva utilizando una tabla como en el Ejemplo 1.11 .

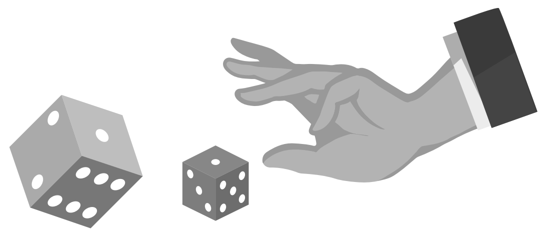
Ejercicios

1 Encuentre el número de casos posibles de obtener los números menores que 3 o mayores que 5 en el lanzamiento de un dado.

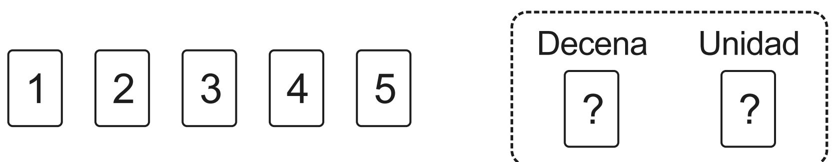


2 ¿Cuántas son las maneras de hacer un viaje a un sitio determinado si para poder realizar el viaje hay 4 empresas de autobuses, 2 empresas de trenes y 3 empresas de aviones?

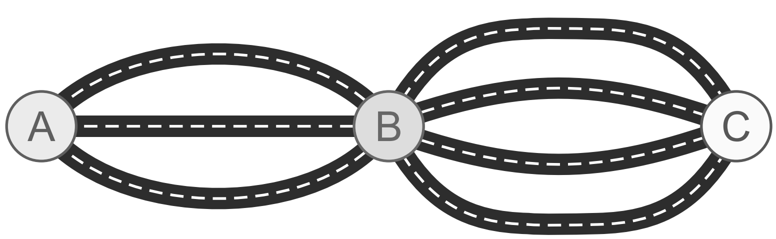
3 En el lanzamiento de dos dados encuentre el número de casos posibles de obtener un total de 7 puntos.



4 Se tienen 5 tarjetas numeradas del 1 al 5, de estas 5 tarjetas se hacen 2 extracciones sin reposición y se colocan las tarjetas en el orden de la extracción de izquierda a derecha formando un número de dos cifras ¿Cuántos números distintos se pueden formar?

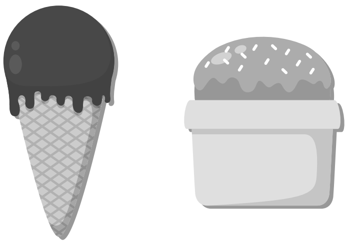


5 De A a B hay 3 caminos. De B a C hay 4 caminos. Para ir de A a C pasando sólo una vez por B ¿Cuántas rutas hay?

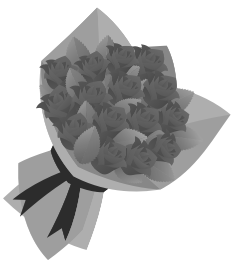


6 Hay 3 estudiantes y 4 sillas diferentes. ¿De cuántas maneras los estudiantes pueden elegir su silla?

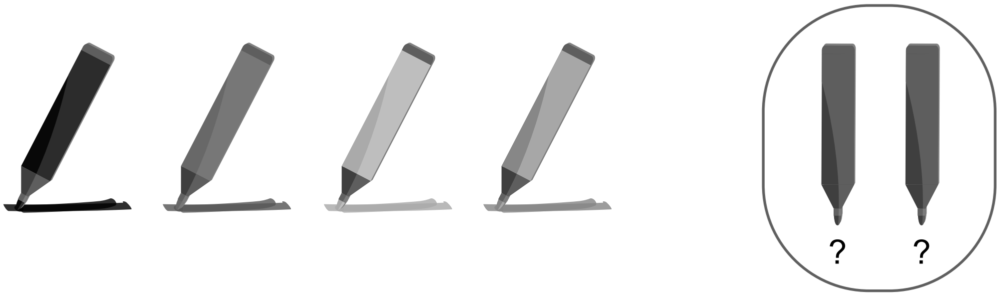
7 Un helado puede venir en un cono o en una copa y los sabores son chocolate, fresa y vainilla. Puede comprar sólo un sabor, ya sea en el cono o en la copa. ¿Cuántos casos hay para comprar?



8 Al comprar un ramo hay que elegir un tipo de flores, un papel y una cinta. Hay 3 tipos de flores, 2 colores de papeles y 2 tipos de cintas. ¿Cuántas maneras hay para comprar un ramo?



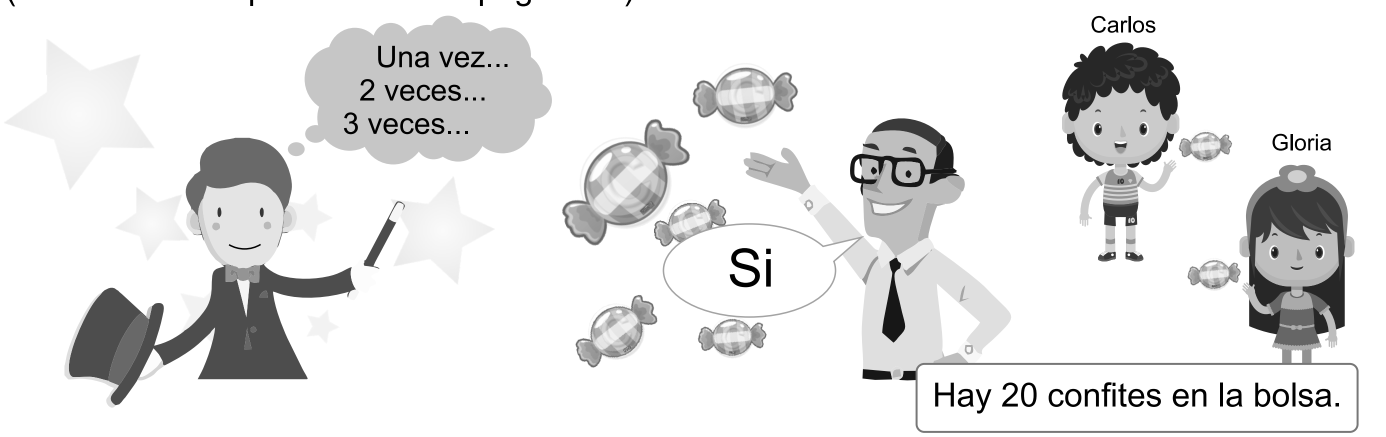
9 Hay 4 marcadores, los colores pueden ser negro, rojo, azul y verde. Si elegimos 2 de esos marcadores, ¿cuántas combinaciones de marcadores se pueden hacer?



10 Hay 5 tipos de deportes; fútbol, voleibol, baloncesto, béisbol y ping-pong. Si se quiere jugar 2 de ellos, ¿cuántas combinaciones de deportes hay?

¿Cuántos confites tienen?

¿Cómo encuentra el mago las cantidades de confites que tiene Gloria y Carlos?
(La solución del problema de la página 38)



Solución:

x: La cantidad de veces que el maestro da 2 confites a Gloria

y: La cantidad de veces que el maestro da 1 confite a Carlos

1. El total de confites es 20.
2. Como el maestro da a Gloria “2 confites” cada vez. Se puede expresar la cantidad final de confites que Gloria tiene como $2x$.
3. Como el maestro da a Carlos “1 confite”cada vez. Se puede expresar la cantidad final de confites que Carlos tiene como y.
4. Entonces, se puede expresar la cantidad total de confites, como $2x + y = 20$.
5. El mago cuenta la cantidad total de veces que el maestro dice “Si”.
6. La cantidad total de veces que el maestro dice “Si” es igual a la suma de x y y. Se puede expresar como $x + y$.
7. Resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables.

$$\begin{cases} 2x + y = 20 \\ x + y = \text{la cantidad total de veces que el maestro dice “Si”} \end{cases}$$

¡OJO!: x y y no representan las cantidades de confites que tienen ellos.

Entonces, cuando el maestro dice “Si” 16 veces, $x + y = 16$.

Vamos a resolver $\begin{cases} 2x + y = 20 \\ x + y = 16 \end{cases}$

Encontramos que $x = 4$ y $y = 12$. Por eso, la cantidad final de confites que Gloria tiene es $2x$, o sea $2 \times 4 = 8$, 8 confites. Y la cantidad final de confites que Carlos tiene es y, o sea 12 confites.

Pruebe otra situaciones, como cuando el maestro dice “Si” 12 veces, 14 veces,...

Unidad 8

Probabilidad

Lección 1: Probabilidad

Unidad 8

Probabilidad

Lección 1: Probabilidad

Se va a lanzar un dado 10 veces. ¿Qué número cree que saldrá más?

(Ejemplo)

Número de tiro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número que se obtuvo	5	6	4	1	2	6	3	5	5	3

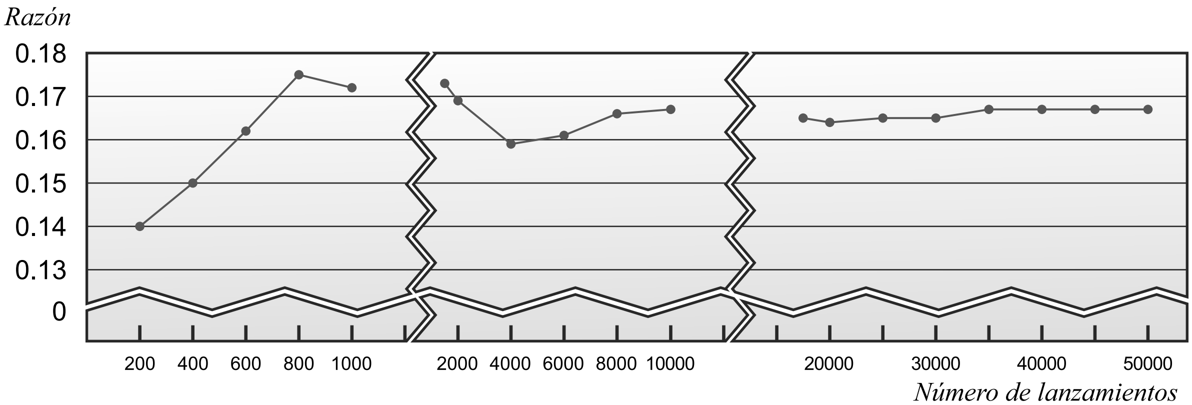
(En su caso)

Número de tiro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número que se obtuvo										

¿Cuál número salió más?
En el caso del Ejemplo, el punto 5 salió más que otros números.
En su caso, el punto ______ salió más que otros números.

¿Cuántas veces salió el punto 2?
En el caso del Ejemplo, el punto 2 salió 1 vez en 10 veces de tiros.
En su caso, el punto 2 salió ______ vez o veces en 10 veces de tiros.

Ahora piense en el número que representa la posibilidad de ocurrir de un evento.
En la situación anterior, al lanzar 10 veces un dado, se encontró que el punto 2 salió 1 vez. Si se sigue este experimento para 200, 400, ..., 50000 tiros, la tabla y la gráfica muestran el valor de la razón $\frac{\textit{La cantidad de veces de sacar el punto 2}}{\textit{Número total de lanzamientos}}$ cuando se lanza repetidamente un dado no cargado.



Número total de tiros	La cantidad de veces de sacar el punto 2	La razón
10	1	0.100
200	28	0.140
400	60	0.150
600	97	0.162
800	140	0.175
1000	172	0.172
1500	259	0.173
2000	338	0.169
4000	636	0.159
6000	966	0.161
8000	1328	0.166
10000	1670	0.167
15000	2475	0.165
20000	3280	0.164
25000	4125	0.165
30000	4950	0.165
35000	5845	0.167
40000	6680	0.167
45000	7515	0.167
50000	8350	0.167

De estas se sabe que cuanto más lanzamientos hay, el valor de la razón de sacar el punto 2 se acerca más a 0.167.

En este caso, 0.167 expresa la posibilidad de ocurrir del evento: lanzar un dado y que salga el punto 2.

Cuando se realiza un ensayo (experimento) cuyo evento (resultado) depende de la casualidad, el número que expresa la posibilidad de ocurrir de un evento se llama **probabilidad** del evento.

Entonces, se puede decir que la probabilidad de sacar el punto 2 al lanzar un dado es 0.167.

Un experimento, en estadística, es cualquier proceso que proporciona datos, numéricos o no numéricos.
Ejemplos:
- Lanzar un dado o una moneda.
- Resolver un examen.
- Comprar un número de la lotería.

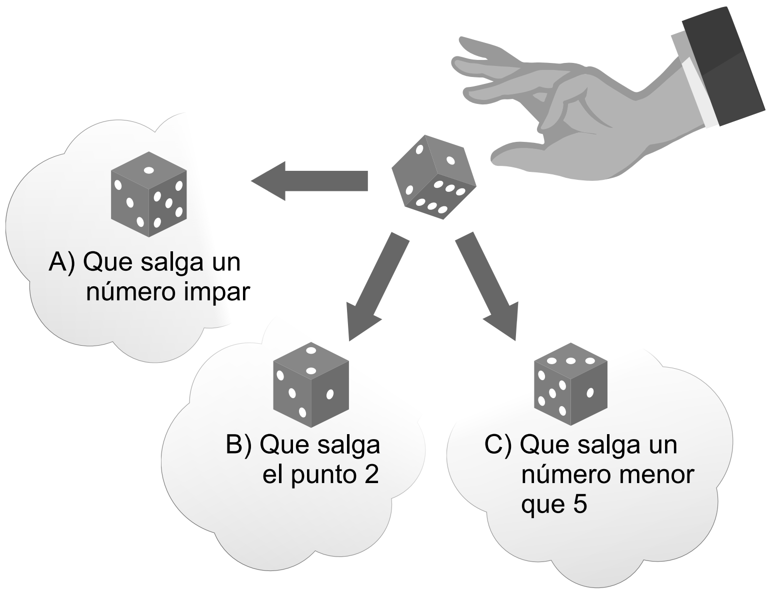
Otro ejemplo:

La tabla muestra el número de nacimientos en un país. El valor de la razón del número de nacimientos de niñas al total es casi igual cada año y su valor es aproximadamente 0.486. De este hecho se sabe que la probabilidad de nacer una niña en este país es aproximadamente 0.486

Año	Número total de nacimientos	Número de nacimientos de niñas	Razón de nacer niñas
1994	1238328	602413	0.486
1995	1187064	578517	0.487
1996	1206555	586762	0.486
1997	1191665	580760	0.487
1998	1203147	585733	0.487
1999	1177662	572900	0.486
2000	1190547	578399	0.486
2001	1170662	569744	0.487
2002	1153855	561015	0.486
2003	1123610	546874	0.487

Cuando la probabilidad de un evento es mayor que la probabilidad de otro evento, aquel es más probable que éste.

¿Cuál evento tiene más posibilidad de ocurrir?
Al lanzar un dado, piense en la probabilidad de ocurrir de cada evento.



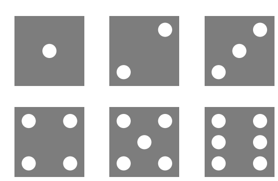
Evento: Es uno de los resultados de un ensayo.
Ejemplos: Al lanzar un dado se tienen 6 posibles casos: obtener 1, 2, 3, 4, 5 o 6.
Al lanzar una moneda se tienen 2 posibles casos: cara o escudo.

El evento A) se refiere a los casos de obtener 1, 3 o 5, mientras que el evento B) se refiere al caso de obtener 2.

Deténgase en el evento B).
Al lanzar un dado, encuentre la probabilidad que salga el punto 2.
Para la respuesta, la probabilidad de que salga el punto 2 es $\frac{1}{6}$.

De acuerdo a un ensayo se puede decir sobre esta probabilidad lo siguiente:

Paso 1 Hay 6 posibles casos totales: 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
Paso 2 Todos los casos son igualmente probables.
Paso 3 El número de casos que corresponde al evento de que salga el punto 2 es 1.



En este caso se puede decir $\dfrac{\textit{Número de paso } ③}{\textit{Número de paso } ①} = \dfrac{1}{6}$, y este resultado es casi igual con la probabilidad que se obtuvo del resultado del ensayo de la página 165.

$\frac{1}{6} = 0.1666...$

$\frac{1}{6} \approx 0.167$

La probabilidad que salga el punto 2 en el lanzamiento de un dado es $\frac{1}{6}$.

Si en un ensayo hay "n" posibles casos totales donde cada uno de estos casos tiene la misma posibilidad de ocurrir y entre estos "n" casos hay "a" casos donde ocurre el evento A, entonces la probabilidad que ocurra el evento A es:

$$\frac{a \text{ ... Número de casos en los que ocurre el evento A}}{n \text{ ... Total de posibles casos}}$$

Ejemplo: La probabilidad de salir el punto 2 al lanzar un dado es:

$$\frac{1 \text{ ... Hay una cara del punto 2}}{6 \text{ ... Hay 6 caras (1, 2, 3, 4, 5 y 6)}}$$

Generalmente para expresar la probabilidad se usan las fracciones.

Ejemplo 1.1

Encuentre la probabilidad de salir el punto 4 al lanzar un dado.

Solución:

Paso 1 Hay 6 posibles casos totales: 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
Paso 2 Todos los casos son igualmente probables.
Paso 3 Hay un caso de salir el punto 4.

Luego, sustituimos en $\frac{a}{n}$, $n = 6$ (viene del paso 1) y $a = 1$ (viene del paso 3), entonces, la probabilidad de salir el punto 4 al lanzar un dado es $\frac{1}{6}$.

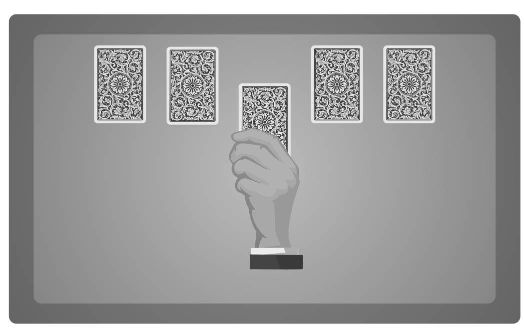
Respuesta: La probabilidad de salir el punto 4 al lanzar un dado es $\frac{1}{6}$.

En el caso del dado se puede esperar que salga cada punto (de 1 a 6) con igual posibilidad. Como hay 6 puntos se puede decir que la probabilidad de salir cada uno de estos 6 puntos es $\frac{1}{6}$.

Ejercicio 1.1 Hay 5 tarjetas numeradas del 1 al 5: 1, 2, 3, 4, 5.
Si se saca una tarjeta, encuentre:

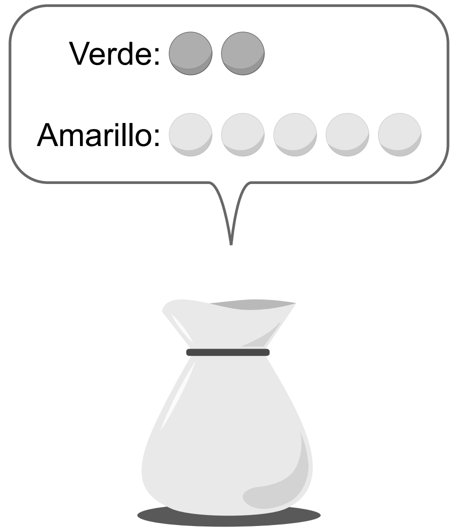
a) La probabilidad de sacar la tarjeta 2.

b) La probabilidad de sacar la tarjeta 5.



Ejemplo 1.2

Hay una bolsa que contiene 2 pelotas verdes y 5 pelotas amarillas. Encuentre la probabilidad de sacar una pelota verde cuando saque una pelota de la bolsa.



Solución:

Piense en los 3 pasos.

Paso ① Hay 7 posibles casos totales.
(Porque hay 7 pelotas en total)

Paso ② Todos los casos son igualmente probables.

Paso ③ Hay 2 casos de sacar una pelota verde.
(Porque hay 2 pelotas verdes)

Luego, sustituimos en $\frac{a}{n}$, $n = 7$ y $a = 2$, entonces:
la probabilidad de sacar una pelota verde es $\frac{2}{7}$.

Respuesta: La probabilidad de sacar una pelota verde es $\frac{2}{7}$.

$\frac{2}{\boxed{7}}$ ← El número de casos de sacar una pelota verde

↑ Total de pelotas

Ejercicio 1.2 Siguiendo el **Ejemplo 1.2**, encuentre la probabilidad de sacar una pelota amarilla.

Ejercicio 1.3 Encuentre las probabilidades de los eventos A) y C) de la página 167.

a) La probabilidad que salga un número impar (evento A).

b) La probabilidad que salga un número menor que 5 (evento C).

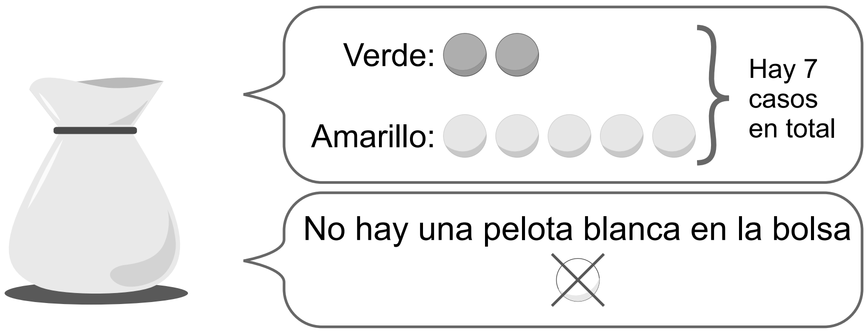
Al lanzar un dado, el total de casos posibles siempre es 6.

Ejemplo 1.3

Siguiendo el Ejemplo 1.2, encuentre las siguientes probabilidades.

a) La probabilidad de sacar una pelota que tiene color.

b) La probabilidad de sacar una pelota blanca.



Solución:

a) Al sacar una pelota, todas las 7 pelotas tienen colores como verde y amarillo.

Entonces, la probabilidad de sacar una pelota que tiene color es $\frac{7}{7} = 1$.

Respuesta: La probabilidad de sacar una pelota con color es 1.

b) En la bolsa, no hay ninguna pelota blanca.

Entonces, la probabilidad de sacar una pelota blanca es $\frac{0}{7} = 0$.

Respuesta: La probabilidad de sacar una pelota blanca es 0.

Cuando se está seguro que un evento ocurrirá, la probabilidad de ese evento es 1.
Cuando se está seguro que un evento nunca ocurrirá, la probabilidad de ese evento es 0.
Entonces, podemos decir, $0 \leq$ probabilidad ≤ 1.

Ejercicio 1.4 Encuentre la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos cuando se lanza una vez un dado.

a) La probabilidad de salir el punto 7.

b) La probabilidad de salir uno de los puntos 1, 2, 3, 4, 5 ó 6.

Ejemplo 1.4

Encuentre la probabilidad de que al lanzar al aire dos monedas al mismo tiempo salgan 2 caras.

Cara

Escudo

Solución:

Cuando se lanza una moneda, los casos posibles son cara o escudo.
Cuando se lanzan dos monedas: A y B, hay 4 casos posibles. Los resultados se pueden ver en la siguiente tabla.

A \ B	Cara	Escudo
Cara	(Cara, Cara)	(Cara, Escudo)
Escudo	(Escudo, Cara)	(Escudo, Escudo)

Sólo hay 1 caso en el que pueden salir 2 caras.
Entonces, la probabilidad que salgan las 2 caras es $\frac{1}{4}$.

$\frac{1}{\boxed{4}}$ ← El número de casos de sacar 2 caras (1)

↑ Total de casos posibles (4)

Respuesta: La probabilidad que salgan las 2 caras es $\frac{1}{4}$.

También se puede usar el diagrama de árbol como una manera para encontrar el número de casos posibles.

Moneda A	Moneda B	Posibles casos
Cara	→ Cara	→ (Cara, Cara)
	→ Escudo	→ (Cara, Escudo)
Escudo	→ Cara	→ (Escudo, Cara)
	→ Escudo	→ (Escudo, Escudo)
2	× 2	= 4

Hay 4 posibles casos en total

Como la posibilidad de estos 4 casos es igual y hay un caso donde salen 2 caras, entonces la probabilidad que salgan las 2 caras es $\frac{1}{4}$.

Ejercicio 1.5

En la situación anterior:

a) ¿Cuál es la probabilidad que salgan una cara y un escudo?

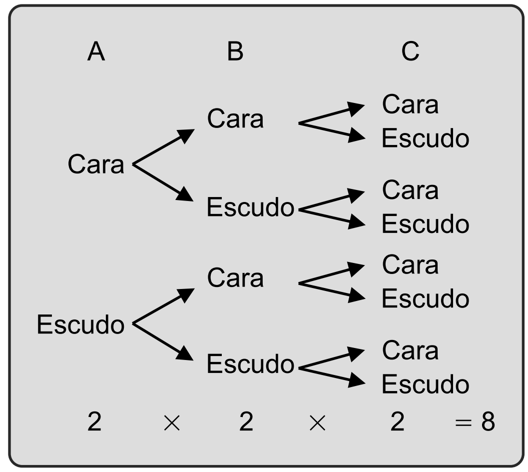
b) ¿Cuál es la probabilidad que salgan los 2 escudos?

Ejemplo 1.5

Se lanzan 3 monedas al mismo tiempo. Encuentre la probabilidad de que salga al menos 1 cara.

Solución:

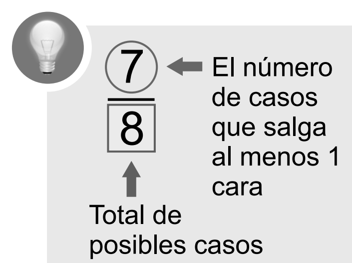
Cuando se lanzan 3 monedas: A, B y C, hay 8 posibles casos en total, tal como se muestra en el diagrama de árbol. La posibilidad de estos 8 casos es igual.



"Al menos 1 cara" significa tener:
3 caras,
2 caras y un escudo ó
1 cara y 2 escudos.

Hay 1 caso de que salgan 3 caras como (cara, cara, cara).
Hay 3 casos de que salgan 2 caras y 1 escudo como (cara, cara, escudo), (cara, escudo, cara), (escudo, cara, cara).
Hay 3 casos de que salgan 1 cara y 2 escudos como (cara, escudo, escudo), (escudo, cara, escudo), (escudo, escudo, cara).

Entonces, hay 7 casos en los que sale al menos 1 cara.
Por eso, la probabilidad de que salga al menos 1 cara es $\frac{7}{8}$.



Respuesta: La probabilidad de que salga al menos una cara es $\frac{7}{8}$.

Ejercicio 1.6

Siguiendo el Ejemplo 1.5, encuentre las siguientes probabilidades.

a) La probabilidad de que salgan 3 caras.

b) La probabilidad de que salgan al menos 2 caras.

Ejemplo 1.6

Al lanzar 2 dados, uno A y otro B, encuentre las siguientes probabilidades.

a) La probabilidad de que salga el mismo número en ambos dados.

b) La probabilidad de que no salga el mismo número en ambos dados.

Solución:

En la tabla de casos se muestra que al lanzar 2 dados A y B, el total de casos posibles es $6 \times 6 = 36$.

A \ B	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
⚁	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
⚂	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
⚃	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
⚄	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
⚅	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

a) Hay 6 casos donde sale el mismo número en ambos dados, (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5) y (6, 6). El total de posibles casos es 36. Entonces, la probabilidad buscada es $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Respuesta: La probabilidad que salga el mismo número al lanzar 2 dados es $\frac{1}{6}$.

b) "No salga el mismo número" significa "salgan 2 números diferentes". En la tabla de casos se muestra que hay 30 casos donde al lanzar los dados los 2 números son diferentes. El total de posibles casos es 36. Entonces, la probabilidad buscada es $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.

Respuesta: La probabilidad de que no salga el mismo número al lanzar 2 dados es $\frac{5}{6}$.

Observe que:

$$\left(\begin{array}{l}\text{La probabilidad}\\ \text{de que no salga}\\ \text{el mismo número}\\ \text{en 2 dados}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\text{Total de la}\\ \text{probabilidad de}\\ \text{todos los}\\ \text{casos posibles}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{l}\text{La probabilidad}\\ \text{de que salga el}\\ \text{mismo número}\\ \text{en ambos dados}\end{array}\right)$$

$$\frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6}$$

La probabilidad de **NO** ocurrir un evento es igual a:
1 − (la probabilidad de ocurrir ese evento)

Ejercicio 1.7 Encuentre las siguiente probabilidades.

a) La probabilidad de salir el punto 1 al lanzar un dado es $\frac{1}{6}$. ¿Cuál es la probabilidad de que no salga el punto 1?

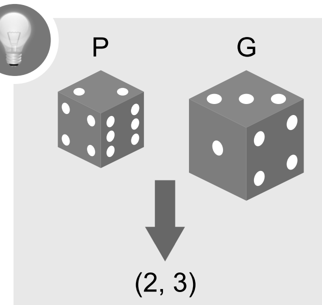
b) La probabilidad que la suma de los puntos sea mayor que 6 al lanzar 2 dados es $\frac{7}{12}$. ¿Cuál es la probabilidad que la suma de los puntos sea menor que 7? (Es decir, no sea mayor que 6)

Ejemplo 1.7

Al lanzar 2 dados, uno pequeño y uno grande, encuentre la probabilidad de que la suma de los dos puntos sea 5 y la probabilidad de que la suma no sea 5.

Solución:

P \ G	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
⚁	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
⚂	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
⚃	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
⚄	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
⚅	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)



$$\frac{4}{\boxed{36}}$$

El número de casos donde la suma es 5

Total de posibles casos

En 4 casos: (4, 1), (3, 2), (2, 3) y (1 ,4), la suma de los dos puntos al lanzar los dados es 5. Entonces la probabilidad buscada es $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Luego la probabilidad que la suma no sea 5 es $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

Respuesta: La probabilidad que la suma sea 5 es $\frac{1}{9}$.
La probabilidad que la suma no sea 5 es $\frac{8}{9}$.

Ejercicio 1.8

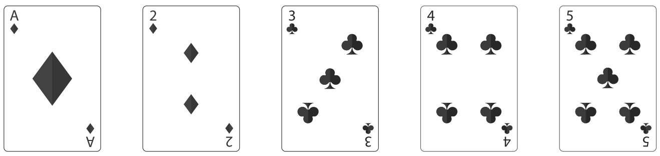
Al lanzar 2 dados, encuentre las siguientes probabilidades.

a) La probabilidad que la suma de los dos puntos sea 10.

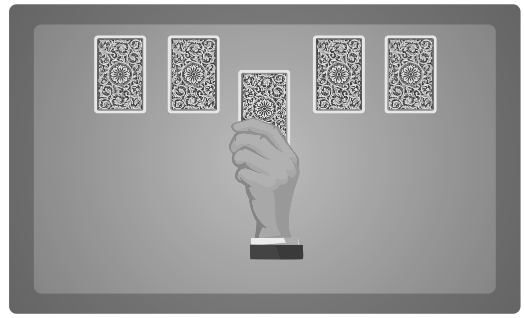
b) La probabilidad que la suma de los dos puntos no sea 10.

Ejemplo 1.8

Hay 5 tarjetas en una baraja. ¿Cuál es la probabilidad que salga el mismo símbolo (diamante o trébol) al sacar 2 tarjetas al mismo tiempo?



♦1 ♦2 ♣3 ♣4 ♣5



Solución:

Se utilizará una tabla para ver el número de casos posibles y determinar cuál es la probabilidad.

	♦1	♦2	♣3	♣4	♣5
♦1		(♦1, ♦2)	(♦1, ♣3)	(♦1, ♣4)	(♦1, ♣5)
♦2			(♦2, ♣3)	(♦2, ♣4)	(♦2, ♣5)
♣3				(♣3, ♣4)	(♣3, ♣5)
♣4					(♣4, ♣5)
♣5					

(♦2, ♦1) y (♦1, ♦2) son los mismos casos

Hay 10 casos posibles en total al sacar 2 tarjetas al mismo tiempo.
Hay 4 casos en los que puede salir el mismo símbolo, estos son: (♦1,♦2), (♣3,♣4), (♣3,♣5), (♣4,♣5).
Entonces, la probabilidad de que salga el mismo símbolo es $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

$\frac{4}{\boxed{10}}$ ← El número de casos que salga el mismo símbolo

↑ Total de casos posibles

Respuesta: La probabilidad de que salga el mismo símbolo es $\frac{2}{5}$.

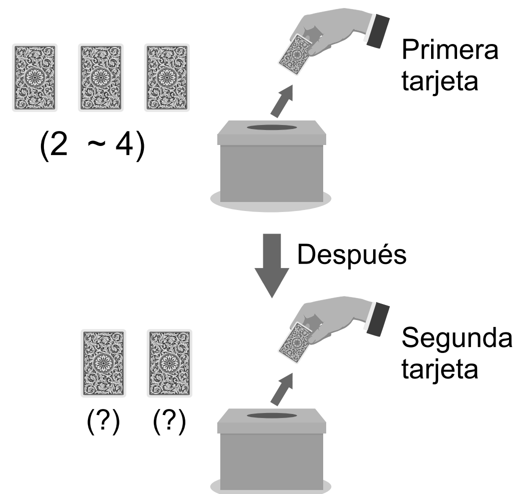
Ejercicio 1.9 Hay 4 tarjetas en una baraja, como ♦1, ♦2, ♣3, ♣4.
¿Cuál es la probabilidad de que salgan símbolos diferentes al sacar 2 tarjetas al mismo tiempo? Resuelva utilizando una tabla de casos.

Ejemplo 1.9

Hay 3 tarjetas numeradas de la siguiente manera: 2, 3 y 4 en una caja. Se extraen dos tarjetas, una primero y otra después como se muestra en el dibujo de la derecha.

Luego, con esas tarjetas se va a formar un número entero de 2 cifras.
La primera tarjeta es para el número de las decenas y la segunda tarjeta es para el número de las unidades.

¿Cuál es la probabilidad de que el número entero formado sea múltiplo de 3?



Solución:
Se encontrará el total de casos posibles utilizando un diagrama de árbol.

Primera tarjeta (decena)	Segunda tarjeta (unidad)	Números formados
2	3	23
	4	24
3	2	32
	4	34
4	2	42
	3	43
3	$\times$ 2	$=$ 6

Hay 6 casos posibles

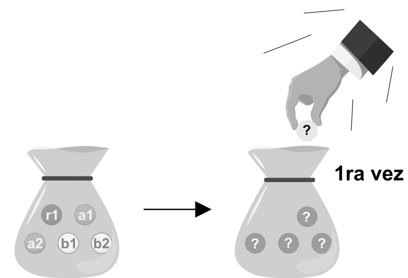
Hay 2 casos en los que se forman números múltiplo de 3, estos son: 24 y 42.
Entonces la probabilidad buscada es $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Respuesta: La probabilidad de que al extraer dos tarjetas el número formado sea múltiplo de 3 es $\frac{1}{3}$.

Ejercicio 1.10 Hay 3 tarjetas numeradas como 6, 7 y 8 en una caja. Se extraen dos tarjetas de la caja como en el **Ejemplo 1.9**. Luego, con estas tarjetas se va a formar un número entero de 2 cifras. La primera tarjeta es para el número de las decenas y la segunda tarjeta para el número de las unidades. ¿Cuál es la probabilidad que el número entero formado sea múltiplo de 2?

Ejemplo 1.10

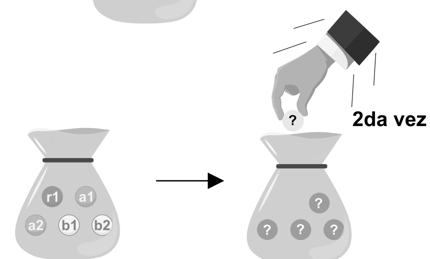
Hay una bolsa que contiene 1 pelota roja (r1), 2 pelotas azules (a1 y a2) y 2 pelotas blancas (b1 y b2). Se saca una pelota y se anota su color y número. Después, se regresa la pelota a la bolsa. Luego, saca una pelota por segunda vez y de nuevo se anota su color y número.



a) Encuentre la probabilidad de los siguientes eventos:

A) Que salga el mismo color.

B) Que salgan colores diferentes.



Solución:

Se utilizará una tabla de casos para encontrar el total de posibles casos.

2da vez / 1era vez	r1	a1	a2	b1	b2
r1	(r1, r1)	(r1, a1)	(r1, a2)	(r1, b1)	(r1, b2)
a1	(a1, r1)	(a1, a1)	(a1, a2)	(a1, b1)	(a1, b2)
a2	(a2, r1)	(a2, a1)	(a2, a2)	(a2, b1)	(a2, b2)
b1	(b1, r1)	(b1, a1)	(b1, a2)	(b1, b1)	(b1, b2)
b2	(b2, r1)	(b2, a1)	(b2, a2)	(b2, b1)	(b2, b2)

La tabla muestra que hay $5 \times 5 = 25$ posibles casos en total.

A) Hay 9 casos en los que pueden salir el mismo color. Entonces la probabilidad que salga el mismo color es $\frac{9}{25}$.

Respuesta: La probabilidad que salga el mismo color es $\frac{9}{25}$.

B) Se utilizará la respuesta de la probabilidad de que salga el mismo color, para encontrar la probabilidad de que salgan los colores diferentes. De esta forma, $1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$.

Respuesta: La probabilidad que salgan los colores diferentes es $\frac{16}{25}$.

b) ¿Cuál es más posible de ocurrir: el evento A) o el evento B)?,
La probabilidad del evento A) es $\frac{9}{25}$ y la probabilidad del evento B) es $\frac{16}{25}$.

Cuando la probabilidad de ocurrir de un evento es mayor que la probabilidad de otro evento, aquel es más probable que éste.
Como $\frac{16}{25}$ es mayor que $\frac{9}{25}$, el evento B) es más probable que ocurra.

Respuesta: El evento B) referido a que salgan los colores diferentes, es más posible de ocurrir.

***Ejercicio* 1.11** Hay una bolsa que contiene 2 pelotas blancas (b1 y b2) y 3 pelotas amarillas (a1, a2 y a3). Se saca una pelota y se anota su color y número. Después se regresa la pelota a la bolsa. Luego se saca una pelota otra vez.
Encuentre las siguientes probabilidades de A) y B), luego conteste ¿Cuál es más posible de ocurrir el evento A) o el evento B)?

A) Que salga el mismo color.

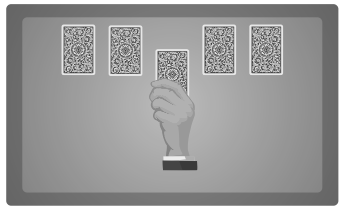
B) Que salgan los colores diferentes.

Ejercicios

1 Encuentre la probabilidad de que salga el punto 5 al lanzar un dado.

2 Al lanzar un dado, ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número par?

3 Hay 5 tarjetas numeradas del 1 al 5: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$.
Si se saca una tarjeta, encuentre:

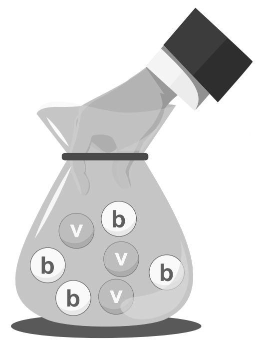


a) La probabilidad de sacar la tarjeta $\boxed{4}$.

b) La probabilidad de sacar una tarjeta que tenga un número impar.

4 ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 2 dados la suma de sus puntos sea 8?

5 Hay una bolsa que contiene 4 pelotas blancas y 3 pelotas verdes.
Si se saca una pelota, encuentre:



a) La probabilidad de sacar una pelota blanca.

b) La probabilidad de sacar una pelota verde.

c) La probabilidad de sacar una pelota blanca o una pelota verde.

d) La probabilidad de sacar una pelota amarilla.

6 Si se lanza una moneda 2 veces, encuentre:

a) La probabilidad de que salga al menos 1 cara.

b) La probabilidad de que no salga cara.

7 Hay 13 tarjetas numeradas del 1 al 13. Si se saca una tarjeta, encuentre:

a) La probabilidad de que salga una tarjeta que tiene número par.

b) La probabilidad de que salga una tarjeta que tiene número impar.

8 Si se lanza una moneda tres veces. Resuelva utilizando un diagrama de árbol.

a) ¿Cuál es la probabilidad que salga escudo en el tercer lanzamiento?

b) ¿Cuál es la probabilidad que salga cara en el primer y tercer lanzamiento?

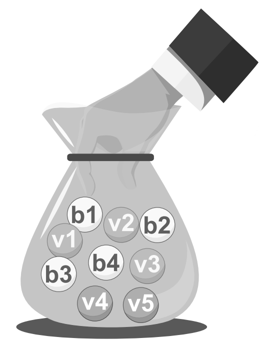
c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 2 escudos en los primeros dos lanzamientos?

9 Una bolsa tiene 4 bolas blancas numeradas del 1 al 4 y 5 bolas verdes numeradas del 1 al 5. Al sacar una bola encuentre:

a) La probabilidad de sacar una bola blanca.

b) La probabilidad de sacar una bola numerada con 1, 2 o 5.

c) La probabilidad de sacar una bola blanca con el número 1 o verde con los números 3, 4 o 5.



10 Se tienen 5 tarjetas numeradas del 1 al 5 y se extraen 2 para formar un número de dos cifras (como en el Ejemplo 1.9). Si la primera tarjeta forma las decenas y la segunda las unidades, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número que sea par?

11 Se van a ordenar las letras A, B, C y D. ¿Cuál es la probabilidad de que A y D queden en el centro?

12 Hay 5 equipos de fútbol: A, B, C, D y E. Si se eligen por sorteo 2 equipos para jugar un partido, encuentre:

a) La probabilidad de que salga equipo A y equipo E.

b) La probabilidad de que no salga equipo B.