República de Honduras
Secretaría de Educación

9

Guía del Docente
Noveno grado

III Ciclo
Educación Básica

Matemáticas

Nota: Cualquier observación encontrada en esta obra, por favor escribir a la Dirección General de Innovación Tecnológica y Educativa de la Secretaría de Educación, para ser rectificado y mejorado en las próximas ediciones, nuestro correo electrónico es: **tecnología.educativa@se.go.hn**

Presentación

La Secretaría de Educación presenta la “**Guía del Docente” de Noveno Grado del área de Matemáticas para el Tercer Ciclo de Educación Básica**, que tiene su fundamento en el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica (DCNEB), misma que fue revisada y ajustada por un equipo técnico en el marco del Proyecto Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemáticas (PROMETAM FASE III).

El propósito de esta Guía es apoyar al docente en la intervención activa de mediación entre el contenido del Libro del Estudiante y las formas de aprendizaje de los educandos. Además, brindar apoyo metodológico para favorecer los aprendizajes significativos y se eleve el rendimiento académico.

En la búsqueda del camino hacia una nueva Honduras, el recurso humano es el único capaz de generar riquezas a través de la aplicación de sus conocimientos, competencias y acciones; por lo que se espera que los docentes se comprometan a realizar una labor educativa con calidad y pertinencia.

Esta Secretaría de Estado, sigue comprometida para que los niños y jóvenes tengan acceso a un nivel de educación que contribuya a mejorar las condiciones de vida de la población hondureña.

Secretario de Estado en el Despacho de Educación

Instructivo de uso “Guía del Docente”

Esta Guía está diseñada para orientar a los docentes cómo enseñar en cada grado los contenidos prescritos en el Diseño Curricular Nacional para la Educación Básica (DCNEB).

Para cada grado se presenta una propuesta de enseñanza de los contenidos y se espera que el docente la ajuste según el rendimiento y el entorno de sus educandos.

El docente debe leer con anticipación y detenidamente el desarrollo propuesto de cada clase para que esté preparado al momento de impartir las mismas.

Para mayor información véase la “Estructura y Aplicación de la Guía del Docente”

Índice

Estructura y aplicación de la Guía del Docente

Desarrollo de Clases

Estructura y aplicación de la Guía del Docente

1. Objetivo de la Guía del Docente

Este libro es una guía que explica el plan anual de estudio y el desarrollo de las clases basado en el contenido del Diseño Curricular Nacional para la Educación Básica (DCNEB). Si el Docente aprovecha esta guía, le ayudará a desarrollar su clase efectiva y eficientemente para que el rendimiento de los estudiantes mejore.

2. Estructura de la Guía del Docente

Estructura global: Está formada por dos partes: "Estructura y aplicación de la Guía del Docente" que explica el contenido de la Guía del docente y la forma cómo se utiliza y "Desarrollo de clases de cada unidad" que describe los pasos a seguir para alcanzar los objetivos de cada clase.

Estructura de la unidad: En cada unidad se desarrolla paso a paso los contenidos conceptuales y actitudinales tomados del DCNEB. La estructura de cada unidad se explica detalladamente en el instructivo.

3. Instructivo para el uso de la Guía del Docente y del Libro del Estudiante

Esta Guía del Docente (GD) fue diseñada para enseñar los contenidos indicados en el DCNEB, utilizando eficazmente el libro del Estudiante (LE), y para explicar los principios de cada tema y la manera de desarrollar cada clase.

Aunque se indica la manera de usar el LE, no necesariamente se describe una forma única de desarrollar la clase, sin embargo se ha intentado que los docentes puedan dar la clase sin dedicar mucho tiempo a los preparativos. El docente podrá hacer las modificaciones adecuadas cuando lo crea necesario.

En la GD se presenta la "Programación anual" y "Desarrollo de clases de cada unidad".

Programación Anual

Es la lista de los contenidos del grado indicados en el DCNEB, con el número de clases asignadas a cada tema. Con la misma, los docentes deben conocer qué tienen que enseñar, y hacer su plan anual de modo que se cubran todos los temas.

También se presenta la distribución de horas en función de los bloques de área que se describen en el DCNEB. Estos son:

1. Números y Operaciones
2. Álgebra
3. Geometría
4. Estadística descriptiva y probabilidad discreta

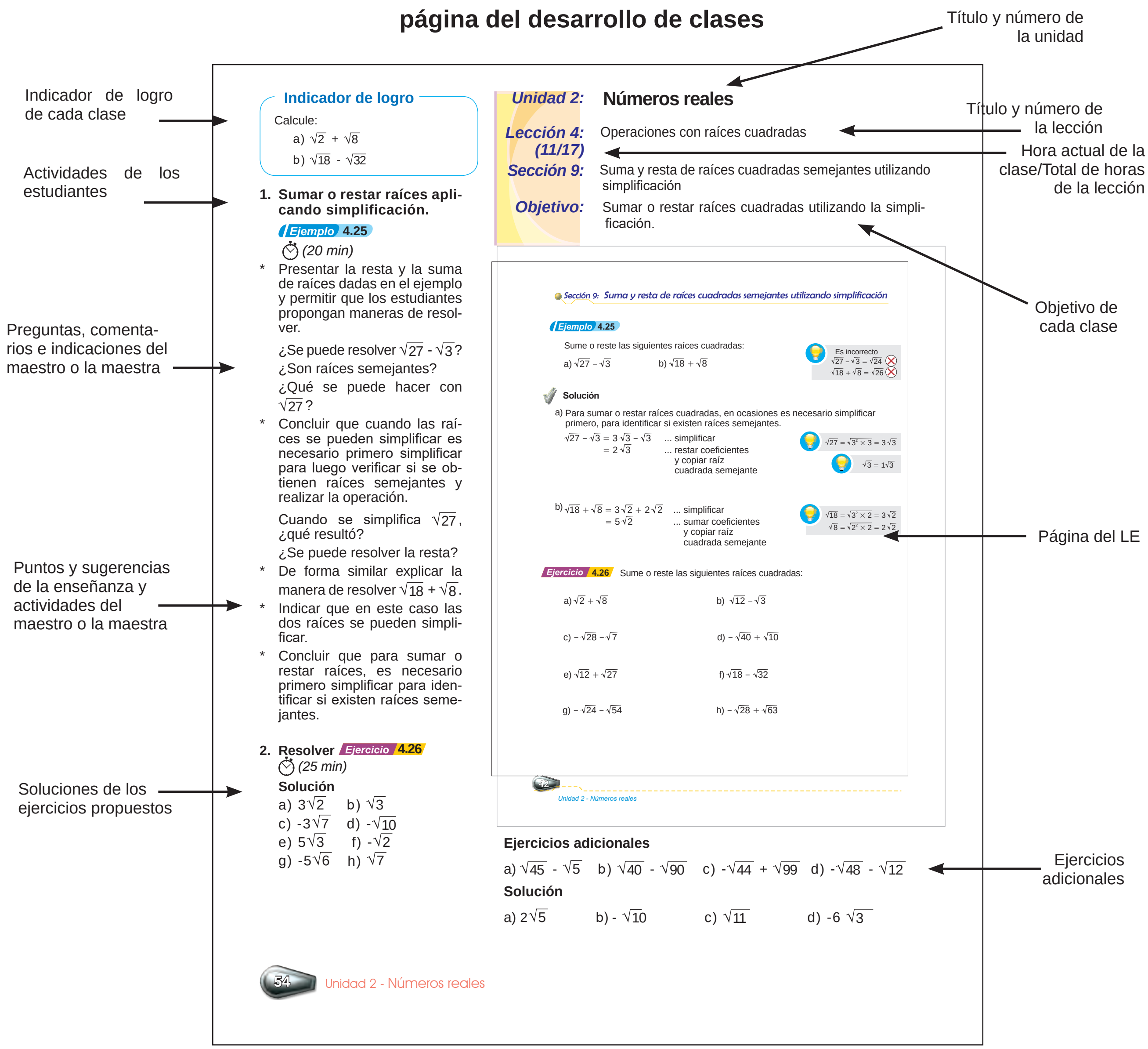
Si los estudiantes no manejan bien los contenidos de cada grado, tendrán problemas con el aprendizaje en los grados posteriores. Por ejemplo: los estudiantes necesitan tener dominio de la operatoria con números reales para operar con expresiones algebraicas racionales.

Desarrollo de clases de cada unidad

Está divida en cinco secciones:

1. Expectativas de logro: Presenta las expectativas de logro de la unidad.
2. Relación y desarrollo: Muestra el flujo de los contenidos del grado relacionándolos con los del grado anterior y el siguiente.
3. Plan de Estudio: Presenta la distribución de las clases en cada lección.
4. Puntos de lección: Presenta aspectos importantes a considerar en el desarrollo de cada lección.
5. Desarrollo de clase: Presenta el objetivo, el indicador de logro y el desarrollo de cada clase.

Significado de cada expresión y simbología en la página del desarrollo de clases



1 Expectativas de logro

Se presentan para cada unidad, tal y como están descritas en el DCNEB.

2 Relación y desarrollo

Se muestran los contenidos de la unidad y su relación con otras unidades (ya sean de este grado, o anteriores o posteriores). Los docentes deben diagnosticar si los estudiantes tienen dominio sobre los contenidos relacionados de los grados anteriores, de lo contrario dependiendo del nivel de insuficiencia en el manejo, se puede hacer lo siguiente:

(a) Si la mayoría de los estudiantes carecen de comprensión, de tal modo que no se puede enseñar el contenido del grado, se les da un repaso de dos o tres horas clase.

Para el mejor manejo del contenido, se sugiere darles tareas al mismo tiempo que la enseñanza del contenido del grado.

(b) Si la mayoría entiende bien se le puede dar orientación individual a los que la necesiten.

3 Plan de estudio

Se indica la distribución de las horas y el contenido. Como el tiempo total de la clase de matemáticas es limitado, se recomienda seguir los lineamientos indicados en la guía y desarrollar todo el contenido.

4 Puntos de lección

En la primera parte se informan los resultados obtenidos por PROMETAM Fase III al aplicar pruebas de línea base en el año 2016 y al finalizar la validación del LE en el 2017. Las pruebas se aplicaron en algunos Institutos de Educación Media y Centros de Educación Básica, con el objetivo de detectar aciertos e identificar oportunidades de avance, como una información valiosa que contribuya a la mejora de la calidad educativa del país

Luego, cada unidad está dividida en lecciones. En esta parte se explican los puntos en los que se debe prestar atención durante el desarrollo de la clase. Los docentes deben entender la idea central por la cual se desarrolla el plan de clase.

5 Desarrollo de clases

Está descrito el plan de cada clase para 45 minutos e incluye los objetivos, el indicador de logro y el proceso de enseñanza. No es recomendable prolongar la hora de clase, salvo en el caso donde los estudiantes hacen una tarea especial o el horario así lo exige.

«Objetivo»

Representa el objetivo de la clase. Es necesario tener un objetivo claro para cada clase.

<<Indicador de logro>>

Se proporciona el indicador de logro con respecto al objetivo de cada clase que le permitirá al docente verificar el logro de dicho objetivo.

El indicador es el conocimiento mínimo que un estudiante debe tener de un tema en particular.

En caso de que existan dificultades al resolver el ejercicio indicado en la mayoría de los estudiantes, el docente debe reforzar ese contenido.

«Proceso de enseñanza»

Está numerado según el proceso del desarrollo de la clase.

Se proponen actividades que el docente debe realizar durante la clase siguiendo el orden propuesto en el Libro del Estudiante.

La propuesta se basa en comenzar la clase planteando un ejemplo y tratar de que los estudiantes lo resuelvan sin consultar el LE, por lo que se debe garantizar el tiempo suficiente para que piensen y propongan sus ideas, luego los docentes tienen que darles explicaciones de forma concisa y con pocas palabras tratando de no hablar mucho, y considerando las ideas de los estudiantes, concluir en la regla, definición, principio etc. de la clase, para luego realizar la ejercitación.

En este proceso de enseñanza en alguna clase se utiliza la simbología número (1. 2. 3…), ¿?, * Número (1., 2., 3., …): Significa las actividades principales que los estudiantes deben hacer durante el desarrollo de una clase.

¿?: Significa preguntas de los docentes a los estudiantes durante la clase.

No es recomendable hacer preguntas que los estudiantes pueden contestar con respuestas breves como <<si>> y <<no>>. Son muy importantes las preguntas que hacen pensar a los estudiantes, sobre todo en cada clase se necesita una pregunta principal que los atraiga al tema de la clase

Cuando las respuestas de los estudiantes son equivocadas o no son las esperadas, hay que dar tiempo para que piensen por qué es incorrecta, al mismo tiempo los docentes tienen que pensar por qué se han equivocado y reflexionar sobre su manera de enseñar y preguntar. Además las respuestas de sus estudiantes pueden ser indicadores para evaluar el nivel de entendimiento.

*: Hace referencia a los puntos y sugerencias de la clase y actividades del docente. Se refiere a puntos importantes que el docente debe tomar en cuenta para que el desarrollo de la clase sea exitoso.

Para ser más práctico el uso de esta GD en el aula de clases, se da una descripción general, por lo tanto, no se les indica a los docentes todas las acciones a realizar, así que según la necesidad hay que agregar más o modificarlas. En forma general se aplican las siguientes acciones.

1. La GD no dice nada sobre la evaluación continua porque ésta corresponde al objetivo, sin embargo propone como se puede evaluar este, a través de la ejercitación. La evaluación debe hacerse durante la clase y al final de la misma según la necesidad.
2. No está indicado el repaso de la clase. Éste se hace según la necesidad.
3. Cuando se les dan los ejercicios, los docentes deben recorrer el aula identificando los errores de los estudiantes y ayudándoles a corregirlos.
4. Cuando la cantidad de ejercicios es grande, se hace la comprobación y corrección de errores en una adecuada cantidad, para que los estudiantes no repitan el mismo tipo de equivocación.
5. Preparar tareas como ser ejercicios complementarios para los estudiantes que terminan rápido.
6. La orientación individual no está indicada, sin embargo, es imprescindible.

   Los docentes pueden realizarla en las ocasiones siguientes:

- Cuando recorren el aula después de dar los ejercicios.
- En el receso después de la clase.
- En la revisión del cuaderno (hay que tener el cuidado que los estudiantes no pierdan el tiempo haciendo cola para que el docente corrija)
- En algunas lecciones se indican ejercicios adicionales, los cuales pueden ser desarrollados dependiendo del tiempo que se tiene o el nivel de los estudiantes, por lo que se deben considerar si son necesarios para afianzar el contenido.

En la guía del docente se indica después de los puntos de lección uno o dos ejemplos de planes de pizarra para una clase en particular, sin embargo, cada uno puede hacer su propia estructura de uso de la pizarra adaptándola a sus necesidades.

La manera de cómo trabajar con los problemas de aplicación planteados

Los problemas planteados deben trabajarse siguiendo los pasos dados a continuación:

1. Escribir el planteamiento de la operación.
2. Juzgar si el planteamiento de la operación es el adecuado.

3. Efectuar el cálculo según la necesidad.
4. Juzgar si el resultado es el adecuado.
5. Escribir la respuesta con la unidad necesaria.

Siempre que se requiere Planteamiento Operacional y Respuesta, hay que evaluarlos por separado, es decir, valorar el planteamiento de la operación y verificar la respuesta.

Unidad 4 *Ejercicio* **1.16**

Un pozo tiene 4 m de ancho. Un hombre que tiene 1.75 m hasta la altura de sus ojos se sitúa a 1 m del borde y observa que la línea visual une el borde del pozo con la línea de fondo. ¿Qué profundidad tiene el pozo?

Solución

$1 : 4 = 1.75 : x$

$x = 4 \times 1.75$

$x = 7$

Respuesta: 7 m

Primero se juzga que la respuesta se pueda encontrar con el planteamiento operacional. Luego, se efectúa el cálculo y se completa la respuesta con las unidades respectivas.

Si algún estudiante escribe bien el planteamiento operacional pero se equivoca en el cálculo o en la respuesta, hay que hacer preguntas para que reaccione y reflexione sobre su error.

La estructura del LE y su uso

El docente puede comenzar cada unidad con un repaso de lo aprendido anteriormente. Esta parte no está indicada en las horas de clase y los docentes asignan el tiempo para trabajar según su criterio.

La unidad está dividida en lecciones, secciones, ejercicios. Cada lección tiene ejemplos y ejercicios.

Los ejemplos corresponden a los temas importantes de la lección y están ilustrados con dibujos o gráficas que ayudan a los estudiantes a entenderlos.

En la orientación de estos ejemplos lo importante es hacer que los estudiantes piensen por sí mismos; por lo tanto, para presentarlos, los docentes lo escriben en la pizarra para que los estudiantes no vean la respuesta en el LE antes de tratar de encontrarla, aun cuando la guía dice <<Leer el problema… o captar la situación>>

Las soluciones de los ejemplos están marcadas con el signo ✓

La GD lleva la solución de los ejercicios propuestos en el LE. Los docentes tienen que tomar en cuenta que en el caso de ejercicios y problemas con respuestas abiertas puede haber otras respuestas.

Para resaltar los puntos importantes de un tema se utiliza  y para algunas explicaciones relevantes 

Un objetivo del LE es suministrar suficiente cantidad de ejercicios clasificados, por lo tanto, en el LE a veces hay más ejercicios de los que se pueden resolver en el aula. Los docentes tienen que elegir cierta cantidad de ejercicios de cada grupo clasificado, de modo que los estudiantes puedan resolver de todos los tipos. En la GD hay ejercicios adicionales que pueden utilizar como tarea en casa, o como ejercicios para los estudiantes que resuelven rápido o, en otros casos, como tarea mientras esperan las indicaciones del docente.

En la sección de ejercicios (1, 2, 3, …), el trabajo con los mismos está incluido en las horas de clase de la unidad.

Esta sección de ejercicios que aparece al final de cada unidad, el docente podrá utilizarla a su conveniencia y en beneficio de los estudiantes.

Otros íconos que aparecen en el LE y GD son los siguientes:

 Se utiliza para indicar y señalar propiedades y criterios.

 Se utiliza para indicar el uso de la calculadora para hacer o verificar cálculos.

 Se utiliza para hacer aclaraciones, sugerencias o ampliaciones de los conocimientos de la clase.

4. Plan de estudio (Total 125 horas)

Unidad (horas)	Pág. de GD (Pág. de LE)	Contenidos
1. Polinomios (19 horas)	1~28 (1~22)	• Multiplicación y división de un polinomio por un monomio • Multiplicación de polinomios • Valor numérico de un polinomio • Productos notables • Aplicación de los productos notables • Factorización de polinomios • Aplicación de la factorización
2. Números reales (24 horas)	29~66 (23~54)	• Aproximación y definición de la raíz cuadrada • Relación de orden con raíces cuadradas • Números irracionales y reales • Multiplicación y división de raíces cuadradas • Simplificación de raíces cuadradas • Racionalización • Suma y resta de raíces cuadradas • Propiedad distributiva en expresiones con raíces cuadradas • Operaciones con raíces cuadradas
3. Ecuaciones de segundo grado (13 horas)	67~90 (55~72)	• Ecuaciones de segundo grado • Resolución de ecuaciones de segundo grado • Aplicación de las ecuaciones de segundo grado
4. Semejanza de triángulos (18 horas)	91~124 (73~100)	• Figuras semejantes • Criterios de semejanza de triángulos • Demostración aplicando criterios de semejanza de triángulos • Rectas paralelas y proporción • Relación entre triángulos y proporción • Relación entre paralelas y proporción • Aplicación de la semejanza de triángulos
5. Teorema de Pitágoras (13 horas)	125~142 (101~114)	• Teorema de Pitágoras • Aplicación del teorema de Pitágoras
6. Polígonos regulares y el círculo (16 horas)	143~170 (115~138)	• Polígonos regulares • Círculos • Tangentes a un círculo
7. Sólidos geométricos (11 horas)	171~200 (139~164)	• Construcción de sólidos geométricos • Áreas de superficies laterales de paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas • Volumen de cilindros, pirámides, conos y esferas
8. Organización y presentación de datos (11 horas)	201~231 (165~186)	• Tabla de frecuencia • Histograma y polígono de frecuencia • Frecuencia relativa • Moda, media y mediana

5. Programación anual

		Mes	Febrero				Marzo					Abril				Mayo					Junio				Julio				Agosto					Septiembre				Octubre					Noviembre			
	NOVENO GRADO	Semana	1	2	3	4	1	2	3	4	5	1	2	3	4	1	2	3	4	5	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	5	1	2	3	4	1	2	3	4	5	1	2	3	4
No.	**Unidad**	**(clases)**																																												
1	Polinomios	19		4	4	4	4	3																																						
2	Números reales	24						1	4	4	4	X	4	P	3	4																														
3	Ecuaciones de segundo grado	13															4	4	4	1																										
4	Semejanza de triángulos	18																		3	4	4	P	3	X	4																				
5	Teorema de Pitágoras	13																									4	4	4	1																
6	Polígonos regulares y el círculo	16																												3	4	4	P	3	X	2										
7	Sólidos geométricos	11																																		2	4	X	4	1						
8	Organización y presentación de datos	11																																						3	4	4	P	E		
	Total	125																																												

- Según la ley, se tienen 5 horas clase de matemática por semana.
- Sin embargo, en este plan se tienen solamente un máximo de 4 horas clase de matemática por semana.
  - En los centros educativos a veces se tienen otras actividades y se pierden las clases de matemática.
  - Entonces, en este plan ya están considerados algunos días de pérdidas de clase de matemática.
- Esto significa que si se puede dar más clases, puede avanzar más que lo propuesto en este plan.
- En este plan está considerado el inicio de clase a partir de la segunda semana de febrero.
- En este plan están considerados los siguientes feriados y receso académico:
  - Semana Santa (la primera semana de abril) (depende del año)
  - El día de las Américas (14 de abril)
  - El día del Trabajo (1 de mayo)
  - El día del Estudiante (11 de junio)
  - Receso Académico (primera semana de julio) (depende del año)
  - Semana Morazánica (primera semana de octubre)
- También, en el mes de septiembre se tienen muchas actividades (como el día de la Independencia, el día del Niño y el día del Maestro).
  - Entoces, está considerado que una semana (en este plan, la segunda semana de septiembre) no puede dar clase.
- La "P" significa ejecución de las pruebas de cada parcial. En este plan, está considerado:
  - La tercera semana de abril (para el primer parcial)
  - La tercera semana de junio (para el segundo parcial)
  - La última semana de agosto (para el tercer parcial)
  - En el mes de noviembre (para la prueba de fin de grado)
- La siguiente semana de la semana de las pruebas, está considerado el día de entrega de notas. Por eso se tienen solo 3 horas clase de matemática.
- La "E" significa evaluación final.
- Se pueden utilizar algunas horas para dar clases complementarias y fortalecer o repasar los contenidos.

Unidad 1
Polinomios

Unidad 1

Polinomios

(19 horas)

1 Expectativas de logro

- Desarrollan la multiplicación y división de polinomios.
- Desarrollan la multiplicación de polinomios aplicando productos notables.
- Efectuar la factorización de polinomios.

2 Relación y desarrollo

Séptimo grado

Variables y expresiones

- Expresión algebraica (EA)
- Reglas convencionales
- Expresión de cantidades con variables
- Valor numérico de EAs
- Términos y coeficientes de EAs
- Adición y sustracción de EAs
- Multiplicación y división de EAs

Ecuaciones de primer grado en una variable

- Ecuaciones de primer grado (Definición)
- Propiedades de la igualdad y sus aplicaciones
- Resolución de ecuaciones de primer grado
- Aplicación

Octavo grado

Polinomios

- Monomios y polinomios
- Adición y sustracción de polinomios
- Multiplicación y división de polinomios por un número
- Multiplicación y división de monomios

Sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

- Despeje de una variable
- Sistema de dos ecuaciones de primer grado (Definición)
- Resolución de sistemas mediante:
  - Tablas
  - Método de eliminación
  - Método de sustitución
- Varios tipos de sistemas
- Aplicación

Funciones de primer grado

- Funciones de primer grado
- Razón de cambio
- Sistema de coordenadas
- Gráfica de funciones de primer grado
- Expresión de una función de primer grado $y = ax + b$ mediante su gráfica
- Expresión de una función de primer grado $y = ax + b$ a partir de dos puntos
- Criterio de paralelismo y perpendicularidad
- Solución gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables
- Gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables
- Solución gráfica de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables
- Aplicación

Noveno grado

Polinomios

- Multiplicación y división de un polinomio por un monomio
- Multiplicación de polinomios
- Valor numérico de un polinomio
- Productos notables
- Aplicación de productos notables
- Factorización de polinomios
- Aplicación de la factorización

Ecuaciones de segundo grado

- Ecuación de segundo grado (Definición)
- Resolución de ecuaciones mediante:
  - Sustitución de valores
  - Factorización
  - Raíz cuadrada
  - Completación de cuadrados
  - Fórmula cuadrática
- Aplicación

③ Plan de estudio (19 horas)

Lección	Distribución de horas	Contenidos
1. Multiplicación y división de polinomios (5 horas)	1~2/5	• Multiplicación y división de un polinomio por un monomio
	3~4/5	• Multiplicación de polinomios
	5/5	• Valor numérico de un polinomio
2. Productos notables (5 horas)	1/5	• Producto de binomios con término común
	2/5	• El cuadrado de la suma o diferencia de dos monomios
	3/5	• Producto de la forma $(x + a)(x - a)$
	4/5	• Producto de la forma $(ax + b)(cx + d)$
	5/5	• Aplicación de los productos notables
3. Factorización de polinomios (8 horas)	1/8	• Factorización
	2/8	• Factorización por factor común
	3/8	• Factorización por tanteo
	4/8	• Factorización de trinomio cuadrado perfecto
	5/8	• Factorización de diferencia de cuadrados
	6/8	• Factorización por tanteo compuesto
	7/8	• Factorización de un polinomio varias veces
	8/8	• Aplicación de la factorización
Ejercicios (1 hora)	1/1	

④ Puntos de lección

Análisis de las pruebas diagnósticas 2016 - 2017

En esta unidad se enseña la factorización.

[Pregunta] Factorice la expresión $x^2 - 7x + 6$

Institutos: 19% CEB: 0% (2016)

Aunque esta pregunta se categoriza a nivel elemental porque el coeficiente de x^2 es 1 y se puede factorizar utilizando números enteros, los resultados son bajos. Es importante que comprendan las maneras de factorizar porque es necesario para resolver ecuaciones de segundo grado (unidad 3 de 9no grado).

Después de la validación donde se enseñaron las maneras sencillas de factorización, los resultados mostraron una notable mejoría, tal como se evidencia a continuación.

[Pregunta] Factorice la expresión $x^2 - 7x + 6$.

Institutos: 19% → 39% CEB: 0% → 6%
(2016) (2017)

Para mejorar los resultados, es necesario desarrollar los conocimientos sobre Números Positivos y Negativos unidad 1 de 7mo grado.

Lección 1: Multiplicación y división de polinomios

Sección 1: Multiplicación y división de un polinomio por un monomio

En 8vo grado se estudió la multiplicación de dos o más monomios multiplicando los coeficientes y las variables.

En 9no grado se multiplican polinomios por polinomios utilizando la propiedad distributiva también se dividen polinomios entre monomios multiplicando por el recíproco del monomio.

Sección 2: Multiplicación de polinomios

Al producto de polinomios y/o monomios expresado en la forma de un polinomio se le llama desarrollo del producto.

Ejemplo 1.5

$(x -3)(y + 5) = x \times (y + 5) -3 \times (y + 5)$

$= xy + 5x -3y -15$

Sustituyendo las variables (letras) por un número en un polinomio se obtiene el valor numérico de un polinomio.

Ejemplo 1.11

$2a - 4b +1$ si $a = 3$ y $b = -2$

$2a - 4b +1 = 2(3) - 4(-2) +1$

$= 6 + 8 + 1$

$=15$

es el valor numérico del polinomio.

Lección 2: Productos notables

Los productos notables son aquellos productos cuyo desarrollo se conoce fácilmente por simple observación. Los productos notables facilitan el cálculo y se utilizan para la factorización de polinomios.

Sección 1: Producto de binomios con término común

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

Sección 2: El cuadrado de la suma o diferencia de dos monomios

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ y

$(x - a)^2 = x^2 -2ax + a^2$

Sección 3: Producto de la forma $(x + a)(x -a)$

El producto de $(x + a)(x -a) = x^2 - a^2$ se conoce como diferencia de cuadrados.

Sección 4: Producto de la forma $(ax + b)(cx + d)$

El producto de la forma

$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$

Sección 5: Aplicación de los productos notables

Para el cálculo de números.

Ejemplo 2.12

$95^2 = (100 - 5)^2$

$= 100^2 - 2 (100)(5) + 5^2$

$= 10000 - 1000 + 25$

$= 9025$

Lección 3: Factorización de polinomios

Sección 1: Factorización

Al proceso que consiste en expresar un polinomio como el producto de polinomios se llama factorización.

Por ejemplo $x^2 + 4x +3$ se factoriza como el producto $(x + 3)(x +1)$; en este caso a cada uno de estos polinomios $x +3$ y $x+1$, se llaman factores.

Sección 2: Factorización por factor común

El factor común es la aplicación de la propiedad distributiva. se puede factorizar agrupando términos de la siguiente forma:

En general $\mathrm{A}x + \mathrm{A}y = \mathrm{A}(x + y)$.

Procedimiento para factorizar un polinomio por agrupación de términos.

* Agrupar términos de manera que tengan un factor común.
* Factorizar cada grupo.
* Aplicar la propiedad distributiva.

Sección 3: Factorización por tanteo

Se factorizan polinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$ por tanteo, buscando los polinomios $(x + a)(x + b)$ correspondientes.

Ejemplo 3.4

$x^2 + 5x +6 = (x + 2)(x + 3)$ observe que $ab = 6$ y $a + b = 5$

Ejemplo 3.6

$x^2 - 5x -6 = (x + 1)(x - 6)$ observe que

$ab = -6$ y $a + b = -5$

Sección 4: Factorización de trinomio cuadrado perfecto

Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto, se deben de cumplir las siguientes condiciones:

* El primero y el tercer término sea cuadrado perfecto (raíz cuadra exacta)
* El doble de las raíces del primero y el tercer término sea igual al segundo término del trinomio.
* Su factorización es el cuadrado de un binomio cuyos términos son las raíces cuadradas del primer y tercer término con el signo del segundo término.

Ejemplo 3.8

$$9x^2 - 30x + 25 = (3x)^2 - 2\,(3x)(5) + (5)^2$$
$$= (3x - 5)^2$$

Sección 5: Factorización de diferencia de cuadrados

La factorización de una diferencia de cuadrados es el producto de dos binomios de la forma $(x+a)(x-a)$.

$x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$

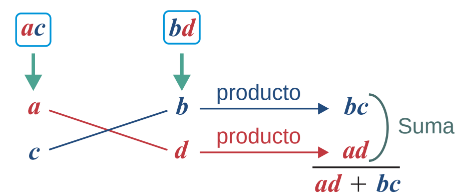
Ejemplo 3.10

$$9a^2 - 13 = (3a)^2 - (4)^2$$
$$(3a + 4)(3a - 4)$$

Sección 6: Factorización por tanteo compuesto.

En general un polinomio de la forma

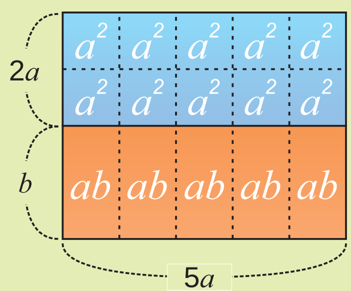
$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$ es factorizable si se cumple:



Tema: Multiplicación y división de un polinomio por un monomio (1)

Ejemplo 1.1 (2) **Pág.** 2 (3)

Encuentre el área de un rectángulo cuya base es $5a$ y su altura es $(2a + b)$.



Solución (4)

Hay 10 cuadrados con área de a^2 cada uno y 5 rectángulos con área de ab cada un.
Es decir que el área del rectángulo dado es $10a^2 + 5ab$.

Respuesta: $10a^2 + 5ab$

Lo anterior se puede considerar como:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \text{base} \times \text{altura} \\ &= 5a \times (2a + b) \\ &= 5a \times 2a + 5a \times b \\ &= 10a^2 + 5ab \end{aligned}$$

(6) Para multiplicar un monomio por un polinomio se aplica la **propiedad distributiva** (el monomio se multiplica por cada uno de los términos del polinomio).

$a(b + c) = ab + ac$ $\quad$ $(a + b)c = ac + bc$

Ejemplo 1.2 (2) **Pág.** 2 (3)

Calcule.

a) $-6x(x - 2y)$ $\quad$ b) $(2a + b) \times 5a$

Solución (4)

a) $-6x(x - 2y) = -6x \times x + (-6x) \times (-2y)$
$= -6x^2 + 12xy$

b) $(2a + b) \times 5a = 2a \times 5a + b \times 5a$
$= 10a^2 + 5ab$

Ejercicio 1.1 (2) **Pág.** 2 (3)

a) $(2x + y) \times 7x = 2x \times 7x + y \times 7x$
$= 14x^2 + 7xy$ ✓

b) $(3a - b) \times 4a = 3a \times 4a + (-b) \times 4a$
$= 12a^2 - 4ab$ ✓

c) $(5a - 6b) \times (-2b) = 5a \times (-2b) + (-6b) \times (-2b)$
$= -10ab + 12b^2$ ✓

d) $4x(2x - 1) = 4x \times 2x + 4x \times (-1)$
$= 8x^2 - 4x$ ✓

e) $2x(x + 3y) = 2x \times x + 2x \times 3y$
$= 2x^2 + 6xy$ ✓

f) $-3a(8a + 7b) = (-3a) \times 8a + (-3a) \times 7b$
$= -24a^2 - 21ab$ ✓

1. Al inicio de la clase escribir solo la palabra "**Tema**" y hasta el final de la clase (o en el desarrollo de la misma) escribir el contenido del tema.
2. Escribir el número del Ejemplo o Ejercicio.
3. Escribir el número de **Pág.** del LE para entender dónde se quedaron con respecto al tiempo.
4. Escribir la **Solución** y **Respuesta**.
5. En el problema planteado marcar los datos importantes para poder llegar a la respuesta.
6. Escribir la conclusión en un rectángulo de color rojo.

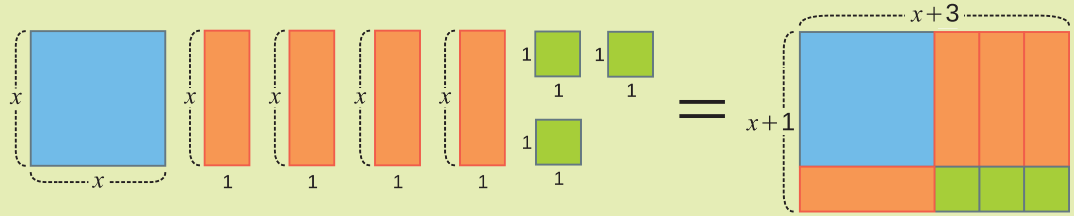
✓ Marcar en el Ejercicio cuando la solución o la respuesta sean correctas.

Nota: Los puntos aquí explicados no siempre aplican todos en un plan de pizarra.

Tema: Factorización 1

Pág. 12 3

Forme un rectángulo con las 8 figuras, considerando las medidas propuestas:



¿Cuánto mide el largo y el ancho? Exprese su área.

6

Al proceso que consiste en expresar un polinomio como el producto de polinomios se llama **factorización**. Por ejemplo $x^2 + 4x + 3$ se factoriza como el producto $(x + 3)(x + 1)$; en este caso a cada uno de estos polinomios $x + 3$ y $x + 1$; se llaman **factores**.

Factorización

$$\boxed{x^2 + 4x + 3} = \boxed{(x + 3)(x + 1)}$$

Desarrollo

Ejemplo 3.1 2 **Pág.** 12 3

¿Cuales de los siguientes polinomios están expresados como una factorización?

a) $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$

b) $x^2 + 8x + 7 = x(x + 8) + 7$

Solución 4

a) El polinomio $x^2 - 5x + 6$ está expresado como el producto de los polinomios $x - 3$ y $x - 2$.

b) El polinomio $x^2 + 8x + 7$ no esta expresado como el producto de polinomios, por que tiene un producto y una suma.

Respuesta: a)

Ejercicio 3.1 2 **Pág.** 12 3

¿Cuales de los siguientes polinomios están expresados como una factorización?

a) $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

b) $x^2 - 6x + 5 = x(x - 6) + 5$

c) $x^2 - 2x = x(x - 2)$

d) $8x + 4 = (3x + 2) + (5x + 2)$

Respuesta: a) y c) ✓

1 Al inicio de la clase escribir solo la palabra "**Tema**" y hasta el final de la clase (o en el desarrollo de la misma) escribir el contenido del tema.

2 Escribir el número del Ejemplo o Ejercicio.

3 Escribir el número de **Pág.** del LE para entender dónde se quedaron con respecto al tiempo.

4 Escribir la **Solución** y **Respuesta**.

5 En el problema planteado marcar los datos importantes para poder llegar a la respuesta.

6 Escribir la conclusión en un rectángulo de color rojo.

✓ Marcar en el Ejercicio cuando la solución o la respuesta sean correctas.

Nota: Los puntos aquí explicados no siempre aplican todos en un plan de pizarra.

Indicador de logro

Calcule: $(2x + y) \times 7x$

1. Multiplicar un monomio por un polinomio.

Ejemplo **1.1**

(15 min)

- * Sin efectuar ninguna operación pida a los estudiantes que encuentren el área de ambos colores, ¿cuánto mide la base del rectángulo de color azul?, ¿cuánto mide su altura?
- * Calcule el área del rectángulo rojo.
- * De igual manera, ¿cuánto mide el área del rectángulo color rojo?
- * Observar que las bases de ambos rectángulos miden igual, ¿cuál es el área del rectángulo mayor?, ¿cuánto mide la altura y la base del rectángulo mayor es decir unión de rojo y azul?
- * Expresar el área del rectángulo mayor.
- * Concluir que
  $5a \times (2a + b) = 10a^2 + 5ab$.

2. Concluir multiplicación de un monomio por un polinomio.

(5 min)

3. Desarrollar el producto de un monomio por polinomio.

Ejemplo **1.2**

(10 min)

- * En el monomio $-6x$, ¿qué operación debe aplicar respecto $x - 2y$?
- * Recordar la propiedad distributiva.
- * Enfatizar que cada término del polinomio $x - 2y$ se multiplica por $-6x$.
- * En b) aplicar la propiedad distributiva de derecha a izquierda.

4. Resolver *Ejercicio* **1.1**

(15 min)

Solución

a) $14x^2 + 7xy$	b) $12a^2 - 4ab$
c) $-10ab + 12b^2$	d) $8x^2 - 4x$
e) $2x^2 + 6xy$	f) $-24a^2 - 21ab$

Unidad 1: **Polinomios**

Lección 1: (1/5) Multiplicación y división de polinomios

Sección 1: Multiplicación y división de un polinomio por un monomio

Objetivo: Multiplicar un polinomio por un monomio.

Unidad 1

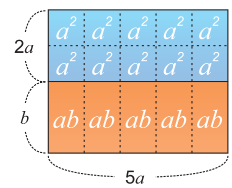
Polinomios

Lección 1: Multiplicación y división de polinomios

Sección 1: Multiplicación y división de un polinomio por un monomio

Ejemplo **1.1**

Encuentre el área de un rectángulo cuya base es $5a$ y su altura es $(2a + b)$.



Solución:

En la figura de la derecha se puede observar que hay 10 cuadrados pequeños con área de a^2 cada uno y 5 rectángulos con área de ab. Es decir que el área del rectángulo es $10a^2 + 5ab$.

Respuesta: $10a^2 + 5ab$

Lo anterior se puede considerar como: Área = base × altura

$$= 5a \times (2a + b)$$
$$= 5a \times 2a + 5a \times b$$
$$= 10a^2 + 5ab$$

Para multiplicar un monomio por un polinomio se aplica la **propiedad distributiva** (el monomio se multiplica por cada uno de los términos del polinomio).

$$a(b + c) = ab + ac \qquad (a + b)c = ac + bc$$

Ejemplo **1.2**

Calcule.

a) $-6x(x - 2y)$ b) $(2a + b) \times 5a$

Solución:

a) $-6x(x - 2y) = -6x \times x + (-6x) \times (-2y)$
$= -6x^2 + 12xy$

b) $(2a + b) \times 5a = 2a \times 5a + b \times 5a$
$= 10a^2 + 5ab$

Se puede omitir un paso:
a) $-6x(x - 2y) = -6x^2 + 12xy$
b) $(2a + b) \times 5a = 10a^2 + 5ab$

Ejercicio **1.1** Calcule.

a) $(2x + y) \times 7x$	b) $(3a - b) \times 4a$	c) $(5a - 6b) \times (-2b)$
d) $4x(2x - 1)$	e) $2x(x + 3y)$	f) $-3a(8a + 7b)$

Ejercicios adicionales

Calcule

a) $-2x(-3x + 2y)$ b) $b(7c - 2d)$ c) $(x + 8) \times 2x$ d) $(a - 2b) \times (-3b)$

Solución

a) $6x^2 - 4xy$ b) $7bc - 2bd$ c) $2x^2 + 16x$ d) $-3ab + 6b^2$

Unidad 1: **Polinomios**

Lección 1: (2/5) Multiplicación y división de polinomios

Sección 1: Multiplicación y división de un polinomio por un monomio

Objetivo: Dividir un polinomio entre un monomio.

Ejemplo 1.3

Calcule.

a) $(6a^2 - 9a) \div 3a$

b) $(2x^2 + 4xy) \div \frac{2}{3}x$

$(A + B) \div C = \frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}$

Solución:

a) $(6a^2 - 9a) \div 3a = \frac{6a^2 - 9a}{3a}$

$= \frac{6a^2}{3a} - \frac{9a}{3a}$

$= \frac{\overset{2}{\cancel{6}} \times \overset{1}{\cancel{a}} \times a}{\underset{1}{\cancel{3}} \times \underset{1}{\cancel{a}}} - \frac{\overset{3}{\cancel{9}} \times \overset{1}{\cancel{a}}}{\underset{1}{\cancel{3}} \times \underset{1}{\cancel{a}}}$

$= 2a - 3$

b) $(2x^2 + 4xy) \div \frac{2}{3}x = (2x^2 + 4xy) \div \frac{2x}{3}$

$= (2x^2 + 4xy) \times \frac{3}{2x}$

$= 2x^2 \times \frac{3}{2x} + 4xy \times \frac{3}{2x}$

$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \times \overset{1}{\cancel{x}} \times x \times 3}{\underset{1}{\cancel{2}} \times \underset{1}{\cancel{x}}} + \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \times \overset{1}{\cancel{x}} \times y \times 3}{\underset{1}{\cancel{2}} \times \underset{1}{\cancel{x}}}$

$= 3x + 6y$

$\frac{2}{3}x = \frac{2x}{3}$

$A \div \frac{a}{b} = A \times \frac{b}{a}$

Ejercicio 1.2 Calcule.

a) $(5x^2 - 10x) \div 5x$

b) $(8a^2 - 2a) \div 2a$

c) $(6ax + 3ay) \div (-3a)$

d) $(-10x^2 + x) \div \frac{x}{2}$

e) $(3x^2 + 6xy) \div (-\frac{3}{4}x)$

f) $(15x^2y - 9xy^2) \div \frac{3}{2}xy$

3

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

Ejercicios adicionales

Calcule

a) $(6x^2 + 9x) \div 3x$ b) $(b^2 + b) \div b$ c) $(2xy - 2y) \div (-2y)$

d) $(6a^2 - 3a) \div \left(-\frac{3a}{2}\right)$ e) $(-16x^2 - 12x) \div \frac{4x}{3}$

Solución

a) $2x + 3$ b) $b + 1$ c) $-x + 1$ d) $-4a + 2$ e) $-12x - 9$

Indicador de logro

Calcule.

$(5x^2 - 10x) \div 5x$

1. Dividir un polinomio entre un monomio.

Ejemplo 1.3

(20 min)

* Expresar como fracción $(6a^2 - 9a) \div 3a$.
* Recalcar que $3a$ divide a $6a^2$ y $-9a$.
* Enfatizar $\frac{2}{3}x = \frac{2x}{3}$ así que el recíproco de $\frac{2}{3}x$ es $\frac{3}{2x}$.
* En la división entonces $(2x^2 + 4xy)$ se multiplica por el recíproco de $\frac{2}{3}x$, o sea $(2x^2 + 4xy) \times \frac{3}{2x}$.
* Aplicar la propiedad distributiva.
* Recordar que toda expresión debe simplificarse siempre que sea posible.

2. Resolver **Ejercicio 1.2**

(25 min)

Solución

a) $x - 2$

b) $4a - 1$

c) $-2x - y$

d) $-20x + 2$

e) $-4x - 8y$

f) $10x - 6y$

Indicador de logro

Desarrolle: $(x + 2)(y + 3)$

1. **Multiplicar dos binomios usando la propiedad distributiva.** Ejemplo 1.4
   (15 min)
   ¿Cuál es el base y altura del rectángulo mayor?

* Expresar el producto $(a + b)$ x $(c + d)$.

* Multiplicar cada término de $(a + b)$ por el binomio $(c + d) = M$ usando la propiedad distributiva.

* Determinar el área de cada rectángulo pequeño.

* Determinar el área del rectángulo mayor sumando el área de los pequeños.

¿Cómo se calcula el área de un rectángulo?

• Comparar resultados después del cálculo con el área que se calculó sumando áreas.

2. **Definir el desarrollo de un producto.**
   (5 min)

3. **Desarrollar un producto de polinomios.** Ejemplo 1.5
   (10 min)

* Enfatizar que cada término del polinomio x - 3 este se multiplica por el polinomio y + 5.

* Aplicar la propiedad distributiva para ambos términos del polinomio x - 3.

4. **Resolver** Ejercicio 1.3
   (15 min)

Solución

a) $ac - ad + bc - bd$
b) $ac - ad - bc + bd$
c) $xy + 3x + 2y + 6$
d) $xy + 4x - y - 4$

Unidad 1: Polinomios

Lección 1: (3/5) Multiplicación y división de polinomios

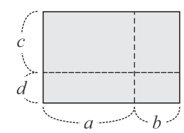
Sección 2: Multiplicación de polinomios

Objetivo: Multiplicar polinomios con variables no comunes.

Sección 2: Multiplicación de polinomios

Ejemplo 1.4

Encuentre el área de un rectángulo cuya base es $(a + b)$ y su altura es $(c + d)$.



Solución:

Área = base × altura

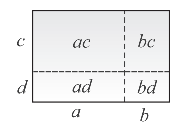
$= (a + b) \times (c + d)$

$= (a + b) \times M$ ... Sustituir $(c + d) = M$

$= a \times M + b \times M$ ... Propiedad distributiva

$= a \times (c + d) + b \times (c + d)$ ... Sustituir $M = (c + d)$

$= ac + ad + bc + bd$ ... Propiedad distributiva



Respuesta: El área es $ac + ad + bc + bd$

Observe que la suma del área de cada rectángulo es igual al área del rectángulo más grande.
Generalmente a la expresión $ac + ad + bc + bd$ se le llama desarrollo del producto de $(a + b) \times (c + d)$.
$(a + b) \times (c + d)$ se expresa como $(a + b)(c + d)$ eliminando el signo ×.

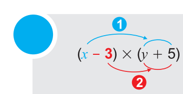
Al producto de polinomios y/o monomios expresado en la forma de polinomio se le llama **desarrollo del producto.**

Ejemplo 1.5

Desarrolle $(x - 3)(y + 5)$.

Solución:

$(x - 3)(y + 5) = x \times (y + 5) - 3 \times (y + 5)$
$= xy + 5x - 3y - 15$



Ejercicio 1.3 Desarrolle.

a) $(a + b)(c - d)$ b) $(a - b)(c - d)$
c) $(x + 2)(y + 3)$ d) $(x - 1)(y + 4)$

4 Unidad 1 - Polinomios

Ejercicios adicionales

Desarrolle

a) $(a + 5)(b - 8)$ b) $(x - 3)(y + 1)$ c) $(m + 2)(n + 6)$ d) $(a - 5)(b - 7)$

Solución

a) $ab - 8a + 5b - 40$ b) $xy + x - 3y - 3$ c) $mn + 6m + 2n + 12$ d) $ab - 7a - 5b + 35$

Unidad 1: Polinomios

Lección 1: (4/5) Multiplicación y división de polinomios

Sección 2: Multiplicación de polinomios

Objetivo: Multiplicar polinomios con al menos una variable común.

Ejemplo 1.6

Calcule $(x-4)(x-7)$.

Solución:

$$(x-4)(x-7) = x(x-7) - 4(x-7)$$
$$= \underbrace{x^2 - 7x - 4x}\; + 28$$
$$= x^2 - 11x + 28 \quad \text{... Reducir términos semejantes}$$

$(x-4)(x-7)$ (1) (2)

$x(x-7) - 4(x-7)$ es la expresión de omitir el signo $\times$ de $x \times (x-7) - 4 \times (x-7)$

Ejercicio 1.4 Calcule.

a) $(x-2)(x-6)$ b) $(x-4)(x+5)$

c) $(2a+1)(2a+4)$ d) $(3x+5)(3x-7)$

Ejemplo 1.7

Calcule $(3a+2b)(2a-b)$.

$(3a+2b)(2a-b)$ (1) (2)

Solución:

$$(3a+2b)(2a-b) = 3a(2a-b) + 2b(2a-b)$$
$$= 6a^2 \underbrace{- 3ab + 4ab} - 2b^2$$
$$= 6a^2 + ab - 2b^2$$

Ejercicio 1.5 Calcule.

a) $(3a+2b)(2a+3b)$ b) $(9a-2b)(5a+6b)$

Ejemplo 1.8

Calcule $(3x-y)(4x+3y-2)$.

Solución:

$$(3x-y)(4x+3y-2) = 3x(4x+3y-2) - y(4x+3y-2)$$
$$= 12x^2 + 9xy - 6x - 4xy - 3y^2 + 2y \quad \text{... Propiedad distributiva}$$
$$= 12x^2 + 5xy - 6x - 3y^2 + 2y \quad \text{... Reducir términos semejantes}$$

Ejercicio 1.6 Calcule.

a) $(a+1)(a+b-1)$ b) $(a+2b)(2a+b+1)$

c) $(x+2y-1)(2x-y)$ d) $(x-y+3)(3x-2y)$

5

Libro del Estudiante - Matemáticas 9° grado

Indicador de logro

Desarrolle $(x-2)(x-6)$

1. **Multiplicar polinomios con un término común.** *Ejemplo* **1.6**
   (5 min)
   * Observar los binomios que se están multiplicando, ¿cuál es el término que tienen en común?
   * Aplicar la propiedad distributiva y reducir los términos semejantes.
2. **Resolver** *Ejercicio* **1.4**
   (10 min)
   Solución
   a) $x^2 - 8x + 12$
   b) $x^2 + x - 20$
   c) $4a^2 + 10a + 4$
   d) $9x^2 - 6x - 35$
3. **Multiplicar polinomios en dos variables.** *Ejemplo* **1.7**
   (5 min)
   * Desarrollar los pasos de igual manera del *Ejemplo* 1.6
4. **Resolver** *Ejercicio* **1.5**
   (10 min)
   Solución
   a) $6a^2 + 13ab + 6b^2$
   b) $45a^2 + 44ab - 12b^2$
5. **Multiplicar un binomio por un trinomio.** *Ejemplo* **1.8**
   (5 min)
   * Aplicar la propiedad distributiva multiplicando cada término de $3x - y$ por $4x + 3y - 2$.
6. **Resolver** *Ejercicio* **1.6**
   (10 min)
   Solución
   a) $a^2 + ab + b - 1$
   b) $2a^2 + 5ab + a + 2b^2 + 2b$
   c) $2x^2 - 2x + 3xy + y - 2y^2$
   d) $3x^2 + 9x - 5xy - 6y + 2y^2$

Indicador de logro

Encuentre el valor numérico considerando el valor indicado de la variable:

$3a^2 + 2a - 8$ si $a = -3$

1. Encontrar el valor numérico de un polinomio en una variable. *Ejemplo* **1.9**

(4 min)

¿Cuál es la variable del polinomio? ¿Qué valor se le asigna a esa variable?

* Sustituir el valor en la variable.

2. Resolver *Ejercicio* **1.7**

(8 min)

Solución

a) 71 b) -12

3. Definir valor numérico de un polinomio.

(3 min)

Concluir que ese valor encontrado se llama valor numérico.

¿Cómo se obtiene el valor numérico de un polinomio?

4. Encontrar el valor numérico de un polinomio cuando se le asigna un valor negativo. *Ejemplo* **1.10**

(7 min)

* Desarrollar el ejemplo de la misma manera que el ejemplo anterior.

¿Cuál es el valor de la variable?

* Es importante recalcar que al calcular $2(-2)^2$ primero calcula la potencia así $(-2)^2 = 4$.

5. Resolver *Ejercicio* **1.8**

(8 min)

Solución

a) 13 b) -7

6. Encontrar el valor numérico de un polinomio en dos variables. *Ejemplo* **1.11**

(5 min)

¿Cuántas variables tiene el polinomio?, ¿qué valores se le asigna a cada variable?, ¿cómo puede obtener el valor numérico del polinomio?

Unidad 1: Polinomios

Lección 1: (5/5) Multiplicación y división de polinomios

Sección 3: Valor numérico de un polinomio

Objetivo: Encontrar el valor numérico de un polinomio.

Sección 3: Valor numérico de un polinomio

Ejemplo **1.9**

Encuentre el valor numérico del polinomio $a^2 - 3a + 7$ si $a = 2$

Solución:

Se sustituye la variable a por 2.

$$\begin{aligned} a^2 - 3a + 7 &= (2)^2 - 3(2) + 7 \\ &= 4 - 6 + 7 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Recuerde que cuando se sustituye la variable por un valor, se usa paréntesis. 3(2) significa 3×2

Respuesta: 5

Ejercicio **1.7** Encuentre el valor numérico, considerando los valores indicados de las variables.

a) $2n^2 + 5n - 4$; si $n = 5$ b) $2x^3 - 5x^2 + 2x - 12$; si $x = 2$

El valor numérico de un polinomio es el valor que se obtiene al sustituir las variables por números y desarrollar las operaciones indicadas.

Ejemplo **1.10**

Encuentre el valor numérico del polinomio $2a^2 + 3a + 8$; si $a = -2$.

Solución:

Se sustituye la variable a por -2.

$$\begin{aligned} 2a^2 + 3a + 8 &= 2(-2)^2 + 3(-2) + 8 \\ &= 8 - 6 + 8 \\ &= 10 \end{aligned}$$

$2(-2)^2 = 2 \times (-2)^2 = 2 \times 4 = 8$

Respuesta: 10

Ejercicio **1.8** Encuentre el valor numérico, considerando los valores indicados de las variables.

a) $3a^2 + 2a - 8$; si $a = -3$ b) $m^3 + 3m^2 + 3m - 5$; si $m = -2$

Ejemplo **1.11**

Encuentre el valor numérico del polinomio $2a - 4b + 1$ si $a = 3$ y $b = -2$

Solución:

$$\begin{aligned} 2a - 4b + 1 &= 2(3) - 4(-2) + 1 \\ &= 6 + 8 + 1 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Respuesta: 15

Ejercicio **1.9** Encuentre el valor numérico.

a) $8x + 3y - 8$; si $x = 1$ y $y = -2$ b) $a - 3b - 3$; si $a = -1$ y $b = -2$

c) $4x - y - 8$: si $x = 3$ y $y = 0$ d) $3m + n^2 - 3$; si $m = 1$ y $n = -3$

6 *Unidad 1 - Polinomios*

7. Resolver *Ejercicio* **1.9**

(10 min)

Solución

a) -6 b) 2 c) 4 d) 9

Unidad 1: Polinomios

Lección 2: (1/5) Productos notables

Sección 1: Producto de binomios con término común

Objetivo: Desarrollar multiplicaciones de binomios con término común de la forma: $(x + a)(x + b)$.

Lección 2: Productos notables

Sección 1: Producto de binomios con término común

Ejemplo 2.1

Encuentre el número que va en la casilla:

a) $(x + 2)(x + 3) = x^2 + \boxed{}\,x + \boxed{}$ b) $(x - 2)(x + 3) = x^2 + \boxed{}\,x + \boxed{}$

c) $(x + 2)(x - 3) = x^2 + \boxed{}\,x + \boxed{}$ d) $(x - 2)(x - 3) = x^2 + \boxed{}\,x + \boxed{}$

Solución:

a) $(x + 2)(x + 3) = x(x + 3) + 2(x + 3)$
$= x^2 + 3x + 2x + 6$
$= x^2 + 5x + 6$

Observe: $(+2) + (+3) = \boxed{+5}$ y
$(+2) \times (+3) = \boxed{+6}$

b) $(x - 2)(x + 3) = x(x + 3) - 2(x + 3)$
$= x^2 + 3x - 2x - 6$
$= x^2 + x - 6$

Observe: $(-2) + (+3) = \boxed{+1}$ y
$(-2) \times (+3) = \boxed{-6}$

c) $(x + 2)(x - 3) = x(x - 3) + 2(x - 3)$
$= x^2 - 3x + 2x - 6$
$= x^2 - x - 6$

Observe: $(+2) + (-3) = \boxed{-1}$ y
$(+2) \times (-3) = \boxed{-6}$

d) $(x - 2)(x - 3) = x(x - 3) - 2(x - 3)$
$= x^2 - 3x - 2x + 6$
$= x^2 - 5x + 6$

Observe: $(-2) + (-3) = \boxed{-5}$ y
$(-2) \times (-3) = \boxed{+6}$

El producto resultante es un trinomio; el coeficiente del segundo término es **la suma** de dos números y el tercer término es el **producto** de esos mismos números.

$-x = (-1) \times x$
$x = 1 \times x$

En forma general:

$(x + a)(x + b) = x^2 + bx + ax + ab$
$= x^2 + (a + b)x + ab$

Suma Producto

Descripción gráfica es:

	x	b
x	x^2	bx
a	ax	ab

Producto de binomios con término común:
$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

Ejemplo 2.2

Resuelva aplicando el producto de binomios.

a) $(x + 3)(x + 8)$ b) $(x + 3)(x - 8)$

$(x + 3)(x - 8)$
$= x^2 - 5x - 24$
$3 + (-8)$ $3 \times (-8)$

Solución:

a) $(x + 3)(x + 8) = x^2 + (3 + 8)x + (8)(3)$
$= x^2 + 11x + 24$

b) $(x + 3)(x - 8) = x^2 + (3 - 8)x + (3)(-8)$
$= x^2 - 5x - 24$

Ejercicio 2.1 Desarrolle los siguientes binomios con un término común.

a) $(x + 2)(x + 5)$ b) $(x - 3)(x + 6)$ c) $(x + 9)(x - 5)$
d) $(x - 6)(x - 4)$ e) $(a - 1)(a + 2)$ f) $(y + 3)(y - 5)$

7

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

Indicador de logro

Desarrolle los binomio con término común.
$(x - 3)(x + 6)$

1. **Encontrar el producto de binomios con término común.** Ejemplo 2.1
(20 min)
   * Desarrollar cada producto.
   * Calcular la suma y el producto de los términos no comunes.
   * Comparar los resultados con el desarrollo de cada producto.
2. **Definir el producto de binomios con un término común**
(5 min)
3. **Aplicar el producto de binomios con término común.** Ejemplo 2.2
(5 min)
   * Identificar los valores que corresponden a y b en forma de $(x + a)(x + b)$
   * Aplicar la definición del producto de binomios con un término en común.
4. **Resolver** Ejercicio 2.1
(15 min)

Solución

a) $x^2 + 7x + 10$
b) $x^2 + 3x - 18$
c) $x^2 + 4x - 45$
d) $x^2 - 10x + 24$
e) $a^2 + a - 2$
f) $y^2 - 2y - 15$

Ejercicios adicionales

Desarrolle los siguientes binomios con un término común.

a) $(m - 3)(m + 2)$ b) $(x - 3)(x - 4)$ c) $(a + 2)(a - 5)$ d) $(a + 1)(a - 2)$

Solución

a) $m^2 - m - 6$ b) $x^2 - 7x + 12$ c) $a^2 - 3a - 10$ d) $a^2 - a - 2$

Indicador de logro

Desarrolle $(a + 3)^2$

1. **Desarrollar el cuadrado de la suma y de la diferencia de dos monomios.** Ejemplo 2.3
   (15 min)

* Recordar
$(x + a)^2 = (x + a)(x + a)$ y luego para aplicar el producto de binomios, calcular
$a + a$ y a x a.

* Recordar $(x - a)^2 = (x - a)(x - a)$ y luego como inciso a), calcular $(-a)+(-a)$ y $(-a)$ x $(-a)$

* Para visualizar inciso a) se puede utilizar la figura que está en LE.

2. **Definir el cuadrado de la suma y el cuadrado de la diferencia de dos monomios.**
   (3 min)

3. **Aplicar las fórmulas del cuadrado de la suma y de la diferencia.** Ejemplo 2.4
   (5 min)

* No intentar usar la propiedad distributiva.

4. **Resolver** Ejercicio 2.2
   (7 min)

   Solución

   a) $a^2 + 6a + 9$

   b) $x^2 - 14x + 49$

   c) $y^2 + 8y + 16$

5. **Aplicar la fórmula del cuadrado de la suma y diferencia en dos variables.**
   Ejemplo 2.5
   (5 min)

6. **Resolver** Ejercicio 2.3
   (10 min)

   Solución

   a) $a^2 + 8ab + 16b^2$

   b) $x^2 - 10xy + 25y^2$

Unidad 1: Polinomios

Lección 2: (2/5) Productos notables

Sección 2: El cuadrado de la suma o diferencia de monomios

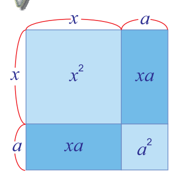
Objetivo: Desarrollar el cuadrado de la suma $(a + b)^2$ y el cuadrado de la diferencia $(a - b)^2$.

Sección 2: El cuadrado de la suma o diferencia de dos monomios

Ejemplo 2.3

Desarrolle los siguientes productos. a) $(x + a)^2$ b) $(x - a)^2$

Solución:



a) $(x + a)^2$
$(x + a)^2 = (x + a)(x + a)$
Recuerde: $a + a = 2a$
$a \times a = a^2$
Por consiguiente
$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

b) $(x - a)^2$
$(x - a)^2 = (x - a)(x - a)$
Recuerde: $(-a) + (-a) = -2a$
$(-a) \times (-a) = (-a)^2 = a^2$
Por consiguiente
$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

El cuadrado de la suma de dos monomios es:
$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$
El cuadrado de la diferencia de dos monomios es:
$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

Ejemplo 2.4

Desarrolle. a) $(x + 5)^2$ b) $(x - 3)^2$

Solución:

a) $(x + 5)^2 = x^2 + 2(5)x + (5)^2$
$= x^2 + 10x + 25$

b) $(x - 3)^2 = x^2 - 2(3)x + (3)^2$
$= x^2 - 6x + 9$

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$
$(x + 5)^2 = x^2 + 2(5)x + (5)^2$

Ejercicio 2.2 Desarrolle:

a) $(a + 3)^2$ b) $(x - 7)^2$ c) $(y + 4)^2$

Ejemplo 2.5

Desarrolle $(a + 4n)^2$.

Solución:

$(a + 4n)^2 = a^2 + 2a(4n) + (4n)^2$
$= a^2 + 8an + 16n^2$

En general
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Ejercicio 2.3 Desarrolle aplicando el cuadrado de la suma o de la diferencia de dos monomios.

a) $(a + 4b)^2$ b) $(x - 5y)^2$

Ejercicios adicionales

Desarrolle aplicando el cuadrado de la suma o de la diferencia de dos monomios.

a) $(m - 3)^2$ b) $(x + 2)^2$ c) $(m - 2n)^2$ d) $(x + 5y)^2$

Solución

a) $m^2 - 6m + 9$ b) $x^2 + 4x + 4$ c) $m^2 - 4mn + 4n^2$ d) $x^2 + 10xy + 25y^2$

Unidad 1: Polinomios

Lección 2: (3/5) Productos notables

Sección 3: Producto de la forma $(x + a)(x - a)$

Objetivo: Desarrollar multiplicación de la forma $(x + a)(x - a)$.

Indicador de logro

Desarrolle:
$(x + 7)(x - 7)$

Ejemplo 2.6

Desarrolle $(x + a)(x - a)$.

Considerando la forma de la Sección 2
Solución 1:

$$\begin{aligned}(x + a)(x - a) &= (x + a)[x + (-a)]\\ &= x^2 + [a + (-a)]x + a \times (-a) \ldots \text{ Usar la forma } (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab\\ &= x^2 + 0x - a^2\\ &= x^2 - a^2\end{aligned}$$

Considerando propiedad distributiva
Solución 2:

$$\begin{aligned}(x + a)(x - a) &= x(x - a) + a(x - a)\\ &= x^2 - ax + ax - a^2\\ &= x^2 - a^2\end{aligned}$$

La expresión $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$ se conoce como **diferencia de cuadrados**.

Ejemplo 2.7

Desarrolle.

a) $(x + 5)(x - 5)$ b) $(3x + 2y)(3x - 2y)$ c) $(x - \frac{3}{5})(x + \frac{3}{5})$

Solución:

a) $(x + 5)(x - 5) = x^2 - (5)^2 = x^2 - 25$

b) $(3x + 2y)(3x - 2y) = (3x)^2 - (2y)^2 = 9x^2 - 4y^2$

c) $(x - \frac{3}{5})(x + \frac{3}{5}) = x^2 - (\frac{3}{5})^2 = x^2 - \frac{9}{25}$

Ejercicio 2.4 Desarrolle.

a) $(x + 7)(x - 7)$ b) $(x - 3)(x + 3)$

c) $(5x - 1)(5x + 1)$ d) $(x + 2y)(x - 2y)$

e) $(a - \frac{1}{3})(a + \frac{1}{3})$ f) $(a - 6b)(a + 6b)$

3. Desarrollar el producto de la forma $(x + a)(x - a)$.
Ejemplo 2.6
(8 min)

* Enfatizar que $x - a$ se escribe también como $x + (-a)$.
* Aplicar el producto de binomios con término común.
* Otra manera de desarrollarlo es aplicando la propiedad distributiva para cada término del polinomio $x + a$.

2. Concluir el producto de $(x + a)(x - a)$
(2 min)

3. Aplicar el producto de la forma $(x + a)(x - a)$.
Ejemplo 2.7
(15 min)

* Identificar los términos de cada binomio.
* Aplicar la definición para encontrar el producto.

4. Resolver Ejercicio 2.4
(20 min)

Solución

a) $x^2 - 49$

b) $x^2 - 9$

c) $25x^2 - 1$

d) $x^2 - 4y^2$

e) $a^2 - \frac{1}{9}$

f) $a^2 - 36b^2$

Ejercicios adicionales

Desarrolle.

a) $(m + 3)(m - 3)$ b) $(a + 2)(a - 2)$ c) $(y - 4)(y + 4)$

d) $(1 - t)(1 + t)$ e) $(3 + n)(3 - n)$ f) $(5 - b)(5 + b)$

Solución

a) $m^2 - 9$ b) $a^2 - 4$ c) $y^2 - 16$ d) $1 - t^2$ e) $9 - n^2$ f) $25 - b^2$

Indicador de logro

Resolver: $(2x - 1)(3x + 2)$

1. **Desarrollar el producto de la forma $(ax + b)(cx + d)$.**

   Ejemplo 2.8

   (10 min)

   * Desarrollar aplicando la propiedad distributiva.

   * Aclarar que el dibujo representa el producto $(ax + b)(cx + d)$.

   ¿Cuál es el resultado del área (1), (2) ,(3) y (4)?

   ¿Del área (2) y (3)? ¿Qué áreas tienen término común?

2. **Concluir el producto de la forma $(ax + b)(cx + d)$ con coeficiente distinto de 1.**

   (5 min)

   ¿Qué variable tienen en común los binomios? ¿Cómo son sus coeficientes?

3. **Desarrollar producto de la forma $(ax + b)(cx + d)$.**

   Ejemplo 2.9

   (10 min)

   * Confirmar los productos de la forma

   $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$

   Identifique los valores a, b, c y d; efectué las operaciones ac, bc, ad, bd.

   * Calcular los valores que van en la casilla.

4. **Resolver** **Ejercicio 2.5**

   (20 min)

   Solución

   a) $6x^2 + 7x + 2$

   b) $6x^2 + x - 2$

   c) $10x^2 - x - 21$

   d) $6y^2 - 6y - 12$

   e) $6x^2 - 18x + 12$

   f) $15m^2 + 4m - 4$

Unidad 1: Polinomios

Lección 2: (4/5) Productos notables

Sección 4: Producto de la forma $(ax + b)(cx + d)$

Objetivo: Desarrollar multiplicaciones de binomios con coeficientes de la variable diferente de 1.

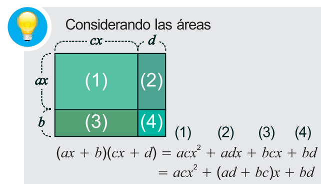
Sección 4: Producto de la forma $(ax + b)(cx + d)$

Ejemplo 2.8

Desarrolle $(ax + b)(cx + d)$.

Solución:

$$(ax + b)(cx + d) = ax(cx + d) + b(cx + d)$$
$$= acx^2 + adx + bcx + bd$$
$$= acx^2 + (ad + bc)x + bd$$



Desarrollo del producto

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

Producto de binomios desarrollado

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

Se conoce como **producto de binomios con coeficiente de la variable diferente de 1.**

Ejemplo 2.9

Encuentre el número que va en la casilla, utilizado el producto de binomios:

a) $(3x + 1)(2x + 4) = \square x^2 + \square x + \square$

b) $(3x - 2)(5x - 4) = \square x^2 + \square x + \square$

Solución:

a) $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$

$a = 3, b = 1, c = 2, d = 4$

$ac = 6$, $ad + bc = 14$, $bd = 4$ entonces,

$(3x + 1)(2x + 4) = \boxed{6}x^2 + \boxed{14}x + \boxed{4}$

$$(3x + 1)(2x + 4) = 6x^2 + (12 + 2)x + 4$$

b) $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$

$a = 3, b = -2, c = 5, d = -4$

$ac = 15$, $ad + bc = -22$, $bd = 8$ entonces,

$(3x - 2)(5x - 4) = \boxed{15}x^2 + \boxed{-22}x + \boxed{8}$

$= 15x^2 - 22x + 8$

Ejercicio 2.5 Desarrolle.

a) $(2x + 1)(3x + 2)$ b) $(3x + 2)(2x - 1)$ c) $(2x - 3)(5x + 7)$

d) $(3y + 3)(2y - 4)$ e) $(3x - 3)(2x - 4)$ f) $(5m - 2)(3m + 2)$

Ejercicios adicionales

Desarrolle.

a) $(4x - 1)(2x + 1)$ b) $(3m + 2)(6m + 3)$

c) $(5y - 3)(4y + 3)$ d) $(4n - 1)(3n - 2)$

Solución

a) $8x^2 + 2x - 1$ b) $18m^2 + 21m + 6$

c) $20y^2 + 3y - 9$ d) $12n^2 - 11n + 2$

*

Unidad 1: **Polinomios**

Lección 2: (5/5) Productos notables

Sección 5: Aplicación de los productos notables

Objetivos:
- Desarrollar multiplicaciones de polinomios aplicando productos notables.
- Aplicar los productos notables al cálculo numérico.

Sección 5: *Aplicación de los productos notables*

Ejemplo 2.10

Calcule $(x+2)^2 - (x+4)(x-1)$.

Solución:

$(x+2)^2 - (x+4)(x-1) = x^2 + 4x + 4 - (x^2 + 3x - 4)$ ... Por $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ y $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

$= x^2 + 4x + 4 - x^2 - 3x + 4$ ... Cambiar de signo $x^2 + 3x - 4$ para quitar paréntesis

$= x + 8$ ... Reducir términos semejantes

Ejercicio 2.6 Calcule.

a) $(2x-3)^2 + (2x-1)(4x+3)$ b) $2(x-2)^2 + (x+2)^2$

Ejemplo 2.11

Calcule $(2x-3)(x+4) - 2(x+1)(x-1)$.

Solución:

$(2x-3)(x+4) - 2(x+1)(x-1) = 2x^2 + 5x - 12 - 2(x^2 - 1)$ ... Por $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (bc+ad)x + bd$ y $(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$

$= 2x^2 + 5x - 12 - 2x^2 + 2$ ... Propiedad distributiva en $-2(x^2-1)$

$= 5x - 10$ ... Reducir términos semejantes

Ejercicio 2.7 Calcule.

a) $(x-2)(x+3) - (x-1)(x+1)$ b) $(x-1)(x+1) - (3x+1)(x+2)$

c) $(m+2)(m-2) + (m+1)(m+4)$

Ejemplo 2.12

Aplique los productos notables para el cálculo de números.

a) 95^2 b) 31×29

Solución:

a) $95^2 = (100-5)^2$
$= 100^2 - 2(100)(5) + 5^2$
$= 10000 - 1000 + 25$
$= 9025$

b) $31 \times 29 = (30+1)(30-1)$
$= 30^2 - 1^2$
$= 900 - 1$
$= 899$

Ejercicio 2.8 Calcule.

a) 19^2 b) 71×69

Libro del Estudiante - Matemáticas 9° grado

6. Resolver Ejercicio 2.8

(10 min)

Solución

a) $(20-1)^2 = 20^2 - 2(20)(1) + 1^2$
$= 400 - 40 + 1$
$= 361$

b) $(70+1)(70-1) = 70^2 - 1$
$= 4900 - 1$
$= 4899$

Indicador de logro

Resuelva $2(x-2)^2 + (x+2)^2$

1. Aplicar los productos notables en el desarrollo de operaciones combinadas.

Ejemplo 2.10

(5 min)

* En el caso de $(x+2)^2$, ¿qué producto notable es?, ¿cuál es su desarrollo?

¿Qué tipo de producto notable es $(x+4)(x-1)$?, ¿cuál es el resultado?

* Reducir los términos semejantes.

2. Resolver Ejercicio 2.6

(10 min)

Solución

a) $12x^2 - 10x + 6$

b) $3x^2 - 4x + 12$

3. Aplicar los productos notables en el desarrollo de operaciones combinadas.

Ejemplo 2.11

(5 min)

* Enfatizar en la aplicación de los productos notables.

4. Resolver Ejercicio 2.7

(8 min)

Solución

a) $x - 5$ b) $-2x^2 - 7x - 3$

c) $2m^2 + 5m$

5. Aplicar productos notables para el cálculo numérico.

Ejemplo 2.12

(7 min)

* En a), ¿pueden calcular 95^2 mentalmente?, ¿de qué otra manera podemos escribir 95^2 utilizando números cuyo cuadrado es fácil de calcular?, ¿Podemos aplicar algún producto notable a $(100-5)^2$?

* En b), ¿qué particularidad tienen 31 y 29?

* Observar que 31 = 30 + 1 y 29 = 30 -1, ¿se puede aplicar algún producto notable?

Indicador de logro

¿Cuáles de los siguientes polinomios esta expresado como una factorización?

a) $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

b) $x^2 - 6x + 5 = x(x - 6) + 5$

c) $x^2 - 2x = x(x - 2)$

d) $8x + 4 = (3x + 2) + (5x + 2)$

1. Establecer el concepto de factorización.

(20 min)

- Observar las figuras y calcular el área de cada una.
- Formar un rectángulo utilizando las 8 figuras.
- Identificar el largo y el ancho del rectángulo.
- Expresar el área del rectángulo.
- Comparar el área total calculada anteriormente con el área expresada.
- Concluir que el polinomio de $x^2 + 4x + 3$ es igual al producto de los polinomios $x + 3$ y $x + 1$.

2. Definir Factorizar

(5 min)

- Al proceso de expresar el polinomio $x^2 + 4x + 3$ como el producto de los polinomios $x + 3$ y $x + 1$ se le llama factorizar.
- Recalcar que $x + 3$ y $x + 1$ también se llaman factores de $x^2 + 4x + 3$.

3. Decidir si un polinomio está o no factorizado.

Ejemplo 3.1

(10 min)

4. Resolver Ejercicio 3.1

(10 min)

Solución

a) y c) están expresados como una factorización.

Unidad 1: Polinomios

Lección 3: (1/8) Factorización de polinomios

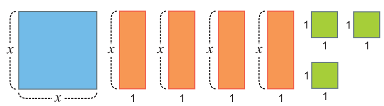
Sección 1: Factorización

Objetivo: Definir el proceso de factorización.

Lección 3: Factorización de polinomios

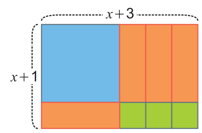
Sección 1: Factorización

Forme un rectángulo con las 8 figuras, considerando las medidas propuestas:



1 cuadrado con área: x^2
4 rectángulos, cada uno con área: $1 \times x = x$
3 cuadrados, cada uno con área: $1^2 = 1$

¿Cuánto mide el largo y el ancho? Exprese su área.



El largo mide: $x + 3$
El ancho mide: $x + 1$
El área es: $(x + 3)(x + 1)$

La suma de las 8 figuras es el área del rectángulo, es decir:

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)$$

Las expresiones $(x + 3)$ y $(x + 1)$ son los factores del polinomio $x^2 + 4x + 3$

Al proceso que consiste en expresar un polinomio como el producto de polinomios se llama **factorización.** Por ejemplo $x^2 + 4x + 3$ se factoriza como el producto $(x + 3)(x + 1)$; en este caso a cada uno de estos polinomios $x + 3$ y $x + 1$; se llaman **factores.**

$$\boxed{x^2 + 4x + 3} \underset{\text{Desarrollo}}{\overset{\text{Factorización}}{=}} \boxed{(x + 3)(x + 1)}$$

Ejemplo 3.1

¿Cuales de los siguientes polinomios están expresados como una factorización?

a) $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$ b) $x^2 + 8x + 7 = x(x + 8) + 7$

Solución:

a) El polinomio $x^2 - 5x + 6$ está expresado como el producto de los polinomios $x - 3$ y $x - 2$. Se puede decir que el polinomio $x^2 - 5x + 6$ esta factorizado como el producto de los factores $x - 3$ y $x - 2$.

b) El polinomio $x^2 + 8x + 7$ no esta expresado como el producto de polinomios, por que tiene un producto y una suma.

Respuesta: a)

Ejercicio 3.1 ¿Cuales de los siguientes polinomios están expresados como una factorización?

a) $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$ b) $x^2 - 6x + 5 = x(x - 6) + 5$

c) $x^2 - 2x = x(x - 2)$ d) $8x + 4 = (3x + 2) + (5x + 2)$

12

Unidad 1 - Polinomios

Ejercicios adicionales

¿Cuáles de los siguientes polinomios están expresados como una factorización?

a) $x^2 + 11x + 24 = (x + 8)(x + 3)$ b) $x^2 - 2x - 9 = x(x - 2) - 9$

Solución

a)

Unidad 1: Polinomios

Lección 3: (2/8) Factorización de polinomios

Sección 2: Factorización por factor común

Objetivo: Factorizar un polinomio por factor común y/o por agrupación.

Sección 2: Factorización por factor común

Ejemplo 3.2

Factorice $6x^2 + 3x$.

Solución:

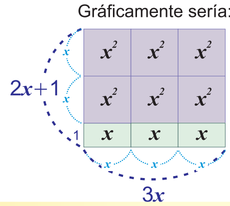
$6x^2$ puede expresarse como: $3x \times 2x$
$3x$ puede expresarse como: $3x \times 1$
El factor común de $6x^2$ y $3x$ es $3x$.

Por consiguiente:
$6x^2 + 3x = \boxed{3x} \times 2x + \boxed{3x} \times 1$
$= \boxed{3x}(2x + 1)$ ... Propiedad distributiva

Respuesta: $3x(2x + 1)$

El 1 es factor de todo término.
Por ejemplo: $3x = 1 \times 3 \times x$.
Generalmente el 1 no se escribe.

Gráficamente sería:



Factorizar por factor común es aplicar la propiedad distributiva.
Ejemplo: $Ax + Ay = A(x + y)$

Ejercicio 3.2 Factorice:

a) $ab + ac$　　b) $4ax - 2a$　　c) $2ax - 3ay$
d) $8a^2b + 4b^2$　　e) $a^2b - ab^2$　　f) $ax + bx + cx$

Ejemplo 3.3

Factorice $5ab + 5ac + 2b + 2c$.

Solución:

En algunas expresiones los términos pueden ser agrupados de manera que factorizando cada grupo tenga un factor común.

$5ab + 5ac + 2b + 2c = (5ab + 5ac) + (2b + 2c)$ …Agrupar términos de manera que tengan un factor común.
$= 5a(b + c) + 2(b + c)$ …Factorizar cada grupo.
$= 5aM + 2M$ ...Sustituir $b + c = M$
$= (5a + 2)M$ …Factorizar (Propiedad distributiva)
$= (5a + 2)(b + c)$ …Sustituir $M = b + c$

A veces nos es conveniente agrupar el primer término con el segundo y el tercero con el cuarto, como en el Ejemplo 3.3, en algunos casos es conveniente agrupar el primer término con el tercer término y el segundo con el cuarto y también el primero con el cuarto y el segundo con el tercero.

Procedimiento para factorizar por agrupación de términos
1. Agrupar términos de manera que tengan un factor común.
2. Factorizar cada grupo.
3. Aplicar la propiedad distributiva.

Ejercicio 3.3 Factorice:

a) $(2wx + 2wy) + (xy + y^2)$　　b) $3ac + 3ad + 2bc + 2bd$

Indicador de logro

Factorice ab - ac

1. Factorizar por factor común. Ejemplo 3.2
(10 min)

* El factor común de $6x^2$ y $3x$ es $3x$.
* Comparar el resultado con la gráfica del LE.
* Observar que las bases del rectángulo morado y verde miden igual, $3x$.
  ¿Cuál es el área de cada uno de los rectángulos?, ¿cuál es el factor que se repite en los términos del binomio?

2. Concluir factorización por factor común.
(5 min)

* Enfatizar que es la aplicación de la propiedad distributiva.

3. Resolver Ejercicio 3.2
(10 min)

Solución

a) $a(b + c)$　　b) $2a(2x - 1)$
c) $a(2x - 3y)$　　d) $4b(2a^2 + b)$
e) $ab(a - b)$　　f) $x(a + b + c)$

4. Factorizar agrupando términos. Ejemplo 3.3
(10 min)

* Identificar términos con factor común y agruparlos.
* Factorizar cada grupo.
* Sustituir el factor común de cada grupo por una letra M.
* Aplicar propiedad distributiva.

5. Resolver Ejercicio 3.3
(10 min)

Solución

a) $(2wx + 2wy) + (xy + y^2)$
$= 2w(x + y) + y(x + y)$
$= (2w + y)(x + y)$

b) $3ac + 3ad + 2bc + 2bd$
$= 3a(c + d) + 2b(c + d)$
$= (3a + 2b)(c + d)$

Indicador de logro

Factorice $x^2 + 3x + 2$

1. **Recordar el producto notable con variable común.**
   (2 min)
   * ¿Cuál es el desarrollo de $(x + a)(x + b)$?
   * Recordar el producto de binomios con término común.

2. **Factorizar trinomios por tanteo.** *Ejemplo* **3.4**
   (10 min)
   * Indicar que el polinomio $x^2 + 5x + 6$ tiene la forma $x^2 + (a + b)x + ab$.
   * Encontrar todos los pares de números cuyo producto es 6.
   * Elaborar una tabla que contenga los dos números enteros, su producto y la suma de ambos, ¿cuál de estos dos números observados en la tabla cumple la condición que la suma es 5?
   * Concluir que este tipo de factorización se llama factorización por tanteo.
   * Aclarar que tanteo significa probar.

2. **Resolver** *Ejercicio* **3.4**
   (5 min)
   Solución
   a) $(x + 1)(x + 2)$
   b) $(x + 1)(x + 6)$
   c) $(x + 2)(x + 6)$
   d) $(x + 3)(x + 5)$

Unidad 1: **Polinomios**

Lección 3: (3/8) Factorización de polinomios

Sección 3: Factorización por tanteo

Objetivo: Factorizar trinomios por tanteo.

Sección 3: Factorización por tanteo

Vamos a usar el producto de dos binomios con un término común en sentido contrario.

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

Ejemplo **3.4**

Factorice $x^2 + 5x + 6$.

Solución:

Como $x^2 + 5x + 6$ es el producto de los factores de la forma $(x + a)(x + b)$ y este es un producto notable que su desarrollo es $x^2 + (a + b)x + ab$.
Entonces para factorizar $x^2 + 5x + 6$ como el producto de dos factores, hay que buscar dos números a y b que su suma sea 5 y su producto es 6. Desarrollemos los siguientes pasos:

1) Busque dos números enteros que el producto es 6, es decir $ab = 6$.
   1 y 6 porque $(1)(6) = 6$. (-1) y (-6) porque $(-1)(-6) = 6$.
   2 y 3 porque $(2)(3) = 6$. (-2) y (-3) porque $(-2)(-3) = 6$.
2) Ahora calcule la suma de los pares de números enteros que se encontraron en el paso 1) determinar cuál par suma 5, es decir $a + b = 5$. Elabore la siguiente tabla:

Dos números enteros	Producto	Suma	
1, 6	$(1)(6) = 6$	$1 + 6 = 7$	X
−2, −3	$(-2)(-3) = 6$	$(-2) + (-3) = -5$	X
−1, −6	$(-1)(-6) = 6$	$(-1) + (-6) = -7$	X
2, 3	$(2)(3) = 6$	$2 + 3 = 5$	✓

Entonces los números que se buscan son 2 y 3, por lo tanto $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$

$x^2 + 5x + 6$
$= x^2 + (2 + 3)x + (2)(3)$
$= (x + 2)(x + 3)$

$x^2 + (a + b)x + ab$
$= (x + a)(x + b)$

Respuesta: $(x + 2)(x + 3)$

A este tipo de factorización se le llama **factorización por tanteo**.

Ejercicio **3.4** Factorice.

a) $x^2 + 3x + 2$ b) $x^2 + 7x + 6$

c) $x^2 + 8x + 12$ d) $x^2 + 8x + 15$

14
Unidad 1 - Polinomios

Ejercicios adicionales

Factorice.
a) $x^2 + 7x + 10$ b) $x^2 + 10x + 9$ c) $x^2 + 9x + 14$ d) $x^2 + 9x + 20$

Solución

a) $(x + 5)(x + 2)$ b) $(x + 9)(x + 1)$ c) $(x + 7)(x + 2)$ d) $(x + 5)(x + 4)$

continúa en la siguiente página...

Unidad 1: **Polinomios**

Lección 3: (3/8) Factorización de polinomios

Sección 3: Factorización por tanteo

Objetivo: Factorizar trinomios por tanteo.

Ejemplo 3.5

Factorice $x^2 - 5x + 6$.

Solución:

En este ejemplo hay que buscar dos números que sumados den −5 y el producto de ambos sea 6.
Analicemos esas posibilidades.

Dos números enteros	Producto	Suma	
1, 6	$(1)(6) = 6$	$1 + 6 = 7$	X
2, 3	$(2)(3) = 6$	$2 + 3 = 5$	X
−1,−6	$(-1)(-6) = 6$	$(-1) + (-6) = -7$	X
−2, −3	$(-2)(-3) = 6$	$(-2) + (-3) = -5$	✓

Como el producto debe ser 6 positivo, entonces ambos números deben ser positivos o negativos.
$(+)(+) = +$, $(-)(-) = +$

Entonces −2 y −3 son los números que se buscaba.
Por tanto: $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$

$x^2 - 5x + 6 = x^2 + [(-2) + (-3)]x + (-2)(-3)$
$= (x - 3)(x - 2)$

Respuesta: $(x - 3)(x - 2)$

Ejercicio 3.5 Factorice.

a) $x^2 - 4x + 3$ b) $x^2 - 8x + 7$ c) $x^2 - 9x + 18$ d) $x^2 - 10x + 16$

Ejemplo 3.6

Factorice $x^2 - 5x - 6$.

Solución:

Entonces para factorizar $x^2 - 5x - 6$ hay que buscar dos números cuya suma sea −5 y su producto −6. Además nótese que siendo la suma negativa, el número de mayor valor absoluto ha de ser negativo.

Analicemos las posibilidades.

Dos números enteros	Producto	Suma	
(−1) y (+6)	$(-1)(6) = -6$	$-1 + 6 = 5$	X
(−2) y (+3)	$(-2)(3) = -6$	$-2 + 3 = 1$	X
(+1) y (−6)	$(1)(-6) = -6$	$1 + (-6) = -5$	✓
(+2) y (−3)	$(2)(-3) = -6$	$2 + (-3) = -1$	X

El producto debe ser −6 entonces ambos números deben tener diferente signo.
$(+)(-) = -$
$(-)(+) = -$

Entonces 1 y −6 son los números que buscaba.
Por tanto: $x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x - 6)$

$x^2 - 5x - 6 = x^2 + [1 + (-6)]x + (1)(-6)$
$= (x + 1)(x - 6)$

Respuesta: $(x + 1)(x - 6)$

Ejercicio 3.6 Factorice.

a) $x^2 - 2x - 3$ b) $x^2 - x - 6$ c) $x^2 - 3x - 10$ d) $x^2 - 2x - 35$

15

Libro del Estudiante - Matemáticas 9° grado

Indicador de logro

Factorice $x^2 + 3x + 2$

4. Factorizar por tanteo.

Ejemplo 3.5

(8 min)

* ¿Cuál es la diferencia con el **Ejemplo 3.4**?
* Elaborar una tabla como en el **Ejemplo 3.4** donde contenga las posibilidades que el producto de dos números enteros sea 6 y que la suma de ambos números sea -5.
* ¿Qué números cumplen la condición?, ¿cuál es ese resultado?.

5. Resolver **Ejercicio 3.5**

(7 min)

Solución

a) $(x - 3)(x - 1)$
b) $(x - 7)(x - 1)$
c) $(x - 6)(x - 3)$
d) $(x - 8)(x - 2)$

6. Factorizar por tanteo.

Ejemplo 3.6

(8 min)

* ¿Cuál es la diferencia de este ejemplo con el **Ejemplo 3.5**?
* Pídales que sigan los pasos del **Ejemplo 3.5**
* Determinar dos números tales que multiplicados den -6 y al sumarlos resulte -5.

7. Resolver **Ejercicio 3.6**

(5 min)

Solución

a) $(x - 3)(x + 1)$
b) $(x - 3)(x + 2)$
c) $(x - 5)(x + 2)$
d) $(x - 7)(x + 5)$

Ejercicios adicionales

Factorice.

a) $x^2 - 12x + 35$ b) $x^2 - 3x - 4$ c) $x^2 - 4x - 12$ d) $x^2 + x - 12$

Solución

a) $(x - 7)(x - 5)$ b) $(x - 4)(x + 1)$ c) $(x - 6)(x + 2)$ d) $(x + 4)(x - 3)$

Indicador de logro

Factorice $x^2 + 2x + 1$

1. **Recordar el cuadrado de la suma y cuadrado de la diferencia.**

   (5 min)

   ¿Cuál es el desarrollo de $(x + a)^2$ y $(x - a)^2$?

   ¿Cuál es la diferencia entre ambos desarrollos?

2. **Factorizar trinomios con coeficiente $x^2 = 1$.**

   Ejemplo 3.7

   (10 min)

* Buscar dos números enteros cuyo producto es 16 y que su suma sea 8, ¿cuáles son esos números?
* Identificar si el primer y tercer término tienen raíces cuadradas exactas.
* Identificar si el segundo término es el doble del producto de las raíces del primer y tercer término.
* Indicar que el resultado es un binomio con las raíces del primer y tercer término con el signo del segundo término.
* Concluir que este tipo de polinomios se les conoce como trinomio cuadrado perfecto.
* ¿Cómo se le llama a este tipo de factorización?
* Se puede confirmar la factorización usando tanteo.

3. **Resolver** Ejercicio 3.7

   (10 min)

   Solución

   a) $(x + 1)^2$ b) $(x - 2)^2$

   c) $(x + 7)^2$ d) $(x - 6)^2$

   e) $(x + 6)^2$ f) $(a - 5)^2$

4. **Factorizar trinomios con coeficiente principal distinto de 1.** Ejemplo 3.8

   (5 min)

* ¿Cuál es la diferencia de este ejemplo con los ejemplos anteriores?
* Observe el polinomio, ¿cuál es la raíz cuadrada de ambos términos?

Unidad 1: **Polinomios**

Lección 3: (4/8) Factorización de polinomios

Sección 4: Factorización de un trinomio cuadrado perfecto

Objetivo: Factorizar trinomios cuadrados perfectos.

Sección 4: Factorización de trinomio cuadrado perfecto

Vamos a usar el producto notable en sentido contrario.

$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$ y $x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$

Observe que:

En el primer trinomio, el segundo término es: $2ax$

En el segundo trinomio, el segundo término es: $-2ax$

Ejemplo 3.7

Factorice.

a) $x^2 + 8x + 16$ b) $x^2 - 6x + 9$

Solución:

a) Para factorizar $x^2 + 8x + 16$, observe que los términos x^2 y 16 son cuadrados perfectos.
Y el doble de la raíz del 3er término por la raíz del 1er término es igual a $8x$.

Entonces $x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2(4)x + (4)^2$

$= (x + 4)^2$

Puede utilizar lo visto en la clase anterior, buscar dos números cuya suma sea 8 y su producto 16, es decir, $a + b = 8$ y $ab = 16$.

$$x^2 + 8x + 16 = x^2 + (4 + 4)x + (4)(4)$$
$$= (x + 4)(x + 4)$$
$$= (x + 4)^2$$

La factorización resulta el cuadrado de un binomio $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

b) $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2(3)x + (3)^2$

$= (x - 3)^2$

La factorización resulta el cuadrado de un binomio $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

A este tipo de factorización se le llama factorización de **trinomio cuadrado perfecto.**

Ejercicio 3.7 Factorice.

a) $x^2 + 2x + 1$ b) $x^2 - 4x + 4$ c) $x^2 + 14x + 49$

d) $x^2 - 12x + 36$ e) $x^2 + 12x + 36$ f) $a^2 - 10a + 25$

Ejemplo 3.8

Factorice $9x^2 - 30x + 25$.

Solución:

$9x^2 - 30x + 25 = (3x)^2 - 2(3x)(5) + (5)^2$

$= (3x - 5)^2$

$9x^2 - 30x + 25$
$= (3x)^2 - 2(3x)(5) + (5)^2$
$= (3x - 5)^2$

$a^2 - 2ab + b^2$
$= (a - b)^2$

Ejercicio 3.8 Factorice.

a) $4x^2 - 12x + 9$ b) $16x^2 + 40x + 25$ c) $25m^2 + 20m + 4$

d) $9a^2 - 6ab + b^2$ e) $4t^2 - 20t + 25$ f) $16x^2 - 24x + 9$

16 Unidad 1 - Polinomios

* Entonces el producto de las raíces cuadradas, ¿qué relación tiene con el segundo término del polinomio?
* Hay que enfatizar que el segundo término es el doble del producto de ambas raíces.
* ¿Cuál es la factorización resultante?

5. **Resolver** Ejercicio 3.8 (15 min)

   Solución

a) $(2x - 3)^2$ b) $(4x + 5)^2$ c) $(5m + 2)^2$ d) $(3a - b)^2$ e) $(2t - 5)^2$ f) $(4x - 3)^2$

Unidad 1: Polinomios

Lección 3: (5/8) Factorización de polinomios

Sección 5: Factorización de diferencia de cuadrados

Objetivo: Factorizar diferencia de cuadrados.

Sección 5: Factorización de diferencia de cuadrados

Vamos a usar el producto de la forma $(x + a)(x - a)$ en sentido contrario.

$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$ Una **diferencia de cuadrados** tiene como factores $x + a$ y $x - a$.

Ejemplo 3.9

Factorice $x^2 - 9$.

Solución:

$x^2 - 9 = x^2 - (3)^2$
$= (x + 3)(x - 3)$

$x^2 - 9$	
$= x^2 - (3)^2$	$x^2 - a^2$
$= (x + 3)(x - 3)$	$= (x + a)(x - a)$

Ejercicio 3.9 Factorice.

a) $x^2 - 16$ b) $x^2 - 1$ c) $a^2 - 4$
d) $t^2 - 81$ e) $a^2 - 49$ f) $m^2 - 25$

Ejemplo 3.10

Factorice.

a) $9a^2 - 16$ b) $4x^2 - 9y^2$

Solución:

a) $9a^2 - 16 = (3a)^2 - (4)^2$
$= (3a + 4)(3a - 4)$

b) $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2$
$= (2x + 3y)(2x - 3y)$

Ejercicio 3.10 Factorice.

a) $4x^2 - 25$ b) $9x^2 - 1$ c) $16m^2 - 9$
d) $100a^2 - 4b^2$ e) $49x^2 - 36y^2$

17

Libro del Estudiante - Matemáticas 9° grado

Indicador de logro

Factorice x^2 - 16

1. **Recordar el producto de la forma $(x + a)(x - a)$.**
   (5 min)

2. **Factorizar una diferencia de cuadrados.** Ejemplo 3.9
   (5 min)

* Los términos de x^2 - 9, ¿son cuadrados perfectos?
* Expresar la factorización del polinomio.
* Concluir que una diferencia de cuadrados se puede factorizar como un producto de la forma $(x + a)(x - a)$.

3. **Resolver** Ejercicio 3.9
   (15 min)

Solución

a) $(x + 4)(x - 4)$ b) $(x + 1)(x - 1)$
c) $(a + 2)(a - 2)$ d) $(t + 9)(t - 9)$
e) $(a + 7)(a - 7)$ f) $(m + 5)(m - 5)$

4. **Factorizar una diferencia de cuadrados cuando el coeficiente principal es distinto de 1.** Ejemplo 3.10
   (5 min)

* ¿Cuál es la diferencia de este ejemplo con el anterior?
* Como ambos términos son cuadrados perfectos exprese como un producto de dos binomios.
* ¿Cuál es su factorización?

5. **Resolver** Ejercicio 3.10
   (15 min)

Solución

a) $(2x + 5)(2x - 5)$
b) $(3x + 1)(3x - 1)$
c) $(4m + 3)(4m - 3)$
d) $(10a + 2b)(10 - 2b)$
e) $(7x + 6y)(7x - 6y)$

Indicador de logro

Factorice $2x^2 + x - 3$

1. **Recordar el producto notable de la forma $(ax + b)(cx + d)$.**
   (5 min)

2. **Factorizar el trinomio**

   Ejemplo 3.11
   (20 min)

* Seguir los pasos mostrados en el LE.

* Es importante probar con factores pares el coeficiente principal y el coeficiente constante.

* Asegurarse que los productos cruzados al sumarlos dan el segundo término del trinomio.

Unidad 1: Polinomios

Lección 3: (6/8) Factorización de polinomios

Sección 6: Factorización por tanteo compuesto

Objetivo: Factorizar trinomios con coeficiente principal distinto de uno usando tanteo compuesto.

Sección 6: Factorización por tanteo compuesto

Vamos a usar el producto de dos binomios con coeficiente de x^2 diferente de 1, en sentido contrario.

$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$

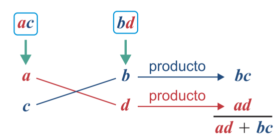
Ejemplo 3.11

Factorice $2x^2 - x - 3$.

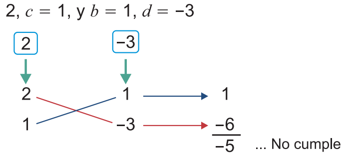
Solución:

Comparando $2x^2 - x - 3$ y $acx^2 + (ad + bc)x + bd$, vamos a buscar los números a, b, c y d que cumplen $ac = 2$, $ad + bc = -1$, $bd = -3$ siguiendo los pasos:

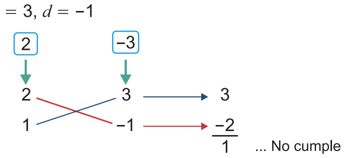
1. Encontrar pares de números enteros a y c de manera que se cumplan $ac = 2$.
   Sea $a > 0$ y $c > 0$, los pares de números son: $a = 1$ y $c = 2$, $a = 2$ y $c = 1$
2. Encontrar pares de números enteros b y d que se cumplan $bd = -3$, estos son:
   $b = 1$ y $d = -3$, $b = 3$ y $d = -1$, $b = -1$ y $d = 3$, $b = -3$ y $d = 1$
3. Encontrar los pares a, b, c y d de las opciones de los pasos 1 y 2 que cumplan $ad + bc = -1$ utilizando el cálculo de la siguiente forma.



Por ejemplo, cuando $a = 2$, $c = 1$, y $b = 1$, $d = -3$



Cuando $a = 2$, $c = 1$, y $b = 3$, $d = -1$



continúa en la siguiente página...

Unidad 1: **Polinomios**

Lección 3: (6/8) Factorización de polinomios

Sección 6: Factorización por tanteo compuesto

Objetivo: Factorizar polinomios con coeficiente principal distinto de uno usando tanteo compuesto.

Cuando $a = 1$, $c = 2$, y $b = 1$, $d = -3$

$\boxed{2}$ $\boxed{-3}$

1 ↘↗ 1 → 2

2 ↗↘ −3 → −3

−1 ... Sí, cumple

Entonces puede concluir que cuando $a = 1$, $c = 2$, y $b = 1$, $d = -3$, $ad + bc = -1$ se cumple

$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$

Por lo tanto $2x^2 - x - 3 = (x + 1)(2x - 3)$

Respuesta: $(x + 1)(2x - 3)$

Para factorizar un polinomio de la forma: $acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$ se buscan los números a, b, c y d de manera que cumplan lo siguiente:

$\boxed{ac}$ $\boxed{bd}$

a ↘↗ b →producto→ bc

c ↗↘ d →producto→ ad Suma

$ad + bc$

Ejercicio 3.11 Factorice.

a) $2x^2 + x - 3$

b) $3x^2 - 5x + 2$

c) $2x^2 + 5x + 3$

d) $3x^2 - 4x - 4$

19

Libro del Estudiante - Matemáticas 9° grado

Indicador de logro

Factorice $2x^2 + x - 3$

* Observar que cuando $a = 1$, $c = 2$ y $b = 1$, $d = -3$ se cumple $acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$

3. Resumir los pasos para factorizar trinomios por tanteo compuesto.

(5 min)

* Escriba en la pizarra y explique.

4. Resolver **Ejercicio 3.11**

(15 min)

Solución

a) $\boxed{2}$ $\boxed{-3}$

1 ↘↗ −1 → −2

2 ↗↘ 3 → 3

1

Respuesta: $(x - 1)(2x + 3)$

b) $\boxed{3}$ $\boxed{2}$

1 ↘↗ −1 → −3

3 ↗↘ −2 → −2

−5

Respuesta: $(x - 1)(3x - 2)$

c) $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

1 ↘↗ 1 → 2

2 ↗↘ 3 → 3

5

Respuesta: $(x + 1)(2x + 3)$

d) $\boxed{3}$ $\boxed{-4}$

1 ↘↗ −2 → −6

3 ↗↘ 2 → 2

−4

Respuesta: $(x - 2)(3x + 2)$

Indicador de logro

Factorice $5ax^2 + 40ax + 60a$

1. Factorizar utilizando varios tipos de factorización.

Ejemplo 3.12

(20 min)

* En el inciso a), ¿qué tipo de factorización podemos usar?
* Encontrar el factor común y factorice.

  ¿Se puede factorizar el trinomio que queda dentro del paréntesis?, ¿qué tipo de factorización podemos utilizar?
* En la parte no común, ¿qué tipo de factorización podemos usar?
* ¿Cuál es el resultado que obtuvo?
* En el inciso b), desarrolle igual manera que el inciso a)
* En el inciso c), exprese los dos términos en potencias cuadradas.
* Recordar la factorización por diferencia de cuadrados. ¿Cuál es su resultado?
* ¿Se puede factorizar la suma de cuadrados?
* Entonces como queda la factorización.

2. Resolver Ejercicio 3.12

(25 min)

Solución

a) $5a(x + 6)(x + 2)$

b) $3y(x + 3)(x - 2)$

c) $2y(x + 6)^2$

d) $3m(x + 7)^2$

Unidad 1: **Polinomios**

Lección 3: (7/8) Factorización de polinomios

Sección 7: Factorización de un polinomio varias veces

Objetivo: Factorizar utilizando varios tipos de factorización.

Sección 7: Factorización de un polinomio varias veces

Ejemplo 3.12

Factorice.

a) $2ax^2 + 10ax + 12a$

b) $3mx^2 - 30mx + 75m$

c) $x^4 - 81$

Debe identificar y agrupar términos que tengan un factor en común.

Solución:

a) $2ax^2 + 10ax + 12a = 2a(x^2 + 5x + 6)$ ... Por factor común

$= 2a(x + 2)(x + 3)$ ... Por tanteo

b) $3mx^2 - 30mx + 75m = 3m(x^2 - 10x + 25)$ ... Por factor común

$= 3m(x - 5)^2$ ... Por trinomio cuadrado perfecto

c) $x^4 - 81 = (x^2)^2 - 9^2$

$= (x^2 - 9)(x^2 + 9)$ ...Por diferencia de cuadrados

$= (x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)$ ... Por diferencia de cuadrados

$x^2 + 9$ no es factorizable.

Ejercicio 3.12 Factorice:

a) $5ax^2 + 40ax + 60a$

b) $3x^2y + 3xy - 18y$

c) $2x^2y + 24xy + 72y$

d) $3mx^2 + 42mx + 147m$

20 Unidad 1 - Polinomios

Ejercicios adicionales

Factorizar:

a) $7x^2y - 7xy - 84y$

b) $6ax^2 + 10ax - 4a$

c) $12a^2b - 12ab + 3b$

Solución

a) $7y(x + 3)(x - 4)$ b) $2a(3x - 1)(x + 2)$ c) $3b(2a - 1)^2$

Unidad 1: Polinomios

Lección 3: (8/8) Factorización de polinomios

Sección 8: Aplicación de la factorización

Objetivo: Resolver ejercicios de aplicación usando la factorización.

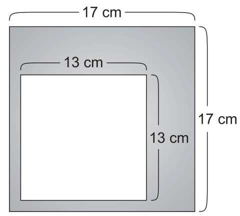
Indicador de logro

Explique por qué la suma de dos números pares es par.

Sección 8: Aplicación de la factorización

Ejemplo 3.13

Encuentre el área de la parte sombreada de la figura de la derecha.

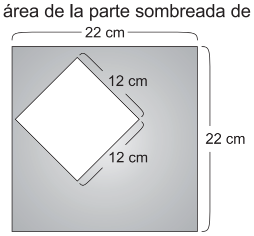


Solución:
El área de la parte sombreada es igual a la del cuadrado grande menos la del cuadrado pequeño. Entonces

$17^2 - 13^2 = (17 + 13)(17 - 13)$ ... Diferencia de cuadrados
$= (30)(4)$
$= 120$

Respuesta: 120 cm^2

Ejercicio 3.13 Encuentre el área de la parte sombreada de la siguiente figura.



Ejemplo 3.14

Explique por qué la suma de dos números impares es par.

Solución:
Sea x y y dos números enteros.
$2x$ y $2y$ son números pares porque son múltiplos de 2.
Entonces $2x + 1$ y $2y + 1$ son números impares.
La suma de estos números es:

$(2x + 1) + (2y + 1) = 2x + 2y + 2$
$= 2(x + y + 1)$
$= 2M$ ... Sustituir $x + y + 1 = M$

x y y son números enteros así que $x + y + 1$ también es un número entero. Por lo tanto M es un número entero. Entonces $2M$ expresa un número par.
O sea, la suma de dos números impares es par.

Ejercicio 3.14 Explique por qué la suma de dos números pares es par.

21

Libro del Estudiante - Matemáticas 9° grado

Entonces la suma de ellos, $2x + 2y = 2(x + y)$ …sustituir $(x + y) = Q$
$= 2Q$

x y y son números enteros. Entonces $x + y$ también es número entero.
Por lo tanto Q es un numero entero.
Entonces 2Q expresa un numero par.
O sea, la suma de dos números pares es par.

1. **Aplicar la factorización para resolver problemas.**
   Ejemplo 3.13
   (13 min)
   - * Hay que recordar que el área del cuadrado es lado × lado

     ¿Cómo encuentra el área de la parte sombreada?
   - * Indicar que el área del cuadrado mayor menos el área del cuadrado menor es igual a la parte sombreada entonces $17^2 - 13^2$.
   - * Factorizar la diferencia de cuadrados.

2. **Resolver** **Ejercicio 3.13**
   (7 min)
   Solución
   $22^2 - 12^2 = (22 + 12)(22 - 12)$
   $= (34)(10)$
   $= 340$
   Respuesta: área es 340 cm^2

3. **Probar una proposición factorizada.** **Ejemplo 3.14**
   (15 min)
   ¿Cuándo dos números son pares?
   - * Si x y y son dos enteros indicar que $2x$ y $2y$ son números pares.

     ¿Qué números son impares?
     ¿$2x + 1$ y $2y + 1$ son impares?
     ¿qué tipo de número es $2M$?
   - * Concluir que la suma de dos números impares es par.

4. **Resolver** **Ejercicio 3.14**
   (10 min)
   Solución
   Sea x y y esos números enteros.
   $2x$ y $2y$ se expresan como números pares porque son múltiplos de 2.

1 Polinomio por monomio.
Solución

a) $-10m^2 + 12mt$

b) $54x^2 - 18x$

c) $3x - 4$

d) $6x - 12y$

2 Polinomio por polinomio.
Solución

a) $xy + 6x + 5y + 30$

b) $mp + 8m - 3p - 24$

c) $12a^2 - 16ab - 3b^2$

d) $2x^2 - xy - x - 6y^2 + 2y$

3 Valor numérico
Solución

a) -52   b) -11

4 Desarrolle.
Solución

a) $m^2 - 4m - 21$

b) $y^2 - 2y - 15$

c) $x^2 + 16x + 64$

d) $x^2 - 16x + 64$

e) $x^2 - 36$

f) $x^2 - 81$

g) $6x^2 + 4x - 2$

h) $3x^2 - 3x - 6$

5 Productos notables.
Solución

a) 6391   b) 1599

c) 10404   d) 9801

6 Factorice.
Solución

a) $a(x + y)$

b) $3x(x - 2)$

c) $(a - 1)(a - 3)$

d) $(m + 2)(m + 6)$

e) $(x - 3)^2$

f) $(2m - 3)^2$

g) $(a + 10)(a - 10)$

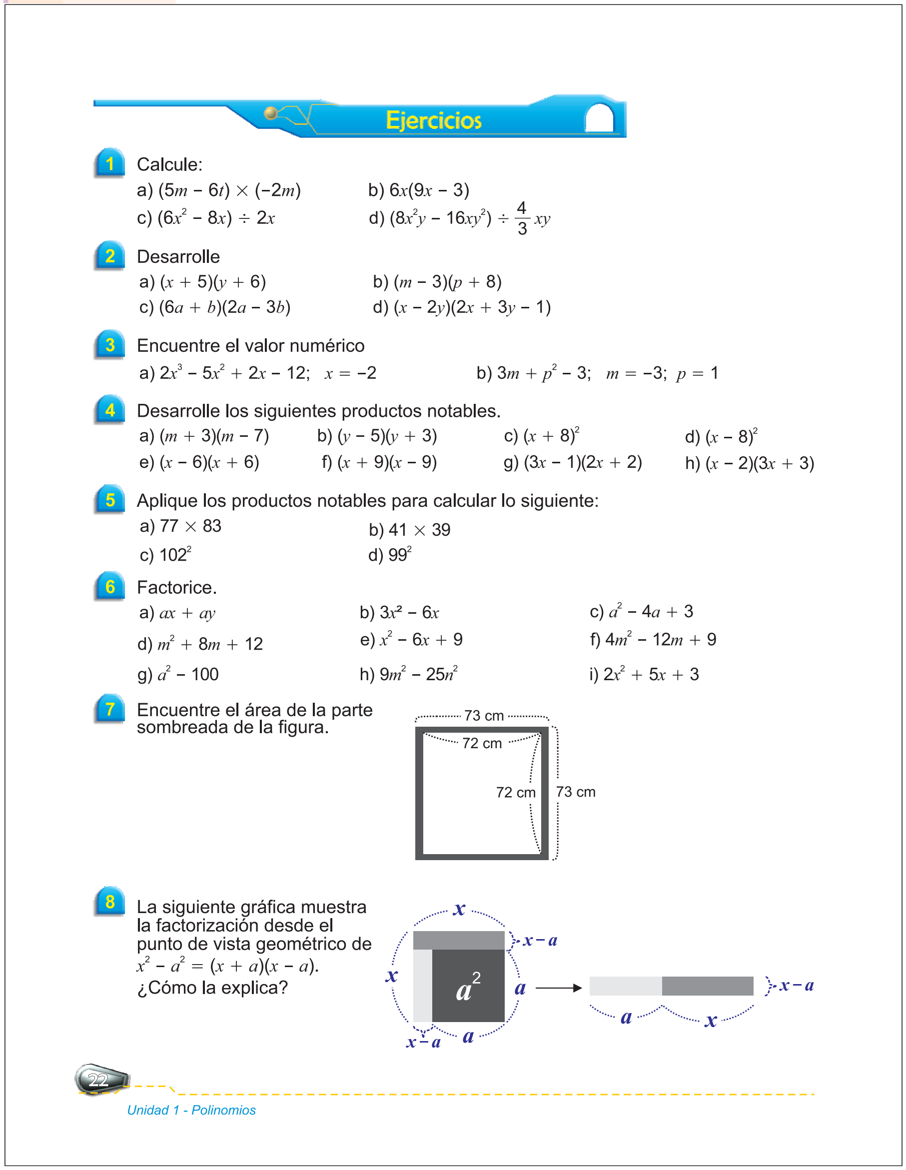
h) $(3m + 5n)(3m - 5n)$

i) $(x + 1)(2x + 3)$

Unidad 1: Polinomios

(1/1) Ejercicios de la unidad

Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre los polinomios.



Ejercicios

1 Calcule:
a) $(5m - 6t) \times (-2m)$ b) $6x(9x - 3)$
c) $(6x^2 - 8x) \div 2x$ d) $(8x^2y - 16xy^2) \div \frac{4}{3}xy$

2 Desarrolle
a) $(x + 5)(y + 6)$ b) $(m - 3)(p + 8)$
c) $(6a + b)(2a - 3b)$ d) $(x - 2y)(2x + 3y - 1)$

3 Encuentre el valor numérico
a) $2x^3 - 5x^2 + 2x - 12;\ x = -2$ b) $3m + p^2 - 3;\ m = -3;\ p = 1$

4 Desarrolle los siguientes productos notables.
a) $(m + 3)(m - 7)$ b) $(y - 5)(y + 3)$ c) $(x + 8)^2$ d) $(x - 8)^2$
e) $(x - 6)(x + 6)$ f) $(x + 9)(x - 9)$ g) $(3x - 1)(2x + 2)$ h) $(x - 2)(3x + 3)$

5 Aplique los productos notables para calcular lo siguiente:
a) 77×83 b) 41×39
c) 102^2 d) 99^2

6 Factorice.
a) $ax + ay$ b) $3x^2 - 6x$ c) $a^2 - 4a + 3$
d) $m^2 + 8m + 12$ e) $x^2 - 6x + 9$ f) $4m^2 - 12m + 9$
g) $a^2 - 100$ h) $9m^2 - 25n^2$ i) $2x^2 + 5x + 3$

7 Encuentre el área de la parte sombreada de la figura.

8 La siguiente gráfica muestra la factorización desde el punto de vista geométrico de $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$.
¿Cómo la explica?

22 Unidad 1 - Polinomios

7 Solución

$$73^2 - 72^2 = (73 + 72)(73 - 72)$$
$$= (145)(1)$$
$$= 145$$

Respuesta: 145 cm²

8 Explica:

El área del cuadrado del lado x menos el área del cuadrado del lado a es el igual al área de los dos rectángulos.

Unidad 2
Números reales

Unidad 2

Números reales

(24 horas)

1 Expectativas de logro

- Conocen el concepto de números irracionales y reales.
- Identifican problemas de la vida real que requieren de la radicación cuadrada y cúbica para su solución.
- Usan aproximaciones a los números reales para resolver problemas.
- Dominan la calculadora para resolver problemas de la radicación.
- Identifican situaciones en la vida real que se puedan describir como potencias de números.

2 Relación y desarrollo

Séptimo grado

Números positivos y negativos

- Uso de números positivos y negativos
- Representación gráfica
- Relación de orden
- Valor absoluto
- Adición de números con igual y diferente signo
- Propiedad conmutativa y asociativa de la adición
- Sustracción
- Multiplicación
- Propiedad conmutativa y asociativa de la multiplicación
- División
- Conversión de fracciones a decimales
- Recíproco
- Potencias
- Operaciones combinadas
- Propiedad distributiva
- Aplicación de los números positivos y negativos

Razón, proporcionalidad y porcentaje

- Razón y razón inversa
- Proporcionalidad directa
- Proporcionalidad inversa
- Aplicación de la proporcionalidad
- Porcentaje

Octavo grado

Noveno grado

Números reales

- Raíz cuadrada
- Relación de orden con raíces cuadradas
- Números irracionales
- Números reales
- Multiplicación y división de raíces cuadradas
- Simplificación de raíces cuadradas
- Multiplicación y división de raíces cuadradas utilizando simplificación
- Racionalización
- Suma y resta de raíces cuadradas
- Suma y resta de raíces cuadradas utilizando simplificación
- Suma y resta de raíces cuadradas utilizando racionalización
- Propiedad distributiva en expresiones con raíces cuadradas
- Operaciones con raíces cuadradas

3 Plan de estudio (24 horas)

Lección	Distribución de horas	Contenidos
1. Raíces cuadradas (3 horas)	1~2/3	• Raíz cuadrada
	3/3	• Relación de orden con raíces cuadradas
2. Números Irracionales (1 hora)	1/1	• Definición de números irracionales y representación gráfica de números irracionales
3. Números reales (1 hora)	1/1	• Definición de números reales y representación gráfica de números reales
4. Operaciones con raíces cuadradas (17 horas)	1~2/17	• Multiplicación y división de raíces cuadradas
	3/17	• Expresión de raíces en la forma $a\sqrt{b}$
	4/17	• Simplificación de raíces cuadradas
	5~7/17	• Multiplicación y división de raíces cuadradas utilizando simplificación
	8/17	• Racionalización
	9~14/17	• Suma y resta de raíces cuadradas
	15/17	• Propiedad distributiva en expresiones con raíces cuadradas
	16~17/17	• Operaciones con raíces cuadradas
Ejercicios (2 horas)	1~2/2	

4 Puntos de lección

Análisis de las pruebas diagnósticas 2016 y 2017

Un tema importante de esta unidad es aprender el concepto de raíz cuadrada sin embargo este no resulta fácil de comprender para los estudiantes.

[Pregunta] Efectúe la operación
$\sqrt{2} \times \sqrt{18}$.

Institutos: 46% CEB: 24% (2017)

La respuesta es 6 (y también $\sqrt{36}$ en esta pregunta). Aunque la mayoría de los estudiantes pueden calcular 2 × 18, cuando se tiene $\sqrt{}$, no lo pueden resolver.

[Pregunta] Simplifique $\sqrt{18}$.

Institutos: 8% CEB: 1% (2017)

Si no comprenden el significado de $\sqrt{}$, los estudiantes tendrán dificultades al simplificar raíces.

Los conocimientos de raíz cuadrada son muy importantes para tratar Ecuaciones de Segundo Grado (la unidad 3 de noveno grado), Teorema de Pitágoras (la unidad 5 de noveno grado) y las matemáticas de la Educación Media.

Es necesario enseñar los conocimientos básicos utilizando números sencillos.

Lección 1: Raíces cuadradas

Sección 1: Aproximación de la raíz cuadrada

En 5to grado los estudiantes aprendieron los conceptos de potenciación y radicación. De este último tema se estudiaron sólo las raíces cuadradas exactas en el número positivo por lo que conocieron como la raíz cuadrada de un número únicamente la raíz positiva.

En esta lección primeramente se trata de encontrar una aproximación de la raíz cuadrada de un número, comparando números que elevados al exponente dos se aproximen al número que está en la raíz es decir, si se quiere aproximar la raíz cuadrada de 5 entonces se puede comparar $2^2 < 5 < 3^2$ luego se van buscando números decimales que se acerquen más a 5: $2.2^2 < 5 < 2.3^2$ ya asi se comparan más valores hasta obtener una aproximación de la raíz cuadrada de 5 como 2.23606797…

Luego de que se obtiene la aproximación se introduce el uso del símbolo $\sqrt{\ }$ para representar la raíz cuadrada de un número, se utiliza la calculadora para comprobar y encontrar aproximaciones de raíces.

Sección 2: Definición de raíz cuadrada

En esta lección también se da la definición de raíz cuadrada donde se concluye a un número positivo a le corresponden dos raíces cuadradas una positiva y otra negativa ambas con el mismo valor absoluto, además de que el cero solo tiene una raíz cuadrada que es el mismo cero.

Las raíces cuadradas para número negativos no se consideran en este grado.

Para un número positivo a se escribe como $\sqrt{a}$ su raíz cuadrada positiva y $-\sqrt{a}$ su raíz cuadrada negativa. Para representar ambas a la vez se escribe $\pm\sqrt{a}$. De la definición de raíz cuadrada se sabe que $(\sqrt{a})^2 = a$ para $a \geq 0$.

Sección 3: Relación de orden con raíces cuadradas.

Entre los números de la forma $\sqrt{a}$ existe la relación mayor que o menor que. Por ejemplo $\sqrt{5}$ es mayor que $\sqrt{2}$, lo cual se ve fácilmente comparando la medida de los lados de cuadrados cuyas áreas miden 5 y 2.

Otra forma de demostrar este hecho es la siguiente. Entre dos números a y b positivos, la relación $a > b$ es equivalente a la relación $a - b > 0$.

Pero $a - b$ se puede descomponer como $a - b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$. Aquí el factor $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ es positivo, por lo tanto la relación $a - b > 0$ equivale a la relación $\sqrt{a} - \sqrt{b} > 0$, o sea que $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

Dos números positivos siempre se pueden comparar tomando sus cuadrados. Por ejemplo al comparar $\sqrt{70}$ con 8 se tiene que

$(\sqrt{70})^2 = 70$ y $8^2 = 64$, como $70 > 64$ se concluye que $\sqrt{70} > 8$.

Lección 2: Números irracionales

Cuando se expresa el valor de una fracción en forma decimal, hay dos casos:

Se expresa con un número decimal que tiene finita cantidad de cifras decimales.

Ejemplo: $\frac{3}{8} = 0.375$

Esto se da solo en las fracciones de la forma $\frac{a}{b}$ donde el máximo común divisor de a y b es 1 y el denominador b no tiene en su factorización en números primos otros números primos que 2 y 5.

Se repite infinitamente cierta cantidad de las cifras decimales.

Ejemplo: $\frac{218}{165} = 1.321212121\ldots$

En la parte decimal de este número las cifras 21 se repiten infinitamente.

Inversamente los decimales de estos dos tipos se pueden representar en forma de fracción.

El número $\sqrt{2}$ no pertenece a estas categorías, es decir que no se pueden expresar en forma de fracción. A este tipo de número como $\sqrt{2}$ se le llama números irracionales. A cada número irracional le corresponde un punto en la recta numérica.

Lección 3: Números reales

A los números que corresponden a los puntos en la recta numérica se les llama números reales. El conjunto de los números reales se divide en dos partes sin elementos en común. Una de estas es el conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$) que son aquellos números que se representan con una fracción.

Los números racionales incluyen los números enteros ($\mathbb{Z}$) y a los números naturales ($\mathbb{N}$).

La otra parte es el conjunto de los números irracionales ($\mathbb{I}$). $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Además de esto se estudia la propiedad distributiva aplicada a expresiones que

$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d)$

En estos casos de multiplicación también se aplican los productos notables estudiados en la unidad de polinomios a expresiones que contienen raíces como ser:

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$

$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$

Con el objeto de poder hacer los cálculos más simples.

Por ejemplo

$(\sqrt{2} + \sqrt{2})(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2$

$= 2 - 3$

$= -1$

Números reales	
Números racionales	Números irracionales
$\frac{2}{3}, \frac{3}{8}$, 5, -3, 0...	$\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{5}$.

Lección 4: Operaciones con raíces cuadradas

Se enseñan las propiedades fundamentales de la siguiente manera.

Para $a > 0$ y $b > 0$ se tiene que:

1. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
2. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$
3. $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$

Para demostrarlo, se observa que los dos miembros de la igualdad son positivos y al elevar ambos miembros al cuadrado éstos quedan iguales, por lo tanto por la definición de raíz cuadrada ambos miembros son iguales.

A continuación se muestra la demostración de 1.

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{(a \times b)},\ a > 0,\ b > 0$$

$$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} \times \sqrt{b})(\sqrt{a} \times \sqrt{b})$$

$$= (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2$$

$$= a \times b$$

Por tanto $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = a \times b$

El número $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ elevado al cuadrado da $a \times b$ y es positivo por definición de raíz cuadrada.

Se concluye que $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

De manera similar se pueden demostrar las demás propiedades.

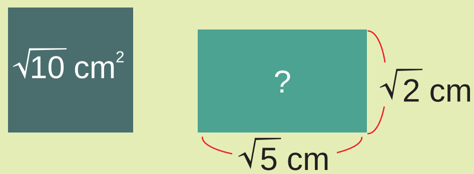
Otro concepto importante dentro de las operaciones con raíces es la racionalización ya que esta permite eliminar la raíz cuadrada del denominador.

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

Tema: Multiplicación de raíces cuadradas 1

Ejemplo 4.1 2 **Pág.** 31 3

Hortensia tiene un cuadrado y Diego tiene un rectángulo, ellos quieren saber si el área del cuadrado es la misma que la del rectángulo.



¿Cuál es la base del rectángulo?
$\sqrt{5}$ cm
¿Cuál es la altura del rectángulo?
$\sqrt{2}$ cm
¿Cómo se encuentra el área de un rectángulo?

Área = base × altura

Expresión del área del rectángulo:
$\sqrt{5} \times \sqrt{2} = ?$ 5

¿Cómo se calcula $\sqrt{5} \times \sqrt{2}$?

Solución 4
Utilice la calculadora para completar la siguiente tabla:
(aproximar las raíces hasta centésimas)

	a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$	$a\times b$	$\sqrt{a\times b}$
Expresión numérica	5	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}\times\sqrt{2}$	5×2	$\sqrt{5\times 2}$
Valor aproximado	5	2	2.24	1.41	3.16	10	3.16

Respuesta: El área del cuadrado y el área del rectángulo son iguales. 4

$\sqrt{5}\times\sqrt{2} = \sqrt{5\times 2} = \sqrt{10}$

Se puede concluir que:
$5 \times 2 = 10$
$\sqrt{5\times 2} = \sqrt{10}$

Ejercicio 4.1 2 **Pág.** 31 3
Compruebe que $\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{a\times b}$ completando la siguiente tabla (utilice la calculadora y aproxime hasta centésimas).

	a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$	$a\times b$	$\sqrt{a\times b}$
Expresión numérica	3	7	$\sqrt{3}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{3}\times\sqrt{7}$	3×7	$\sqrt{3\times 7}$
Valor aproximado	3	7	1.73	2.65	4.58	21	4.58

La conclusión del Ejemplo 4.1 también aplica para la división.

6
Propiedad de la multiplicación y de la división de raíces cuadradas

Para a y b números positivos ($a > 0$, $b > 0$)

1 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

2 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

Ejercicio 4.2 2 **Pág.** 32 3
Utilice la tabla para comprobar que $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$
(aproxime hasta centésimas)

	a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\frac{a}{b}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$
Expresión Númerica	15	3	$\sqrt{15}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$	$\frac{15}{3}$	$\sqrt{\frac{15}{3}}$
Valor aproximado	15	3	3.87	1.73	2.24	5	2.24

1 Al inicio de la clase escribir solo la palabra "**Tema**" y hasta el final de la clase (o en el desarrollo de la misma) escribir el contenido del tema.

2 Escribir el número del *Ejemplo* o *Ejercicio* .

3 Escribir el número de **Pág.** del LE para entender dónde se quedaron con respecto al tiempo.

4 Escribir la **Solución** y **Respuesta**.

5 En el problema planteado marcar los datos importantes para poder llegar a la respuesta.

6 Escribir la conclusión en un rectángulo de color rojo.

✓ Marcar en el *Ejercicio* cuando la solución o la respuesta sean correctas.

Nota: Los puntos aquí explicados no siempre aplican todos en un plan de pizarra.

Tema: Racionalización de expresiones con raíz cuadrada en el denominador 1

Observando: 5

$\frac{1}{\sqrt{3}} = 1 \div \sqrt{3} \approx 1 \div 1.73205 \approx 0.57735$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \div 3 \approx 1.73205 \div 3 \approx 0.57735$

Los resultados son iguales.

Ejemplo 4.18 2 **Pág.** 38 3

Elimine el signo $\sqrt{\ }$ del denominador en $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Solución 4

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ ...multiplicar por $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = 1$ 5

$= \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}$

$= \frac{\sqrt{3}}{3}$

6 El convertir expresiones que llevan el signo $\sqrt{\ }$ en el denominador en la forma cuyo denominador no contiene el signo $\sqrt{\ }$ se le denomina racionalización.

Ejercicio 4.20 2 **Pág.** 38 3

Racionalice

Solución 4

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓

b) $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ✓

c) $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$= \frac{3\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2}$

$= \frac{3\sqrt{5}}{5}$ ✓

Ejemplo 4.19 2 **Pág.** 39 3

Racionalice $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

Solución 4

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ ...multiplicar por $\boxed{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}} = 1$ 5

$= \frac{\sqrt{10}}{5}$

Ejercicio 4.21 2 **Pág.** 39 3

Racionalice

Solución 4

a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{6}}{2}$ ✓

b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$

$= \frac{\sqrt{30}}{6}$ ✓

c) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{21}}{3}$ ✓

(Para seguir con el contenido, se puede borrar la parte izquierda de la pizarra.)

1 Al inicio de la clase escribir solo la palabra "**Tema**" y hasta el final de la clase (o en el desarrollo de la misma) escribir el contenido del tema.

2 Escribir el número del *Ejemplo* o *Ejercicio*.

3 Escribir el número de **Pág.** del LE para entender dónde se quedaron con respecto al tiempo.

4 Escribir la **Solución** y **Respuesta**.

5 En el problema planteado marcar los datos importantes para poder llegar a la respuesta.

6 Escribir la conclusión en un rectángulo de color rojo.

✓ Marcar en el *Ejercicio* cuando la solución o la respuesta sean correctas.

Nota: Los puntos aquí explicados no siempre aplican todos en un plan de pizarra.

Indicador de logro

¿Cuál es la longitud aproximada del lado de un cuadrado que tiene 2 cm^2 de área? (utilice la calculadora)

1. Encontrar el lado de un cuadrado dada su área para introducir la raíz cuadrada de un número.

(20 min)

* Presentar la situación del LE y permitir al estudiante pensar la manera de resolverla.

  ¿Cómo se obtiene el área de un cuadrado?

  ¿Cuál es el área de un cuadrado cuyo lado mide 3 cm?

* Indicar que piensen la manera de encontrar el lado de un cuadrado si se conoce su área.

  ¿Cuál es la medida del lado de un cuadrado cuya área es 4 cm^2? ¿por qué?

  ¿Cuál es la medida del lado de un cuadrado cuya área es 5 cm^2?

* Hacer que se den cuenta que encontrar la medida del cuadrado en este caso ya no es tan inmediato porque no es un número entero por lo que se tendrá que hacer uso de la aproximación.

* Explicar la manera de encontrar la aproximación de la medida del lado del cuadrado tal como está indicado en el LE.

* Indicar que lean y observen la explicación dada en el LE.

* Concluir que la medida del lado del cuadrado está definida por un número x tal que: $2.23 < x < 2.24$.

Unidad 2: Números reales

Lección 1: (1/3) Raíces cuadradas

Sección 1: Aproximación de la raíz cuadrada

Objetivo: Determinar la raíz cuadrada de un número utilizando la aproximación.

Unidad 2

Números reales

Lección 1: Raíces cuadradas

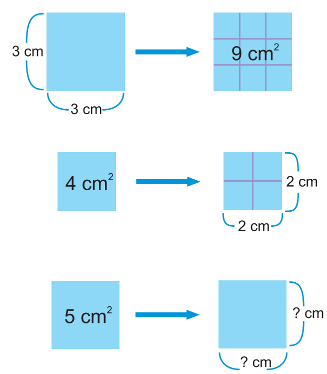
Sección 1: Aproximación de la raíz cuadrada

Lea y observe detenidamente.

Si se tiene un cuadrado cuya longitud del lado es 3 cm, entonces su área es 9 cm^2 porque $3 \times 3 = 9$.

Si se tiene un cuadrado cuya área es 4 cm^2, la longitud del lado es 2 cm, porque $4 = 2 \times 2$.

Si se tiene un cuadrado cuya área es 5 cm^2, ¿cuál es la longitud del lado?



Piense en lo siguiente:

El área del cuadrado es 5 cm^2, esto quiere decir que hay un número x que al elevarlo al cuadrado es igual a 5.

Esto es, $x^2 = 5$.

Como $2^2 = 4$ y $3^2 = 9$, entonces ese número x se encuentra entre 2 y 3

$$2 < x < 3$$

Para obtener el valor de x, puede hacer lo siguiente:

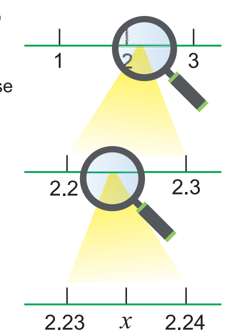
Como $2.2^2 = 4.84$ y $2.3^2 = 5.29$

entonces $2.2 < x < 2.3$

Aumente una cifra decimal y elévelo al cuadrado

$2.23^2 = 4.9729$ y $2.24^2 = 5.0176$

entonces $2.23 < x < 2.24$



24 Unidad 2 - Números reales

Explicar que si se utiliza el proceso de aproximación decimal varias veces se obtendrá una mejor aproximación para el valor del lado del cuadrado buscado x.

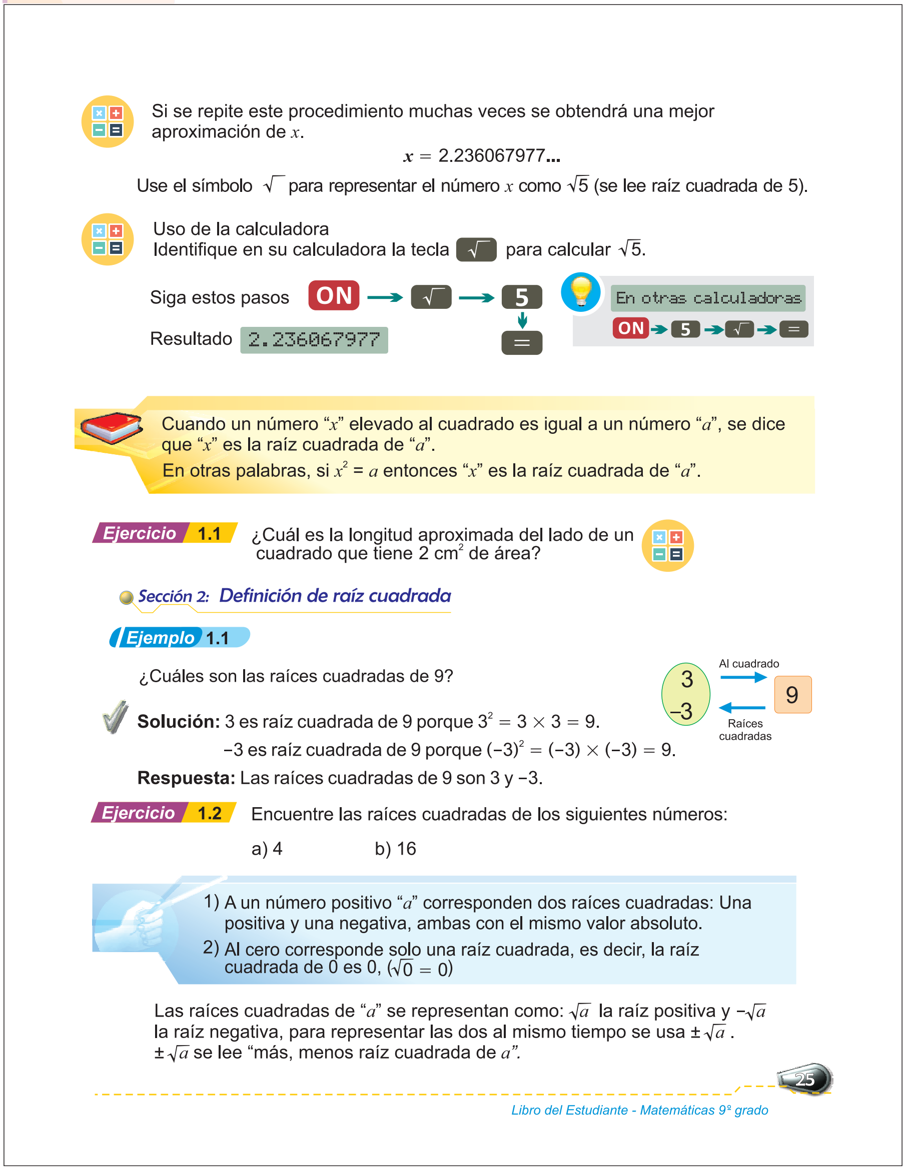
continúa en la siguiente página...

Unidad 2: Números reales

Lección 1: Raíces cuadradas
(2/3)

Sección 2: Definición de la raíz cuadrada

Objetivos:
- Definir la raíz cuadrada de un número.
- Calcular la raíz cuadrada de un número.



Si se repite este procedimiento muchas veces se obtendrá una mejor aproximación de x.

$$x = 2.236067977...$$

Use el símbolo $\sqrt{\ }$ para representar el número x como $\sqrt{5}$ (se lee raíz cuadrada de 5).

Uso de la calculadora
Identifique en su calculadora la tecla $\sqrt{\ }$ para calcular $\sqrt{5}$.

Siga estos pasos ON → √ → 5 → =

Resultado 2.236067977

En otras calculadoras
ON → 5 → √ → =

Cuando un número "x" elevado al cuadrado es igual a un número "a", se dice que "x" es la raíz cuadrada de "a".
En otras palabras, si $x^2 = a$ entonces "x" es la raíz cuadrada de "a".

Ejercicio 1.1 ¿Cuál es la longitud aproximada del lado de un cuadrado que tiene 2 cm² de área?

Sección 2: Definición de raíz cuadrada

Ejemplo 1.1

¿Cuáles son las raíces cuadradas de 9?

Al cuadrado: 3, –3 → 9
Raíces cuadradas: 9 → 3, –3

Solución: 3 es raíz cuadrada de 9 porque $3^2 = 3 \times 3 = 9$.
-3 es raíz cuadrada de 9 porque $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$.

Respuesta: Las raíces cuadradas de 9 son 3 y –3.

Ejercicio 1.2 Encuentre las raíces cuadradas de los siguientes números:

a) 4 b) 16

1) A un número positivo "a" corresponden dos raíces cuadradas: Una positiva y una negativa, ambas con el mismo valor absoluto.
2) Al cero corresponde solo una raíz cuadrada, es decir, la raíz cuadrada de 0 es 0, ($\sqrt{0} = 0$)

Las raíces cuadradas de "a" se representan como: $\sqrt{a}$ la raíz positiva y $-\sqrt{a}$ la raíz negativa, para representar las dos al mismo tiempo se usa $\pm\sqrt{a}$.
$\pm\sqrt{a}$ se lee "más, menos raíz cuadrada de a".

25

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

2. Resolver Ejercicio 1.2
(3 min)
Solución:
a) 2 y - 2 b) 4 y – 4

* Utilizando el ejercicio 1.2 concluir que un número positivo diferente de cero tiene dos raíces cuadradas con el resumen del LE.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Encuentre las raíces cuadradas de 25.

2. Introducir el símbolo de raíz cuadrada ($\sqrt{\ }$) para expresar la raíz de un número.
(15 min)

* Concluir que $x = 2.236067977...$

* Hacer que se den cuenta que es un número con infinitas cifras decimales y para expresarlo se escribirá utilizando el símbolo de raíz cuadrada: $x = \sqrt{5}$.

* Explicar que se lee raíz cuadrada de cinco.

* Indicar que utilicen la calculadora para encontrar la raíz cuadrada de 5.

* Pedir que revisen en el LE la forma de usar su calculadora.

3. Definir la raíz cuadrada de un número positivo a
(5 min)

* Revisar el resumen del LE.

* Concluir que calcular la raíz cuadrada es el proceso inverso de elevar un número a la 2.

4. Resolver Ejercicio 1.1
(5 min)
Solución
1.41421356237 cm

[Hasta aquí Clase 1/3]
[Desde aquí Clase 2/3]

1. Determinar la raíz cuadrada de 9. Ejemplo 1.1
(10 min)

* Indicar que encuentren un número que elevado a la 2 es 9.
¿Qué número elevado al cuadrado da nueve?

* Concluir que si $3^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$ entonces las raíces cuadradas de 9 son 3 y -3.

Indicador de logro

Encuentre las raíces cuadradas de 25.

3. Explicar que un número positivo diferente de cero tiene dos raíces cuadradas y cero tiene una raíz cuadrada.

(5 min)

Concluir que las raíces cuadradas de a son la raíz positiva $\sqrt{a}$ y la raíz negativa $-\sqrt{a}$ y se puede abreviar como $\pm\sqrt{a}$ y se lee más menos raíz cuadrada de a.

* Concluir que a cero le corresponde una sola raíz: $\sqrt{0} = 0$.

4. Expresar la raíz cuadrada de 3. Ejemplo 1.2

(5 min)

* Hacer que se den cuenta que no hay un número entero que elevado a la dos da 3.

* Concluir que estas raíces cuadradas se expresan como:

$\pm\sqrt{3}$

5. Resolver Ejercicio 1.3

(4 min)

Solución

a) $\pm\sqrt{2}$ b) $\pm\sqrt{7}$ c) $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

6. Encontrar la raíz cuadrada de un número positivo. Ejemplo 1.3

(3 min)

Indicar que encuentren la raíz cuadrada de 25.

* Explicar que cuando se tiene la raíz de un número, esta se puede expresar, si es positiva como: $\sqrt{25} = 5$ y si es negativa como: $-\sqrt{25} = -5$.

7. Resolver Ejercicio 1.4

(3 min)

Solución

a) 6   b) -4   c) 10   d) -7.

8. Calcular la raíz de un número elevado al cuadrado. Ejemplo 1.4

(3 min)

Unidad 2: Números reales

Lección 1: (2/3) Raíces cuadradas

Sección 2: Definición de la raíz cuadrada

Objetivos:

- Definir la raíz cuadrada de un número.
- Calcular la raíz cuadrada de un número.

Ejemplo 1.2

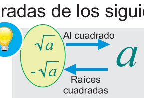
Exprese las raíces cuadradas de 3.

Solución: La positiva es $\sqrt{3}$ y la negativa es $-\sqrt{3}$

Respuesta: $\pm\sqrt{3}$

Ejercicio 1.3 Exprese las raíces cuadradas de los siguientes números:

a) 2   b) 7   c) $\frac{2}{3}$



El signo $\sqrt{\ }$ se coloca sobre toda la fracción.

Ejemplo 1.3

Encuentre las raíces cuadradas de 25.

Solución:

Las raíces cuadradas de 25 son 5 y − 5 porque $5 \times 5 = 25$ y $(-5) \times (-5) = 25$

Respuesta: ± 5

En este caso las raíces cuadradas de 25 usando el signo $\sqrt{\ }$ se expresan como $\sqrt{25}$ y $-\sqrt{25}$ esto es $\sqrt{25} = 5$

$-\sqrt{25} = -5$

Ejercicio 1.4 Exprese sin el signo $\sqrt{\ }$.

a) $\sqrt{36}$ b) $-\sqrt{16}$ c) $\sqrt{100}$ d) $-\sqrt{49}$

Ejemplo 1.4

Calcule $\sqrt{(-5)^2}$.

Solución: $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25}$

$= 5$

Esto es incorrecto

$\sqrt{(-5)^2} = -5$

Ejercicio 1.5 Calcule.

a) $\sqrt{(-2)^2}$ b) $\sqrt{(-4)^2}$

Ejemplo 1.5 Calcule.

a) $(\sqrt{3})^2$ b) $(-\sqrt{3})^2$

Solución: a) $(\sqrt{3})^2 = 3$ b) $(-\sqrt{3})^2 = 3$

Si $a > 0$ se cumple que $(\sqrt{a})^2 = a$ y $(-\sqrt{a})^2 = a$.

Ejercicio 1.6 Calcule.

a) $(\sqrt{7})^2$ b) $(-\sqrt{11})^2$ c) $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$

26 Unidad 2 - Números reales

9. Resolver Ejercicio 1.5 *(3 min)*

Solución a) 2   b) 4

* Utilizando el Ejercicio 1.2 concluir que un número positivo diferente de cero tiene dos raíces cuadradas con el resumen del LE.

10. Explicar que con un número a positivo se cumple que $(\sqrt{a})^2 = a$ y $(-\sqrt{a})^2 = a$

Ejemplo 1.5 *(3 min)*

11. Resolver Ejercicio 1.6 *(3 min)*

Solución a) 7   b) 11   c) $\frac{1}{2}$

Unidad 2: **Números reales**

Lección 1: (3/3) Raíces cuadradas

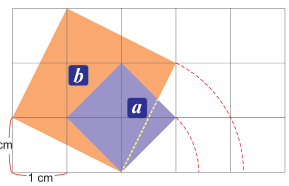
Sección 3: Relación de orden con raíces cuadradas.

Objetivo: Establecer la relación de orden con raíces cuadradas.

Sección 3: ***Relación de orden con raíces cuadradas***

En la figura de la derecha se muestran dos cuadrados, el cuadrado **a** tiene un área de 2 cm² y el **b** un área de 5 cm². Sabemos que sus lados miden $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$.

¿Cuál es mayor $\sqrt{2}$ ó $\sqrt{5}$?



Respuesta:

Como el cuadrado **b** tiene más área que el cuadrado **a**, la medida del lado de **b** es mayor que la de **a** , por tanto:

$\sqrt{5} > \sqrt{2}$

Cuanto mayor es el área de un cuadrado, mayor es la medida de su lado. Por tanto, cuanto mayor es un número, mayor es su raíz cuadrada positiva.

Sean a y b números positivos, si $a < b$ entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Ejemplo 1.6

Compare $\sqrt{11}$ y $\sqrt{15}$ utilizando los signos $>$ ó $<$.

Solución: Como $11 < 15$, entonces $\sqrt{11} < \sqrt{15}$.

Respuesta: $\sqrt{11} < \sqrt{15}$

Ejercicio 1.7 Compare los siguientes números utilizando los signos $>$ ó $<$:

a) $\sqrt{23}$ ___ $\sqrt{27}$ b) $\sqrt{19}$ ___ $\sqrt{14}$ c) $\sqrt{7}$ ___ $\sqrt{5}$

Ejemplo 1.7

Compare 5 y $\sqrt{21}$.

Solución: Al no poder comparar directamente 5 y $\sqrt{21}$, eleve al cuadrado cada uno de los números.

$5^2 = 25$ $(\sqrt{21})^2 = 21$

Luego, aplique lo visto en el **Ejemplo 1.6** . Como $25 > 21$ entonces $5 > \sqrt{21}$.

Respuesta: $5 > \sqrt{21}$

Ejercicio 1.8 Compare los siguientes números utilizando los signos $>$ ó $<$:

a) 3 ___ $\sqrt{7}$ b) 4 ___ $\sqrt{17}$ c) 6 ___ $\sqrt{34}$ d) $\sqrt{48}$ ___ 9

27

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

Indicador de logro

Compare los siguientes números utilizando los signos < ó >.

a) $\sqrt{23}$ __________ $\sqrt{27}$

b) 3 __________ $\sqrt{7}$

1. Analizar la situación del área de dos cuadrados para compararlas presentada en el LE.
(10 min)

* Presentar la situación problemática del LE.
* Si el área del cuadrado a es 2 cm² y el área del cuadrado b es 5 cm² ¿Cuál es la medida de sus lados?

  ¿Qué cuadrado tiene mayor área?

  ¿Cuál es mayor $\sqrt{2}$ ó $\sqrt{5}$?
* Concluir que cuanto mayor es el área de un cuadrado mayor es la medida de sus lados, por tanto cuanto mayor es un número mayor es su raíz cuadrada positiva.

2. Comparar dos números con raíces usando < ó >.
Ejemplo 1.6
(5 min)

¿Cómo es 11 con respecto a 15?

* Concluir que 11 es menor que 15 entonces $\sqrt{11} < \sqrt{15}$

3. Resolver Ejercicio 1.7
(10 min)

Solución

a) $\sqrt{23} < \sqrt{27}$
b) $\sqrt{19} > \sqrt{14}$
c) $\sqrt{7} > \sqrt{5}$

4. Comparar un número entero con una raíz cuadrada Ejemplo 1.7 *(10 min)*

* Indicar que piensen cómo pueden comparar 5 y $\sqrt{21}$
* ¿Se pueden comparar directamente?
* Concluir que para comparar se elevan al cuadrado ambos números.

  ¿Cómo es 5 en relación a $\sqrt{21}$?

5. Resolver Ejercicio 1.8 *(10 min)*

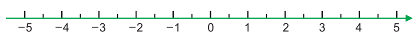
Solución a) $3 > \sqrt{7}$ b) $4 < \sqrt{17}$ c) $6 > \sqrt{34}$ d) $\sqrt{48} < 9$

Indicador de logro

1. Determine si los siguientes números son racionales o irracionales

a) 5 b) $\sqrt{33}$ c) $\sqrt{17}$ d) $\sqrt{9}$

2. Represente en la recta numérica $-\sqrt{2}$, π, $\sqrt{17}$.



1. Definir el conjunto de los números irracionales.

(10 min)

* Recordar el tipo de número que se aprendió en 7mo grado.
* Explicar que los números que se pueden escribir como una fracción (donde el numerador y denominador son números enteros) se le llama número racional.
* Indicar que escriban 3, 0.1, -2 como una fracción.
* Pedir que escriban $\sqrt{25}$, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$ como fracción. ¿Se pueden escribir como una fracción?
* Hacer que noten que $\sqrt{25}$ si se puede escribir como una fracción pero $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$ no.
* Explicar que $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$ tienen infinitas cifras decimales que no se repiten periódicamente, por lo tanto no son números racionales.
* Concluir en el resumen del LE.

2. Resolver *Ejercicio* **2.1**

(10 min)

Solución

a) $\sqrt{3}$ = 1.732050807...irracional

b) π = 3.141592653...irracional

c) $\sqrt{0.5}$ = 0.7071067811...irracional

3. Resolver *Ejercicio* **2.2**

(5 min)

Solución

a) racional

b) irracional

c) irracional

d) racional ($\sqrt{9}$ = 3)

Unidad 2: **Números reales**

Lección 2: (1/1) Números irracionales

Sección 1: Definición de números irracionales

Objetivos:
- Definir el conjunto de números irracionales
- Representar números irracionales en la recta numérica.

Lección 2: Números irracionales

En 7mo grado se aprendió que un número que se puede escribir como fracción es de la forma $\frac{a}{b}$ (donde a y b son números enteros y $b \neq 0$) y se le llama número racional.

Por ejemplo: 3, 0.1 y −2 son números racionales, porque se pueden expresar en forma de fracción.

$3 = \frac{3}{1}$ $\quad$ $0.1 = \frac{1}{10}$ $\quad$ $-2 = -\frac{2}{1}$

Ahora determine si los siguientes números son racionales.

a) $\sqrt{25}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{5}$

Como $\sqrt{25} = 5$ y $5 = \frac{5}{1}$ entonces $\sqrt{25}$ es un número racional.

Los números como $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$ que tienen infinitas cifras decimales que no se repiten periódicamente, no se pueden escribir como fracción, por lo tanto, no son números racionales.

Recuerde que
$\sqrt{2}$ = 1.414213562...
$\sqrt{5}$ = 2.236067977...

Un **número irracional** es un número que no se puede expresar como fracción.
Un número irracional es un número con infinitas cifras decimales no periódicas.

Ejercicio **2.1** Utilice su calculadora para determinar si los siguientes números son irracionales:

a) $\sqrt{3}$ b) π c) $\sqrt{0.5}$

Para encontrar π
ON → Shift / O / 2nd function → π Exp → =

Ejercicio **2.2** Determine si los siguientes números son racionales o irracionales (utilice la calculadora):

a) 5 b) $\sqrt{33}$ c) $\sqrt{17}$ d) $\sqrt{9}$

Ejemplo **2.1**

Represente en la recta numérica $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{3}$.

Solución:

Paso 1: Utilice la calculadora para determinar el valor de cada uno (aproxime hasta centésimas)

$\sqrt{2} \approx 1.41$
$-\sqrt{3} \approx -1.73$

El símbolo ≈ significa aproximadamente igual.

28

Unidad 2 - Números reales

4. Representar los números irracionales en la recta numérica.

Ejemplo **2.1** (10 min)

* Hacer uso de la recta numérica para representar $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{3}$.
* Indicar que utilicen la calculadora para encontrar una aproximación hasta centésima de cada raíz. (revisar el apéndice para información de aproximación)

continúa en la siguiente página...

Unidad 2: Números reales

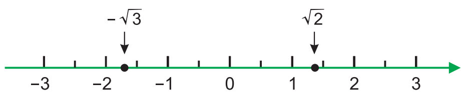
Lección 3: (1/1) Números reales

Sección 1: Definición de números reales

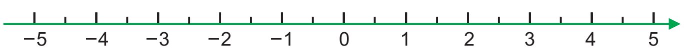
Objetivo: Definir el conjunto de números reales.

Paso 2: Trace la recta numérica y represéntelos.

Ver información complementaria sobre la aproximación o redondeo en la página 53.



Ejercicio 2.3 Represente en la recta numérica $-\sqrt{2}$, π y $\sqrt{17}$ (aproxime hasta centésimas)



Lección 3: Números reales

¿Qué tipo de números son los siguientes: π, 5, $\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}$, −0.35, $\sqrt{25}$ y $\sqrt{5}$?

Respuesta: Números racionales: 5, $-\frac{1}{2}$, −0.35, $\sqrt{25}$

Números irracionales: π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$

Al conjunto de números racionales y números irracionales se les llama **números reales**.

Los números π, 5, $\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}$, −0.35, $\sqrt{25}$ y $\sqrt{5}$ son números reales.

El conjunto de los números reales es la unión de los números racionales y los números irracionales. El conjunto de los números reales corresponde a todos los puntos de la recta numérica.

* En 7mo grado se aprendió que los números naturales están contenidos en los números enteros y que los números enteros están contenidos en los números racionales.

29

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

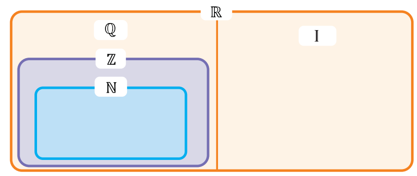
* Recordar que en séptimo grado se aprendió que los números naturales están contenidos en los números enteros y los números enteros están contenidos en los números racionales.

Indicador de logro

Coloque los siguientes números en el diagrama dado:

a) $\frac{3}{4}$ b) 1 c) -2 d) -0.5 e) $-\sqrt{7}$

f) $-\pi$, g) 0 h) $\sqrt{\frac{1}{5}}$

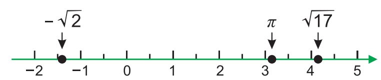


* Representar en la recta numérica las aproximaciones decimales de cada raíz.

5. Resolver **Ejercicio 2.3**

(10 min)

Solución



[Hasta aquí Clase 1 Lección 2]

[Desde aquí Clase 1 Lección 3]

1. Definir el conjunto de los números reales.

(10 min)

Presentar diferentes números.

¿Cómo se les llama a los números: π, 5, $\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}$, -0.35, $\sqrt{5}$?

* Concluir que en el grupo de números hay números racionales e irracionales.

* Explicar que a ambos tipos de números racionales e irracionales se les llama números reales.

* Concluir que la unión de los números racionales con los irracionales forman el conjunto de los números reales.

* Explicar que los números reales les corresponden a todos los puntos en la recta numérica.

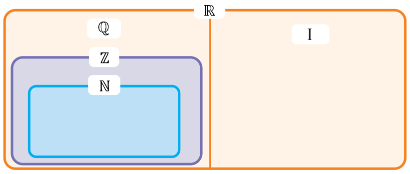
continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Coloque los siguientes números en el diagrama dado.

a) $\frac{3}{4}$ b) 1 c) -2 d) -0.5 e) $-\sqrt{7}$

f) $-\pi$, g) 0 h) $\sqrt{\frac{1}{5}}$



2. Establecer la relación entre los conjuntos de números

Ejemplo **3.1**

(15 min)

* Presentar el diagrama y analizar las características de cada conjunto y de los números que pertenecen a ellos.

¿Qué relación existe entre los números naturales y los números enteros?

¿Qué relación hay entre los números enteros y los números racionales?

* Concluir que todo número natural y entero también es un número racional.

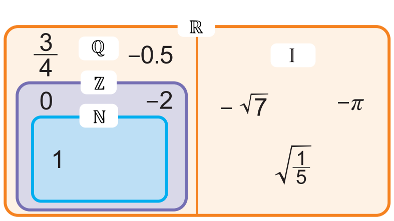
¿Al unir los números irracionales y los números racionales que conjunto se forma?

* Concluir que la unión del conjunto de los números racionales e irracionales forman el conjunto de los números reales.

3. Resolver *Ejercicio* **3.1**

(10 min)

Solución



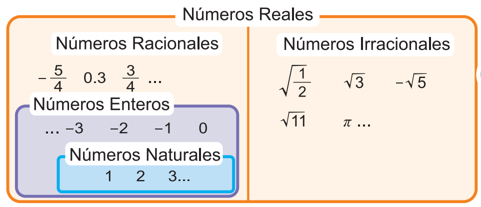
Unidad 2: Números reales

Lección 3: (1/1) Números reales

Sección 1: Definición de números reales

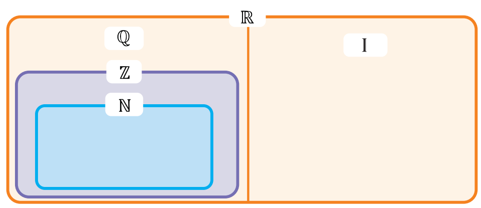
Objetivo: Definir el conjunto de números reales.

Con el siguiente diagrama se apreciará mejor la relación entre estos conjuntos.



Números Reales: ℝ
Números Racionales: ℚ
Números Irracionales: I
Números Enteros: ℤ
Números Naturales: ℕ

Ejercicio **3.1** Coloque los siguientes números en el diagrama siguiendo el modelo anterior:



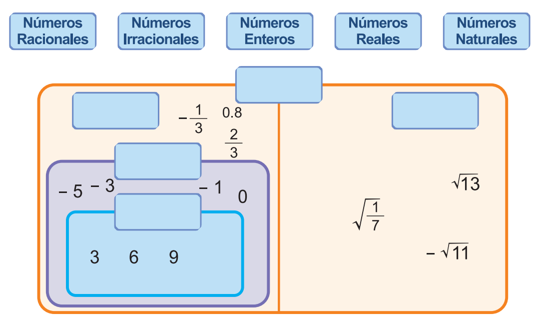
a) $\frac{3}{4}$ e) $-\sqrt{7}$

b) 1 f) $-\pi$

c) -2 g) 0

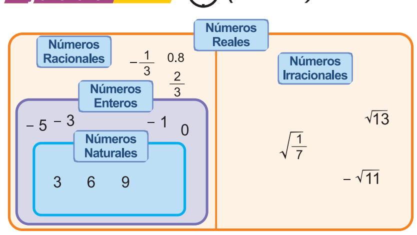
d) -0.5 h) $\sqrt{\frac{1}{5}}$

Ejercicio **3.2** Complete el siguiente diagrama colocando en el lugar correcto las piezas que se muestran a continuación:



4. Resolver *Ejercicio* **3.2** *(10 min)*

Solución



Unidad 2: **Números reales**

Lección 4: (1/17) Operaciones con raíces cuadradas

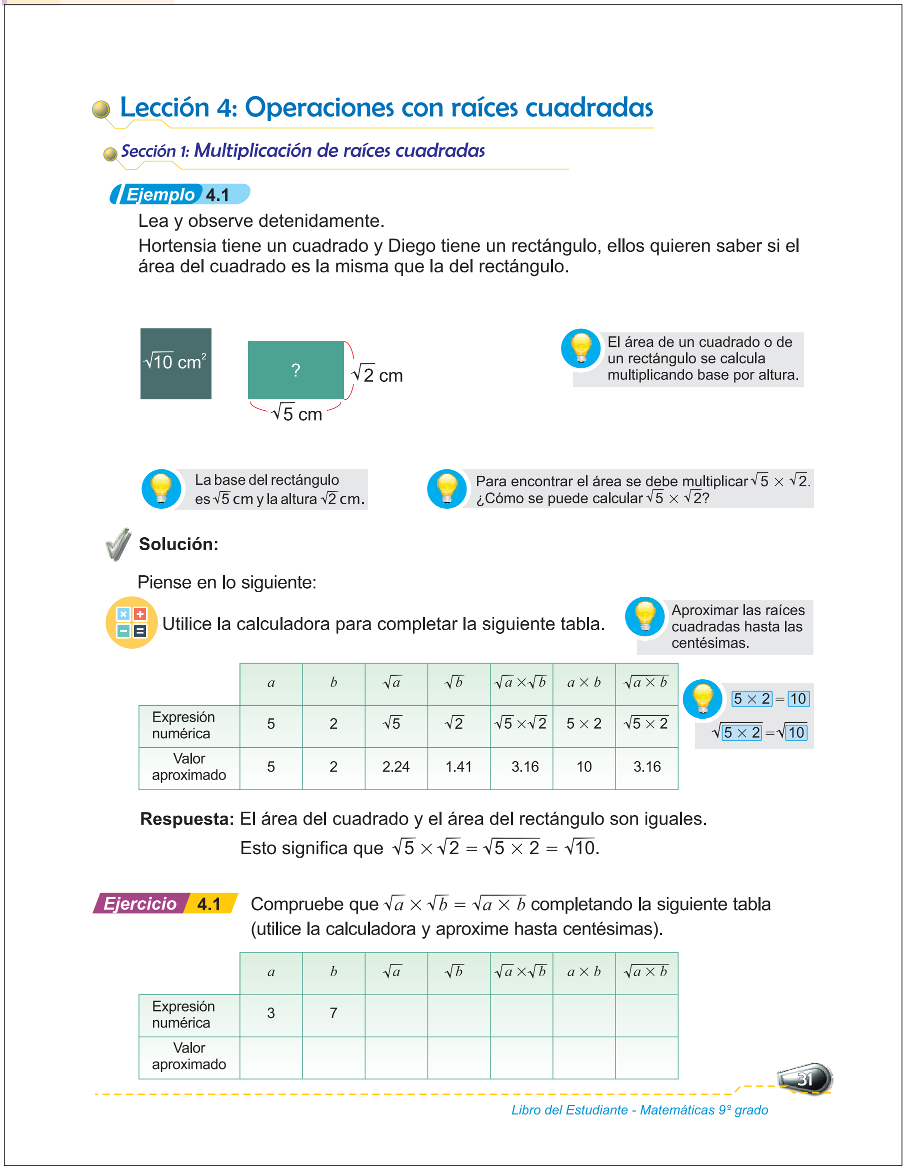
Sección 1: Multiplicación de raíces cuadradas

Objetivo: • Comprobar la propiedad de la multiplicación.

Indicador de logro

Comprobar que $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ completando la siguiente tabla. (utilice calculadora y aproxime hasta centésimas)

	a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$	$a\times b$	$\sqrt{a\times b}$
Expresión Númerica	3	7					
Valor aproximado							



Lección 4: Operaciones con raíces cuadradas

Sección 1: Multiplicación de raíces cuadradas

Ejemplo 4.1

Lea y observe detenidamente.

Hortensia tiene un cuadrado y Diego tiene un rectángulo, ellos quieren saber si el área del cuadrado es la misma que la del rectángulo.

El área de un cuadrado o de un rectángulo se calcula multiplicando base por altura.

La base del rectángulo es $\sqrt{5}$ cm y la altura $\sqrt{2}$ cm.

Para encontrar el área se debe multiplicar $\sqrt{5} \times \sqrt{2}$. ¿Cómo se puede calcular $\sqrt{5} \times \sqrt{2}$?

Solución:

Piense en lo siguiente:

Utilice la calculadora para completar la siguiente tabla.

Aproximar las raíces cuadradas hasta las centésimas.

	a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$	$a\times b$	$\sqrt{a\times b}$
Expresión numérica	5	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}\times\sqrt{2}$	5×2	$\sqrt{5\times 2}$
Valor aproximado	5	2	2.24	1.41	3.16	10	3.16

$\boxed{5\times 2} = \boxed{10}$

$\sqrt{\boxed{5\times 2}} = \sqrt{\boxed{10}}$

Respuesta: El área del cuadrado y el área del rectángulo son iguales.

Esto significa que $\sqrt{5}\times\sqrt{2} = \sqrt{5\times 2} = \sqrt{10}$.

Ejercicio 4.1 Compruebe que $\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{a\times b}$ completando la siguiente tabla (utilice la calculadora y aproxime hasta centésimas).

	a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$	$a\times b$	$\sqrt{a\times b}$
Expresión numérica	3	7					
Valor aproximado							

Solución

	a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$	$a\times b$	$\sqrt{a\times b}$
Expresión Númerica	3	7	$\sqrt{3}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{3}\times\sqrt{7}$	3×7	$\sqrt{3\times 7}$
Valor aproximado	3	7	1.73	2.65	4.58	21	4.58

1. Comprobar que $\sqrt{2}\times\sqrt{5}=\sqrt{10}$

Ejemplo 4.1

(15 min)

* Presentar la situación de comparación de las áreas del cuadrado y del rectángulo.
* Indicar que piensen si las áreas son iguales.

  ¿Cómo se puede calcular el área del rectángulo cuya base es $\sqrt{5}$ y su altura es $\sqrt{2}$?

  ¿Cómo se obtiene el producto de $\sqrt{5} \times \sqrt{2}$?
* Permitir a los estudiantes que piensen la manera de resolverlo.

  Presentar la tabla del LE e indicar que utilicen la calculadora para completarla.
* Al observar los datos de la tabla ¿Qué se puede concluir del producto $\sqrt{5} \times \sqrt{2}$ y $\sqrt{10}$?
* Responder el problema planteado sobre las áreas del cuadrado y el rectángulo.

* Concluir que son iguales y generalizar la propiedad del producto. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a\times b}$

2. Resolver Ejercicio 4.1

(15 min)

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Calcule:

a) $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$

b) $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$

c) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}}$

3. Explicar las propiedades de la multiplicación y de la división de raíces.

(5 min)

* Indicar que en el ejemplo anterior se muestra como se cumple la propiedad de la multiplicación y que de manera similar se cumple para la división.

* Concluir en el resumen del LE.

* Mostrar la forma de simplificar la multiplicación de raíces ($\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$)

4. Resolver Ejercicio 4.2

(10 min)

(Ver solución en la parte inferior)

[Hasta aquí Clase 1]

[Desde aquí Clase 2]

1. Multiplicar dos raíces cuadradas aplicando la propiedad. Ejemplo 4.2

(5 min)

* Indicar que apliquen la propiedad anterior para encontrar el resultado de $\sqrt{7} \times \sqrt{2}$.

2. Resolver Ejercicio 4.3

(8 min)

Solución

a) $\sqrt{6}$ b) $\sqrt{22}$ c) $\sqrt{30}$

3. Multiplicar dos raíces cuyo resultado puede extraerse raíz cuadrada. Ejemplo 4.3

(3 min)

* Indicar que calculen el producto y que encuentren la raíz cuadrada del resultado.

4. Resolver Ejercicio 4.4

(5 min)

Solución

a) 4 b) 8 c) 10

Unidad 2: Números reales

Lección 4: (2/17) Operaciones con raíces cuadradas

Sección 2: Multiplicación y división de raíces cuadradas

Objetivo: Multiplicar y dividir raíces cuadradas.

La conclusión del Ejemplo 4.1 también aplica para la división.

Propiedades de la multiplicación y división de raíces cuadradas

Para a y b números positivos ($a > 0$, $b > 0$)

1 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ 2 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

Siguiendo las reglas para expresar la multiplicación en una expresión algebraica, la propiedad 1 se puede escribir de la forma: $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Ejercicio 4.2 Utilice la tabla para comprobar que $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (aproxime hasta centésimas).

	a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\dfrac{a}{b}$	$\sqrt{\dfrac{a}{b}}$
Expresión Númerica	15	3					
Valor aproximado							

Sección 2: Multiplicación y división de raíces cuadradas

Ejemplo 4.2

Calcule $\sqrt{7} \times \sqrt{2}$.

Solución: $\sqrt{7} \times \sqrt{2} = \sqrt{7 \times 2}$
$= \sqrt{14}$

Ejercicio 4.3 Calcule lo siguiente:

a) $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ b) $\sqrt{2} \times \sqrt{11}$ c) $\sqrt{10} \times \sqrt{3}$

Ejemplo 4.3

Calcule $\sqrt{12} \times \sqrt{3}$.

Solución: $\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{12 \times 3}$
$= \sqrt{36}$
$= 6$

Si la raíz es exacta, se debe calcular.
$\sqrt{36} = 6$

Ejercicio 4.4 Calcule.

a) $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$ b) $\sqrt{32} \times \sqrt{2}$ c) $\sqrt{20} \times \sqrt{5}$

32

Unidad 2 - Números reales

Solución Ejercicio 4.2

	a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\dfrac{a}{b}$	$\sqrt{\dfrac{a}{b}}$
Expresión Númerica	15	3	$\sqrt{15}$	$\sqrt{3}$	$\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$	$\dfrac{15}{3}$	$\sqrt{\dfrac{15}{3}}$
Valor aproximado	15	3	3.87	1.73	2.24	5	2.24

continúa en la siguiente página...

Unidad 2: Números reales

Lección 4: (3/17) Operaciones con raíces cuadradas

Sección 3: Expresión de raíces de la forma $a\sqrt{b}$.

Objetivo: Expresar una raíz en la forma $a\sqrt{b}$.

Indicador de logro

Exprese los siguientes números de la forma $\sqrt{a}$.

a) $2\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{7}$ c) $4\sqrt{5}$

Ejemplo 4.4 Calcule $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$.

Solución: $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{3}_{1}}}$

$= \sqrt{5}$

Ejercicio 4.5 Calcule.

a) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}}$ b) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}}$

Ejemplo 4.5 Calcule $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$.

Solución: $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{\cancel{45}^{9}}{\cancel{5}_{1}}}$

$= \sqrt{9}$

$= 3$

Ejercicio 4.6 Calcule.

a) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$

Ejemplo 4.6

Utilizando la propiedad $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ calcule $\sqrt{\frac{1}{4}}$.

El signo $\sqrt{\ }$ se coloca sobre toda la fracción.

Solución: Se calcula la raíz cuadrada del numerador y del denominador por separado, de esta forma $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$.

Respuesta: $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

Ejercicio 4.7 Utilizando la propiedad $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ calcule.

a) $\sqrt{\frac{4}{25}}$ b) $-\sqrt{\frac{1}{9}}$ c) $\sqrt{\frac{16}{49}}$ d) $-\sqrt{\frac{1}{100}}$

Sección 3: Expresión de raíces en la forma $a\sqrt{b}$

Aplicando la propiedad conmutativa vista en 7mo grado, se sabe que el producto $4 \times \sqrt{7}$ también se puede escribir como $\sqrt{7} \times 4$.

$4 \times \sqrt{7}$ y $\sqrt{7} \times 4$ se expresan como $4\sqrt{7}$, se elimina el signo "×".

$$a \times \sqrt{b} = \sqrt{b} \times a = a\sqrt{b}$$

Ejercicio 4.8 Exprese en la forma $a\sqrt{b}$ los siguientes números:

a) $3 \times \sqrt{3}$ b) $13 \times \sqrt{6}$ c) $\sqrt{13} \times 7$ d) $\sqrt{11} \times 20$

Cuando hay un número multiplicando afuera de la raíz cuadrada, se puede introducir dentro de ella elevado al cuadrado, es decir, para $a > 0$, $b > 0$.

$$\begin{aligned} a\sqrt{b} &= a \times \sqrt{b} \\ &= \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} \\ &= \sqrt{a^2 \times b} \\ &= \sqrt{a^2 b} \end{aligned}$$

33

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

1. **Aplicar la propiedad conmutativa de la multiplicación para expresar el producto de una raíz por un número** ($a \times \sqrt{b} = \sqrt{b} \times a = a\sqrt{b}$).

(10 min)

* Recordar la propiedad conmutativa estudiada en 7mo grado.

¿De qué otra manera se puede expresar el producto $4 \times \sqrt{7}$? Aplicando la propiedad conmutativa.

* Concluir que se puede obviar el signo × y escribir el producto de la forma $a\sqrt{b}$.

5. **Calcular la división de dos raíces aplicando la propiedad.** Ejemplo 4.4

(3 min)

* Indicar que apliquen la propiedad para calcular el resultado.
* Explicar que se debe de simplificar la expresión cuando se pueda.

6. **Resolver** Ejercicio 4.5

(5 min)

Solución

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{6}$ c) $\sqrt{3}$

7. **Calcular la división de dos raíces.** Ejemplo 4.5

(3 min)

* Indicar que calculen el cociente aplicando la simplificación y que encuentren la raíz cuadrada del resultado.

8. **Resolver** Ejercicio 4.6

(5 min)

Solución

a) 2 b) 4 c) 5

9. **Encontrar la raíz cuadrada de una fracción.** Ejemplo 4.6

(3 min)

* Indicar que apliquen la propiedad para calcular $\sqrt{\frac{1}{4}}$, indicar que separen las raíces y que calculen de manera separada.

10. **Resolver** Ejercicio 4.7

(5 min)

Solución

a) $\frac{2}{5}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{4}{7}$ d) $-\frac{1}{10}$

[Hasta aquí Clase 2]

[Desde aquí Clase 3]

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Exprese los siguientes números de la forma $a\sqrt{b}$.

a) $\sqrt{12}$

b) $\sqrt{\frac{5}{16}}$

c) $\sqrt{48}$

2. Resolver *Ejercicio* **4.8**

(10 min)

Solución

a) $3\sqrt{3}$ b) $13\sqrt{6}$ c) $7\sqrt{13}$
d) $20\sqrt{11}$

* Explicar que cuando se tiene un número de la forma $a\sqrt{b}$, el número que esta fuera de la raíz cuadrada se puede introducir dentro de ella elevando al cuadrado a.

* Concluir en el resumen del LE.

3. Expresar números con raíces de la forma $\sqrt{a}$.

Ejemplo **4.7**

(15 min)

* Utilizando la estrategia de elevar el cuadrado el número que está fuera de la raíz ¿Cómo podemos expresar $3\sqrt{5}$ de la forma $\sqrt{a}$?

* Concluir que se debe aplicar la propiedad de la multiplicación de raíces cuadradas para poder expresar el número como una sola raíz.

4. Resolver *Ejercicio* **4.9**

(10 min)

Solución

a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{63}$ c) $\sqrt{80}$
d) $\sqrt{72}$ e) $\sqrt{75}$

[Hasta aquí Clase 3]
[Desde aquí Clase 4]

1. Expresar $5\sqrt{2}$ en la forma $\sqrt{a}$

(5 min)

* Utilizando la estrategia aprendida en la clase 3 ¿Qué se hace para expresar $5\sqrt{2}$ como $\sqrt{a}$? ¿Qué significa simplificar una raíz cuadrada?

* Concluir que simplificar una raíz cuadrada es escribirla en su mínima expresión.

Lección 4: (4/17) Operaciones con raíces cuadradas

Sección 4: Simplificación de raíces utilizando la descomposición de factores primos

Objetivo: Expresar un número de la forma $a\sqrt{b}$ utilizando la descomposición en factores primos.

Ejemplo **4.7**

Exprese los siguiente números en la forma $\sqrt{a}$:

a) $3\sqrt{5}$ b) $7\sqrt{2}$

Solución:

a) $3\sqrt{5} = 3 \times \sqrt{5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{45}$

b) $7\sqrt{2} = 7 \times \sqrt{2} = \sqrt{7^2} \times \sqrt{2} = \sqrt{49} \times \sqrt{2} = \sqrt{49 \times 2} = \sqrt{98}$

Cuadrados Perfectos

Números Naturales	Cuadrado de Números Naturales	Cuadrados Perfectos
1	1^2	1
2	2^2	4
3	3^2	9
4	4^2	16
5	5^2	25
6	6^2	36
7	7^2	49
⋮	⋮	⋮

Ejercicio **4.9** Exprese los siguientes números en la forma $\sqrt{a}$:

a) $2\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{7}$ c) $4\sqrt{5}$ d) $6\sqrt{2}$ e) $5\sqrt{3}$

Sección 4: Simplificación de raíces utilizando la descomposición en factores primos

Al expresar $5\sqrt{2}$ en la forma $\sqrt{a}$, se tiene que

$$5\sqrt{2} = 5 \times \sqrt{2} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{50}$$

Cuando se efectúa el proceso inverso queda expresado en la forma $a\sqrt{b}$, "b" queda en su mínima expresión. A este proceso se le llama **simplificación.**

Simplificar una raíz cuadrada es dejarla en su mínima expresión.

Ejemplo **4.8** Exprese $\sqrt{50}$ en la forma $a\sqrt{b}$.

Solución: $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{2} = 5 \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

Otra opción para simplificar es utilizar cuadrados perfectos. Ejemplos: 1, 4, 9, 16, $\boxed{25}$, ...

$50 = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{\boxed{25}} \times \sqrt{2} = 5 \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

Simplificación

$\sqrt{50} \longrightarrow 5\sqrt{2}$

Ejercicio **4.10** Exprese los siguientes números en la forma $a\sqrt{b}$:

a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{18}$

34 *Unidad 2 - Números reales*

2. Expresar una raíz cuadrada en su mínima expresión. *Ejemplo* **4.8**

(5 min)

* Utilizando el ejemplo anterior ¿cómo podemos hacer la representación de $\sqrt{50}$ de la forma $a\sqrt{b}$?

* Indicar que se puede utilizar la estrategia de descomponer el número en sus factores primos o también como el producto de dos números donde uno de ellos tenga raíz cuadrada exacta.

3. Resolver *Ejercicio* **4.10** *(8 min)*

Solución a) $2\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{2}$

continúa en la siguiente página...

Unidad 2: Números reales

Lección 4: (5/17) Operaciones con raíces cuadradas

Sección 5: Multiplicación y división de raíces cuadradas de la forma $a\sqrt{b}$

Objetivos:
- Multiplicar expresiones de la forma $a\sqrt{b}$
- Dividir expresiones de la forma $a\sqrt{b}$.

Ejemplo 4.9

Exprese $\sqrt{\frac{7}{9}}$ en la forma $\frac{\sqrt{a}}{b}$.

Solución: $\sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{9}}$
$= \frac{\sqrt{7}}{3}$

Si $a > 0$ y $b > 0$ se da que:
$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$
$\sqrt{\frac{a}{b^2}} = \frac{\sqrt{a}}{b}$

Ejercicio 4.11 Exprese los siguientes números en la forma $\frac{\sqrt{a}}{b}$:

a) $\sqrt{\frac{5}{16}}$ b) $\sqrt{\frac{3}{25}}$

Otra forma de simplificar una raíz cuadrada es descomponerla en sus factores primos.

Ejemplo 4.10

Exprese $\sqrt{72}$ en la forma $a\sqrt{b}$ mediante la descomposición en sus factores primos.

Solución:

$\sqrt{72} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 2}$
$= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{2}$
$= 2 \times 3 \times \sqrt{2}$
$= 6\sqrt{2}$

72
2 36
2 18
2 9
3 3

Recordando algunos números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

72	2	$> 2^2$
36	2	
18	2	
9	3	$> 3^2$
3	3	
1		

Ejercicio 4.12 Exprese los siguientes números en la forma $a\sqrt{b}$ mediante la descomposición en sus factores primos:

a) $\sqrt{48}$ b) $\sqrt{75}$

Sección 5: Multiplicación y división de raíces cuadradas de la forma $a\sqrt{b}$

En las raíces cuadradas de la forma $a\sqrt{b}$ se identifican las siguientes partes:

Coeficiente → $a\sqrt{b}$ ← Radicando

Ejemplo 4.11

Calcule $4\sqrt{6} \times 3\sqrt{5}$.

Solución: Se multiplican coeficientes con coeficientes y radicandos con radicandos.
$4\sqrt{6} \times 3\sqrt{5} = 4 \times 3 \times \sqrt{6} \times \sqrt{5}$
$= 12 \times \sqrt{30}$
$= 12\sqrt{30}$

Ejercicio 4.13 Calcule.

a) $3\sqrt{2} \times 4\sqrt{5}$ b) $2\sqrt{3} \times 8\sqrt{2}$ c) $5\sqrt{11} \times 5\sqrt{7}$
d) $8\sqrt{19} \times 6\sqrt{3}$ e) $7\sqrt{2} \times \sqrt{13}$ f) $\sqrt{7} \times 2\sqrt{6}$

$\sqrt{13} = 1 \times \sqrt{13}$
$\sqrt{7} = 1 \times \sqrt{7}$
$\sqrt{b} = 1 \times \sqrt{b}$

35

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

1. **Multiplicar raíces de la forma $a\sqrt{b}$. Ejemplo 4.11** *(5 min)*
* Indicar que piensen la manera como pueden encontrar el producto de $4\sqrt{6} \times 3\sqrt{5}$.
* Concluir que se debe multiplicar coeficiente por coeficiente y radicando por radicando.

2. **Resolver Ejercicio 4.13** *(20 min)*

Solución a) $12\sqrt{10}$ b) $16\sqrt{6}$ c) $25\sqrt{77}$ d) $48\sqrt{57}$ e) $7\sqrt{26}$ f) $2\sqrt{42}$

Indicador de logro

Calcule:
a) $3\sqrt{2} \times 4\sqrt{5}$
b) $\sqrt{7} \times 2\sqrt{6}$
c) $\frac{8\sqrt{10}}{2\sqrt{5}}$
d) $\frac{\sqrt{18}}{4\sqrt{6}}$

4. **Expresar una división de raíces como $\sqrt{\frac{7}{9}}$ de la forma $\frac{\sqrt{a}}{b}$. Ejemplo 4.9** *(3 min)*
* Haciendo uso de la propiedad de las divisiones de raíces indicar que encuentren la manera de expresar la división sin tener raíz en el denominador.
* Indicar que el denominador tiene raíz cuadrada exacta.
* Explicar que cuando el denominador tiene raíz cuadrada exacta y se extrae es otra forma de simplificar raíces.

5. **Resolver Ejercicio 4.11** *(8 min)*

Solución
a) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

6. **Simplificar raíces cuadradas utilizando la descomposición de factores primos. Ejemplo 4.10** *(6 min)*
* Explicar que otra forma de simplificar raíces es descomponiendo el número bajo el signo radical en sus factores primos.

7. **Resolver Ejercicio 4.12** *(10 min)*

Solución
a) $4\sqrt{3}$ b) $5\sqrt{3}$

[Hasta aquí Clase 4]
[Desde aquí Clase 5]

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Calcule y exprese el resultado en la forma $a\sqrt{b}$.

a) $\sqrt{15} \times \sqrt{21}$

b) $6\sqrt{15} \div 2\sqrt{3}$

c) $\sqrt{12} \times \sqrt{20}$

d) $4\sqrt{21} \div \sqrt{12}$

3. Dividir raíces de la forma $a\sqrt{b}$. Ejemplo 4.12

(5 min)

* Aplicando lo aprendido indicar que resuelvan el ejemplo planteado.

  ¿Cómo se puede simplificar $\dfrac{4\sqrt{15}}{2\sqrt{5}}$?

* Explicar que se utiliza la simplificación de los coeficientes y los radicandos por separado.

4. Resolver Ejercicio 4.14

(15 min)

Solución

a) $4\sqrt{2}$ b) $5\sqrt{23}$ c) $8\sqrt{5}$

[Hasta aquí Clase 5]

[Desde aquí Clase 6]

1. Calcular el producto de dos raíces cuadradas aplicando la simplificación. Ejemplo 4.13 (4 min)

* Presentar la situación del ejemplo y permitir que los estudiantes propongan maneras de resolverlo.
* ¿Al simplificar $\sqrt{10}$ que resulta?
* ¿Al simplificar $\sqrt{6}$ que resulta?
* Indicar que mediante la simplificación podemos agrupar raíces comunes y esto facilita el cálculo especialmente cuando las raíces son números grandes.

2. Resolver Ejercicio 4.15

(8 min)

Solución

a) $3\sqrt{35}$ b) $7\sqrt{10}$

Unidad 2: **Números reales**

Lección 4: (6/17) Operaciones con raíces cuadradas

Sección 6: Multiplicación y división de raíces cuadradas utilizando la simplificación

Objetivo: • Utilizar la simplificación para multiplicar o dividir raíces cuadradas.

Ejemplo 4.12

Calcule $\frac{4\sqrt{15}}{2\sqrt{5}}$.

Solución: $\frac{4\sqrt{15}}{2\sqrt{5}} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} \times \sqrt{\frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{1}{\cancel{5}}}}$

$= 2\sqrt{3}$

Ejercicio 4.14 Calcule.

a) $\frac{8\sqrt{10}}{2\sqrt{5}}$ b) $\frac{20\sqrt{69}}{4\sqrt{3}}$ c) $\frac{24\sqrt{55}}{3\sqrt{11}}$

Sección 6: Multiplicación y división de raíces cuadradas utilizando la simplificación

Ejemplo 4.13

Calcule $\sqrt{10} \times \sqrt{6}$ y exprese el resultado en la forma $a\sqrt{b}$.

Solución: $\sqrt{10} \times \sqrt{6} = \sqrt{2 \times 5} \times \sqrt{2 \times 3}$

$= \sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}$

$= (\sqrt{2})^2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{3}$

$= 2 \times \sqrt{15}$

$= 2\sqrt{15}$

Descomponiendo
10 como 2×5
6 como 2×3

Ejercicio 4.15 Calcule y exprese el resultado en la forma $a\sqrt{b}$.

a) $\sqrt{15} \times \sqrt{21}$ b) $\sqrt{35} \times \sqrt{14}$

Ejemplo 4.14

Calcule $4\sqrt{15} \div 2\sqrt{5}$ y exprese el resultado en la forma $a\sqrt{b}$.

Solución: $4\sqrt{15} \div 2\sqrt{5} = \frac{4\sqrt{15}}{2\sqrt{5}}$

$= \frac{4\sqrt{3 \times 5}}{2\sqrt{5}}$

$= \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\sqrt{3} \times \overset{1}{\cancel{\sqrt{5}}}}{\underset{1}{\cancel{2}}\underset{1}{\cancel{\sqrt{5}}}}$

$= 2\sqrt{3}$

En el Ejemplo 4.12, no se descompuso $\sqrt{15} = \sqrt{3} \times \sqrt{5}$ para cancelar el $\sqrt{5}$ del denominador, sino que se hizo la división $\sqrt{15} \div \sqrt{5}$ expresada como fracción $\sqrt{\frac{15}{5}}$ para obtener $\sqrt{3}$.
Este tipo de ejercicios puede resolverse utilizando cualquiera de las dos formas.

Ejercicio 4.16 Calcule y exprese el resultado en la forma $a\sqrt{b}$.

a) $6\sqrt{15} \div 2\sqrt{3}$ b) $10\sqrt{22} \div 2\sqrt{2}$

36

Unidad 2 - Números reales

3. Calcular el cociente de dos raíces aplicando la simplificación.

Ejemplo 4.14 (5 min)

* Indicar a los estudiantes que piensen la manera de resolver el ejercicio. Explicar de manera similar que en la multiplicación la ventaja de aplicar la simplificación es que permite reducir términos en algunos casos.

4. Resolver Ejercicio 4.16 (6 min)

Solución a) $3\sqrt{5}$ b) $5\sqrt{11}$

continúa en la siguiente página...

Unidad 2: **Números reales**

Lección 4: (7/17) Operaciones con raíces cuadradas

Sección 6: Multiplicación y división de raíces cuadradas utilizando la simplificación

Objetivo: Multiplicar y dividir raíces cuadradas.

Cuando los radicandos son cantidades grandes, es más conveniente simplificarlos primero antes de cualquier operación.

Ejemplo 4.15

Calcule $\sqrt{18} \times \sqrt{12}$.

Solución: $\sqrt{18} \times \sqrt{12} = 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{3}$
$= 6\sqrt{6}$

$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$
$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$

Ejercicio 4.17 Calcule.

a) $\sqrt{12} \times \sqrt{20}$ b) $\sqrt{45} \times \sqrt{8}$ c) $\sqrt{48} \times \sqrt{18}$

Ejemplo 4.16

Calcule $4\sqrt{22} \div \sqrt{8}$.

Solución: $4\sqrt{22} \div \sqrt{8} = \dfrac{4\sqrt{22}}{\sqrt{8}}$
$= \dfrac{\overset{2}{\cancel{4}}\overset{1}{\cancel{\sqrt{2}}} \times \sqrt{11}}{\underset{1}{\cancel{2}}\underset{1}{\cancel{\sqrt{2}}}}$
$= 2\sqrt{11}$

Otra forma de calcular
$\dfrac{4\sqrt{22}}{\sqrt{8}} = 4\sqrt{\dfrac{\overset{11}{\cancel{22}}}{\underset{4}{\cancel{8}}}}$
$= 4\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{4}}$
$= \dfrac{\overset{2}{\cancel{4}}\sqrt{11}}{\underset{1}{\cancel{2}}}$
$= 2\sqrt{11}$

Ejercicio 4.18 Calcule.

a) $4\sqrt{21} \div \sqrt{12}$ b) $8\sqrt{15} \div \sqrt{20}$ c) $6\sqrt{35} \div \sqrt{28}$

Ejemplo 4.17

Calcule.
a) $\sqrt{8} \times \sqrt{20} \div \sqrt{10}$ b) $2\sqrt{60} \div \sqrt{48} \times \sqrt{98}$

Solución:

a) $\sqrt{8} \times \sqrt{20} \div \sqrt{10} = 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{5} \div \sqrt{10}$ ... expresar en la forma $a\sqrt{b}$ (simplificar)
$= 4\sqrt{10} \div \sqrt{10}$ ... calcular producto
$= \dfrac{4\overset{1}{\cancel{\sqrt{10}}}}{\underset{1}{\cancel{\sqrt{10}}}}$ ... expresar en la forma fraccionaria
$= 4$ ... calcular cociente

b) $2\sqrt{60} \div \sqrt{48} \times \sqrt{98} = 2(2\sqrt{15}) \div 4\sqrt{3} \times 7\sqrt{2}$ ... simplificar
$= 4\sqrt{15} \div 4\sqrt{3} \times 7\sqrt{2}$ ... multiplicar coeficientes
$= \dfrac{\overset{1}{\cancel{4}}\sqrt{\overset{5}{\cancel{15}}}}{\underset{1}{\cancel{4}}\sqrt{\underset{1}{\cancel{3}}}} \times 7\sqrt{2}$ ... expresar en forma fraccionaria
$= \sqrt{5} \times 7\sqrt{2}$ ... calcular cociente
$= 7\sqrt{10}$ ... calcular producto

37

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

* Explicar que apliquen la simplificación de raíces antes de realizar las operaciones.
* Aplicar los procedimientos aprendidos en las clases anteriores para resolver. ¿Qué operación se debe hacer primero?
* Concluir que no importa ya que la multiplicación y la división tienen la misma prioridad.

Indicador de logro

Calcule y exprese el resultado en la forma $a\sqrt{b}$.

a) $\sqrt{27} \times \sqrt{8} \div \sqrt{6}$
b) $\sqrt{40} \div \sqrt{20} \times \sqrt{13}$

5. Resolver multiplicaciones de raíces cuando la cantidad del radicando es grande. Ejemplo 4.15
(4 min)

* Explicar que cuando las cantidades de los radicandos son muy grandes es conveniente simplificarlas primero y luego operar.
* Pedir a los estudiantes que resuelvan aplicando lo aprendido sin consultar el LE.

6. Resolver Ejercicio 4.17
(7 min)

Solución

a) $4\sqrt{15}$ b) $6\sqrt{10}$ c) $12\sqrt{6}$

7. Resolver divisiones de raíces cuando la cantidad del radicando es grande. Ejemplo 4.16
(3 min)

* De manera similar que el Ejemplo 4.15 indicar que es necesario primero simplificar y luego operar.

8. Resolver Ejercicio 4.18
(8 min)

Solución

a) $2\sqrt{7}$ b) $4\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{5}$

[Hasta aquí Clase 6]
[Desde aquí Clase 7]

1. Resolver multiplicaciones y divisiones de raíces cuadradas. Ejemplo 4.17
(20 min)

* Indicar que piensen la manera de resolverlos sin consultar el LE.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Racionalice:

a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

c) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

2. Resolver Ejercicio **4.19**

(25 min)

Solución

a) 6 b) $\sqrt{26}$ c) $4\sqrt{34}$ d) $2\sqrt{3}$

[Hasta aquí Clase 7]

[Desde aquí Clase 8]

1. Comprender el proceso de racionalizar una raíz cuadrada en el denominador

(5 min)

* Indicar a los estudiantes a encontrar utilizando la calculadora el valor de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

¿Cómo son los resultados?

¿Por qué son iguales?

¿Qué se puede decir de las expresiones $\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\frac{\sqrt{3}}{3}$?

Concluir que para eliminar el signo $\sqrt{\ }$ del denominador en $\frac{1}{\sqrt{3}}$ se multiplica por $\sqrt{3}$ tanto el numerador como el denominador.

2. Eliminar el signo $\sqrt{\ }$ del denominador de una división con raíces cuadradas. Ejemplo **4.18**

(5 min)

* Indicar que multipliquen $\frac{1}{\sqrt{3}}$ por $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$. Aclarar que esta fracción equivale a 1, por lo que no afecta el resultado.

* Concluir que cuando se convierte expresiones que llevan el signo $\sqrt{\ }$ en el denominador en expresiones que no lo llevan se le llama racionalización.

Unidad 2: **Números reales**

Lección 4: ***(8/17)*** Operaciones con raíces cuadradas

Sección 7: Racionalización de expresiones con raíz cuadrada en el denominador.

Objetivo: Racionalizar expresiones que tengan raíz cuadrada en el denominador.

Ejercicio **4.19** Calcule.

a) $\sqrt{27} \times \sqrt{8} \div \sqrt{6}$ b) $\sqrt{40} \div \sqrt{20} \times \sqrt{13}$

c) $\sqrt{96} \div \sqrt{12} \times \sqrt{68}$ d) $\sqrt{44} \times \sqrt{27} \div \sqrt{99}$

Sección 7: Racionalización de expresiones con raíz cuadrada en el denominador

Utilice la calculadora para encontrar el valor de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\frac{\sqrt{3}}{3}$, con $\sqrt{3} \fallingdotseq 1.73205$

¿Qué observa?

$\frac{1}{\sqrt{3}} = 1 \div \sqrt{3} \fallingdotseq 1 \div 1.73205 \fallingdotseq 0.57735$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \div 3 \fallingdotseq 1.73205 \div 3 \fallingdotseq 0.57735$

Los resultados son iguales.

Para eliminar el signo $\sqrt{\ }$ del denominador en $\frac{1}{\sqrt{3}}$ se multiplica por $\sqrt{3}$ tanto el numerador como el denominador.

Ejemplo **4.18**

Elimine el signo $\sqrt{\ }$ del denominador en $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Solución:

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ ... multiplicar por $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ $1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}$ $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 = 3$

El convertir expresiones que llevan el signo $\sqrt{\ }$ en el denominador en la forma cuyo denominador no contiene el signo $\sqrt{\ }$ se le denomina **racionalización**.

Ejercicio **4.20** Racionalice.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{3}{\sqrt{5}}$

38

Unidad 2 - Números reales

* Concluir en el resumen del LE.

3. Resolver Ejercicio **4.20** *(9 min)*

Solución

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

continúa en la siguiente página...

Unidad 2: **Números reales**

Lección 4: (8/17) Operaciones con raíces cuadradas

Sección 7: Racionalización de expresiones con raíz cuadrada en el denominador.

Objetivo: Racionalizar expresiones que tengan raíz cuadrada en el denominador.

Ejemplo 4.19

Racionalice $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

Solución:

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ ...multiplicar por $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$= \frac{\sqrt{10}}{5}$

Ejercicio 4.21 Racionalice.

a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ c) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

Ejemplo 4.20

Racionalice $\frac{3}{2\sqrt{6}}$.

Solución: Al racionalizar $\frac{c}{a\sqrt{b}}$, se multiplican el numerador y el denominador sólo por $\sqrt{b}$.

$$\frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{2\times 6} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}}\sqrt{6}}{\underset{4}{\cancel{12}}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

Ejercicio 4.22 Racionalice.

a) $\frac{4}{3\sqrt{5}}$ b) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$ c) $\frac{1}{4\sqrt{6}}$

39

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

Indicador de logro

Racionalice:

a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

c) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

4. Racionalizar el denominador de expresiones de la forma $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Ejemplo 4.19

(5 min)

* Permitir a los estudiantes que piensen la manera como resolverlo.

¿Cuál es la fracción por la cual debemos multiplicar la expresión dada?

* Concluir que el proceso es similar al del Ejemplo 4.18 y aplicar la multiplicación de raíces cuadradas.

5. Resolver Ejercicio 4.21

(8 min)

Solución

a) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{30}}{6}$ c) $\frac{\sqrt{21}}{3}$

6. Racionalizar el denominador de expresiones de la forma $\frac{c}{a\sqrt{b}}$. Ejemplo 4.20

(5 min)

* Resolver de manera similar que el ejemplo anterior.

* Concluir que en este caso se multiplica la expresión por la fracción cuyo numerador y denominador es $\sqrt{b}$.

7. Resolver Ejercicio 4.22

(8 min)

Solución

a) $\frac{4\sqrt{5}}{15}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{24}$

Indicador de logro

Sume o reste la siguientes operaciones:

a) $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$

c) $-4\sqrt{7} + 2\sqrt{7}$

d) $-\sqrt{2} - 7\sqrt{2}$

1. Resolver *Ejemplo* **4.21**

(15 min)

* Hacer un repaso de la reducción de términos semejantes estudiados en 7mo grado.

¿Cómo se reducen términos semejantes?

* Comparar la suma de términos semejantes en álgebra con la suma de raíces.

¿En qué se parecen las expresiones?

¿Cuál es la diferencia entre las expresiones $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ y $5a + 3a$?

Concluir que para sumar raíces cuadradas se puede pensar de la misma manera que cuando se suman expresiones algebraicas.

* Llamar a las expresiones que contienen raíces cuadradas con el mismo número, raíces semejantes.

* Concluir en el resumen del LE.

2. Resuelven sumas y restas de raíces cuadradas aplicando reducción de términos semejantes.

Ejemplo **4.22**

(10 min)

* Indicar que apliquen lo aprendido en reducción de expresiones algebraicas para sumar las raíces semejantes.

Unidad 2: **Números reales**

Lección 4: (9/17) Operaciones con raíces cuadradas

Sección 9: Suma y resta de raíces cuadradas semejantes

Objetivo: Sumar o restar raíces cuadradas semejantes.

Sección 8: Suma y resta de raíces cuadradas semejantes

Recuerde de 7mo grado cómo se reducen términos semejantes.

Ejemplo **4.21** Efectúe las siguientes operaciones.

a) $5a + 3a$ b) $2a + 3b$

Solución:

a) $5a + 3a = 5\boxed{a} + 3\boxed{a} = (5+3)\boxed{a} = 8\boxed{a}$

b) $2a + 3b = 2\boxed{a} + 3\boxed{b}$

¿Qué pasaría si se compara lo anterior con la suma y la resta de raíces cuadradas?

Observe $5\boxed{\sqrt{2}} + 3\boxed{\sqrt{2}}$ $2\boxed{\sqrt{2}} + 3\boxed{\sqrt{3}}$

$5\boxed{a} + 3\boxed{a}$ $2\boxed{a} + 3\boxed{b}$

¿En qué se parecen?, ¿cuál es la diferencia?

Para sumar raíces cuadradas, se puede pensar del mismo modo que cuando se suman expresiones algebraicas.

Las expresiones que contienen raíces cuadradas del mismo número se les denomina **raíces cuadradas semejantes.**

$3\sqrt{2}$ y $-5\sqrt{2}$ son raíces cuadradas semejantes.

$3\sqrt{2}$ y $-2\sqrt{3}$ no son raíces cuadradas semejantes.

Las raíces cuadradas semejantes pueden operarse sumando o restando los coeficientes y copiando la raíz cuadrada semejante.

Ejemplo **4.22**

Sume o reste las siguientes expresiones:

a) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$

Solución:

a) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (5+3)\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

$5\boxed{\sqrt{2}} + 3\boxed{\sqrt{2}} = (5+3)\boxed{\sqrt{2}}$

$5a + 3a = (5+3)a$

b) $2\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = (2-4)\sqrt{5} = -2\sqrt{5}$

$2\boxed{\sqrt{5}} - 4\boxed{\sqrt{5}} = (2-4)\boxed{\sqrt{5}}$

$2a - 4a = (2-4)a$

Ejercicio **4.23** Sume o reste las siguientes expresiones:

a) $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$ c) $9\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$ d) $-2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$

e) $7\sqrt{10} - \sqrt{10}$ f) $-4\sqrt{7} + 2\sqrt{7}$ g) $-\sqrt{2} - 7\sqrt{2}$

40 *Unidad 2 - Números reales*

3. Resolver *Ejercicio* **4.23**

(20 min)

Solución

a) $3\sqrt{3}$ b) $6\sqrt{5}$ c) $7\sqrt{3}$ d) 0

e) $6\sqrt{10}$ f) $-2\sqrt{7}$ g) $-8\sqrt{2}$

Lección 4: (10/17) Operaciones con raíces cuadradas

Sección 8: Suma y resta de raíces cuadradas semejantes

Objetivo: Identificar raíces cuadradas semejantes para sumar o restar.

Recuerda ¿cómo se calcula $6a + 3b - 4a$?

$6\boxed{a} + 3b - 4\boxed{a} = (6-4)\boxed{a} + 3b$
$= 2a + 3b$

$2a$ y $3b$ no tienen la misma variable, por tanto, no son semejantes y no se pueden reducir.

Ejemplo 4.23

De manera similar se calculará $6\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$.

Solución: $6\boxed{\sqrt{2}} + 3\sqrt{3} - 4\boxed{\sqrt{2}} = (6-4)\boxed{\sqrt{2}} + 3\sqrt{3}$
$= 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$

$2\boxed{\sqrt{2}} + 3\boxed{\sqrt{3}}$
$2\boxed{a} + 3\boxed{b}$
$2a$ y $3b$ no se pueden reducir.

Ejercicio 4.24 Calcule.

a) $6\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}$
b) $7\sqrt{6} + 4\sqrt{10} + 2\sqrt{10}$
c) $5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$
d) $15\sqrt{13} - 20\sqrt{13} + 4\sqrt{11}$

Ejemplo 4.24

Calcule $7\sqrt{10} + 4\sqrt{7} - 10\sqrt{7} - 3\sqrt{10}$.

Recuerde solo sumar o restar las raíces semejantes

Solución: $7\boxed{\sqrt{10}} + 4\boxed{\sqrt{7}} - 10\boxed{\sqrt{7}} - 3\boxed{\sqrt{10}} = (7-3)\boxed{\sqrt{10}} + (4-10)\boxed{\sqrt{7}}$
$= 4\boxed{\sqrt{10}} + (-6)\boxed{\sqrt{7}}$
$= 4\sqrt{10} - 6\sqrt{7}$

Ejercicio 4.25 Calcule.

a) $4\sqrt{5} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$
b) $10\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$
c) $-3\sqrt{17} - 4\sqrt{23} + 6\sqrt{17} + 7\sqrt{23}$
d) $5\sqrt{26} + 5\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$

41
Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

5. **Resolver Ejercicio 4.25** *(15 min)*

Solución

a) $2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$
b) $5\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$
c) $3\sqrt{17} + 3\sqrt{23}$
d) $5\sqrt{26} + 15\sqrt{3}$

Indicador de logro

Calcule:

a) $6\sqrt{3} - 2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}$
b) $4\sqrt{5} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$

1. **Comparar la suma y la resta de raíces semejantes con la suma y resta de expresiones algebraicas con variables diferentes.**
   (10 min)
   * Hacer un recordatorio de la reducción de términos semejantes con diferentes variables.
   ¿Cómo se calcula $6a + 3b - 4a$?
   Concluir que en este caso es necesario agrupar los términos semejantes y sumarlos o restarlos y copiar el otro término.

2. **Resolver sumas y restas de raíces cuadradas aplicando reducción de términos semejantes. Ejemplo 4.23**
   (5 min)
   * Permitir que los estudiantes traten de resolverlo sin ayuda del LE.
   ¿Cómo se puede resolver las operaciones?
   * Concluir que de manera similar que se hace con las expresiones algebraicas se realizan las operaciones con raíces semejantes

3. **Resolver Ejercicio 4.24**
   (10 min)
   Solución
   a) $3\sqrt{3} + 2\sqrt{5}$
   b) $7\sqrt{6} + 6\sqrt{10}$
   c) $2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$
   d) $-5\sqrt{13} + 4\sqrt{11}$

4. **Agrupar raíces semejantes para sumar o restar.**
   Ejemplo 4.24
   (5 min)
   * Indicar que apliquen lo aprendido en el ejemplo anterior para encontrar la solución.

Indicador de logro

Calcule:

a) $\sqrt{2} + \sqrt{8}$

b) $\sqrt{18} - \sqrt{32}$

1. Sumar o restar raíces aplicando simplificación.

Ejemplo 4.25

(20 min)

* Presentar la resta y la suma de raíces dadas en el ejemplo y permitir que los estudiantes propongan maneras de resolver.

¿Se puede resolver $\sqrt{27} - \sqrt{3}$?
¿Son raíces semejantes?
¿Qué se puede hacer con $\sqrt{27}$?

* Concluir que cuando las raíces se pueden simplificar es necesario primero simplificar para luego verificar si se obtienen raíces semejantes y realizar la operación.

Cuando se simplifica $\sqrt{27}$, ¿qué resultó?
¿Se puede resolver la resta?

* De forma similar explicar la manera de resolver $\sqrt{18} + \sqrt{8}$.

* Indicar que en este caso las dos raíces se pueden simplificar.

* Concluir que para sumar o restar raíces, es necesario primero simplificar para identificar si existen raíces semejantes.

2. Resolver Ejercicio 4.26

(25 min)

Solución

a) $3\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$
c) $-3\sqrt{7}$ d) $-\sqrt{10}$
e) $5\sqrt{3}$ f) $-\sqrt{2}$
g) $-5\sqrt{6}$ h) $\sqrt{7}$

Unidad 2: Números reales

Lección 4: (11/17) Operaciones con raíces cuadradas

Sección 9: Suma y resta de raíces cuadradas semejantes utilizando simplificación

Objetivo: Sumar o restar raíces cuadradas utilizando la simplificación.

Sección 9: Suma y resta de raíces cuadradas semejantes utilizando simplificación

Ejemplo 4.25

Sume o reste las siguientes raíces cuadradas:

a) $\sqrt{27} - \sqrt{3}$ b) $\sqrt{18} + \sqrt{8}$

Es incorrecto
$\sqrt{27} - \sqrt{3} = \sqrt{24}$ ✗
$\sqrt{18} + \sqrt{8} = \sqrt{26}$ ✗

Solución

a) Para sumar o restar raíces cuadradas, en ocasiones es necesario simplificar primero, para identificar si existen raíces semejantes.

$\sqrt{27} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3} - \sqrt{3}$ ... simplificar
$= 2\sqrt{3}$ ... restar coeficientes y copiar raíz cuadrada semejante

$\sqrt{27} = \sqrt{3^2 \times 3} = 3\sqrt{3}$

$\sqrt{3} = 1\sqrt{3}$

b) $\sqrt{18} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$ ... simplificar
$= 5\sqrt{2}$ ... sumar coeficientes y copiar raíz cuadrada semejante

$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$
$\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$

Ejercicio 4.26 Sume o reste las siguientes raíces cuadradas:

a) $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ b) $\sqrt{12} - \sqrt{3}$

c) $-\sqrt{28} - \sqrt{7}$ d) $-\sqrt{40} + \sqrt{10}$

e) $\sqrt{12} + \sqrt{27}$ f) $\sqrt{18} - \sqrt{32}$

g) $-\sqrt{24} - \sqrt{54}$ h) $-\sqrt{28} + \sqrt{63}$

42 Unidad 2 - Números reales

Ejercicios adicionales

a) $\sqrt{45} - \sqrt{5}$ b) $\sqrt{40} - \sqrt{90}$ c) $-\sqrt{44} + \sqrt{99}$ d) $-\sqrt{48} - \sqrt{12}$

Solución

a) $2\sqrt{5}$ b) $-\sqrt{10}$ c) $\sqrt{11}$ d) $-6\sqrt{3}$

Unidad 2: **Números reales**

Lección 4: (12/17) Operaciones con raíces cuadradas

Sección 9: Suma y resta de raíces cuadradas utilizando simplificación

Objetivo: Sumar y restar raíces cuadradas utilizando la simplificación.

Ejemplo 4.26

Calcule $3\sqrt{12} + 8\sqrt{2} - \sqrt{72}$.

Solución:

Primero se tiene que simplificar las raíces cuadradas e identificar si estas son semejantes.

$$3\sqrt{12} + 8\sqrt{2} - \sqrt{72} = 3(2\sqrt{3}) + 8\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$$
$$= 6\sqrt{3} + (8-6)\sqrt{2}$$
$$= 6\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$$

$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$

$\sqrt{72} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 2}$
$= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{2}$
$= 2 \times 3 \times \sqrt{2}$
$= 6\sqrt{2}$

Ejercicio 4.27 Calcule.

a) $\sqrt{8} + \sqrt{20} - \sqrt{18}$ b) $\sqrt{48} + 6\sqrt{3} + 8\sqrt{2}$

c) $-2\sqrt{75} - \sqrt{27} - 7\sqrt{6}$ d) $\sqrt{32} - 2\sqrt{50} + 9\sqrt{2}$

Ejemplo 4.27

Calcule $3\sqrt{10} + \sqrt{28} + \sqrt{40} + \sqrt{63}$.

Solución:

$$3\sqrt{10} + \sqrt{28} + \sqrt{40} + \sqrt{63} = 3\sqrt{10} + 2\sqrt{7} + 2\sqrt{10} + 3\sqrt{7}$$
$$= (3+2)\sqrt{10} + (2+3)\sqrt{7}$$
$$= 5\sqrt{10} + 5\sqrt{7}$$

$\sqrt{28} = \sqrt{2^2 \times 7} = 2\sqrt{7}$

$\sqrt{40} = \sqrt{2^2 \times 10} = 2\sqrt{10}$

$\sqrt{63} = \sqrt{3^2 \times 7} = 3\sqrt{7}$

Ejercicio 4.28 Calcule.

a) $\sqrt{45} + \sqrt{27} + \sqrt{20} + 8\sqrt{3}$ b) $\sqrt{24} - \sqrt{96} + 5\sqrt{11} + 2\sqrt{54}$

c) $2\sqrt{44} + \sqrt{99} - 5\sqrt{17} + 5\sqrt{11}$ d) $\sqrt{8} + \sqrt{56} + \sqrt{98} + 9\sqrt{2}$

43

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

4. **Resolver** **Ejercicio 4.28** (20 min)

Solución

a) $\sqrt{45} + \sqrt{27} + \sqrt{20} + 8\sqrt{3} = 3\sqrt{5} + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 8\sqrt{3} = 5\sqrt{5} + 11\sqrt{3}$

b) $\sqrt{24} - \sqrt{96} + 5\sqrt{11} + 2\sqrt{54} = 2\sqrt{6} - 4\sqrt{6} + 5\sqrt{11} + 6\sqrt{6} = 4\sqrt{6} + 5\sqrt{11}$

c) $2\sqrt{44} + \sqrt{99} - 5\sqrt{17} + 5\sqrt{11} = 4\sqrt{11} + 3\sqrt{11} - 5\sqrt{17} + 5\sqrt{11} = 12\sqrt{11} - 5\sqrt{17}$

d) $\sqrt{8} + \sqrt{56} + \sqrt{98} + 9\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{14} + 7\sqrt{2} + 9\sqrt{2} = 18\sqrt{2} + 2\sqrt{14}$

Indicador de logro

Calcule:

a) $\sqrt{8} + \sqrt{20} - \sqrt{18}$

b) $\sqrt{45} + \sqrt{27} + \sqrt{20} + 8\sqrt{3}$

1. **Resolver sumas y restas combinadas de raíces cuadradas aplicando la simplificación.** **Ejemplo 4.26**
(5 min)
* Indicar a los estudiantes que simplifiquen las raíces presentadas en el ejemplo.
* Recordar la manera de simplificar raíces cuadradas que tienen coeficientes ($3\sqrt{12}$).
¿Qué sucede cuando se simplifican las tres raíces?
¿Son semejantes?
* Concluir que en este caso dos de las tres raíces cuadradas son semejantes por lo tanto estas se agrupan y se restan.

2. **Resolver** **Ejercicio 4.27**
(15 min)
Solución
a) $-\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$
b) $10\sqrt{3} + 8\sqrt{2}$
c) $-13\sqrt{3} - 7\sqrt{6}$
d) $3\sqrt{2}$

3. **Aplicar la simplificación de raíces para resolver sumas y restas combinadas.** **Ejemplo 4.27**
(5 min)
* Explicar que de forma similar que el ejemplo anterior se debe simplificar primero para identificar las raíces cuadradas que son semejantes y luego realizar las operaciones.
* Al simplificar la raíces dadas ¿qué se puede concluir?
* Indicar que agrupen las que son semejantes y luego las sumen o las resten.

Unidad 2: **Números reales**

Lección 4: (13/17) Operaciones con raíces cuadradas

Sección 10: Suma y resta de raíces cuadradas utilizando racionalización

Objetivo: Sumar o restar raíces cuadradas utilizando la racionalización.

Indicador de logro

Calcule:

a) $5\sqrt{2} + \frac{6}{\sqrt{2}}$

b) $2\sqrt{3} - \frac{9}{\sqrt{3}}$

1. Resolver sumas o restas combinadas de raíces cuadradas aplicando la racionalización.

Ejemplo 4.28

(15 min)

Presentar la operación planteada en el inciso a).

¿Cómo podemos resolver esta suma?

¿Qué operación se debe realizar primero?

* Concluir que para realizar el cálculo se tiene que racionalizar primero, es decir eliminar $\sqrt{2}$ del denominador.

* Indicar que resuelvan el inciso b) siguiendo los mismos procesos que en el inciso a).

2. Resolver **Ejercicio 4.29**

(30 min)

Solución

a) $8\sqrt{2}$

b) $-\sqrt{3}$

c) $\sqrt{5}$

d) $-11\sqrt{7}$

e) $6\sqrt{5}$

f) $-\sqrt{3}$

g) $3\sqrt{6}$

h) $-7\sqrt{13}$

Sección 10: Suma y resta de raíces cuadradas utilizando racionalización

Ejemplo 4.28

Calcule.

a) $5\sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{12}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}$

Solución:

a) Para realizar estos cálculos se tiene que racionalizar primero, es decir, eliminar del denominador el $\sqrt{2}$ de $\frac{4}{\sqrt{2}}$.

Paso 1: Racionalizar

$$\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\cancelto{2}{4}\sqrt{2}}{\cancelto{1}{2}}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

Paso 2: Reducir las raíces semejantes

$$5\sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$

$$= 7\sqrt{2}$$

Se racionalizó

$$5\sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$

b) **Paso 1:** Racionalizar

$$\frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\cancelto{4}{12}\sqrt{3}}{\cancelto{1}{3}}$$

$$= 4\sqrt{3}$$

Paso 2: Reducir las raíces semejantes

$$\frac{12}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

Se racionalizó

$$\frac{12}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$$

Ejercicio 4.29 Calcule.

a) $5\sqrt{2} + \frac{6}{\sqrt{2}}$ b) $2\sqrt{3} - \frac{9}{\sqrt{3}}$ c) $-\sqrt{5} + \frac{10}{\sqrt{5}}$ d) $-7\sqrt{7} - \frac{28}{\sqrt{7}}$

e) $\frac{15}{\sqrt{5}} + 3\sqrt{5}$ f) $\frac{18}{\sqrt{3}} - 7\sqrt{3}$ g) $-\frac{12}{\sqrt{6}} + 5\sqrt{6}$ h) $-\frac{26}{\sqrt{13}} - 5\sqrt{13}$

Ejercicios adicionales

a) $6\sqrt{7} - \frac{14}{\sqrt{7}}$ b) $-8\sqrt{2} + \frac{6}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{18}{\sqrt{6}} - \sqrt{6}$ d) $-\frac{55}{\sqrt{11}} + 3\sqrt{11}$

Solución

a) $4\sqrt{7}$ b) $-5\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{6}$ d) $-2\sqrt{11}$

Unidad 2: **Números reales**

Lección 4: (14/17) Operaciones con raíces cuadradas

Sección 11: Propiedad distributiva en expresiones con raíces cuadradas

Objetivo: Usar la propiedad distributiva cuando hay un paréntesis en una expresión con raíces cuadradas.

Ejemplo 4.29

Calcule $5\sqrt{18} - \frac{6}{\sqrt{2}}$.

Solución: $5\sqrt{18} - \frac{6}{\sqrt{2}} = 5(3\sqrt{2}) - \frac{6}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ... Simplificar raíz de 18 y racionalizar $-\frac{6}{\sqrt{2}}$

$= 15\sqrt{2} - \frac{6\sqrt{2}}{2}$

$= 15\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$

$= 12\sqrt{2}$

$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2}$
$= 3\sqrt{2}$

Cuando una expresión tiene el signo $\sqrt{\ }$ en el denominador debe racionalizarse.

Ejercicio 4.30 Calcule.

a) $\sqrt{18} - \frac{4}{\sqrt{2}}$ b) $\sqrt{27} + \frac{6}{\sqrt{3}}$ c) $\sqrt{20} - \frac{15}{\sqrt{5}}$ d) $\sqrt{50} - \frac{6}{\sqrt{2}}$

e) $\sqrt{54} + \frac{6}{\sqrt{6}}$ f) $\frac{9}{\sqrt{3}} - \sqrt{48}$ g) $\frac{10}{\sqrt{5}} + \sqrt{45}$ h) $-\frac{12}{\sqrt{6}} + \sqrt{96}$

Sección 11: Propiedad distributiva en expresiones con raíces cuadradas

Ejercicio 4.31 Desarrolle la expresión $a(b + c)$.

Para hacer este desarrollo se aplica la propiedad distributiva.

Anteriormente se multiplicaron raíces cuadradas. Ahora se multiplicarán expresiones que contienen raíces cuadradas.

Ejemplo 4.30

Multiplique las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{5})$ b) $\sqrt{3}(\sqrt{6} + 2\sqrt{5})$

$a\,(b + c) = a \times b + a \times c$

$\sqrt{2}\,(\sqrt{3} + \sqrt{5}) = \sqrt{2} \times \sqrt{3} + \sqrt{2} \times \sqrt{5}$

Solución:

a) $\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{5}) = \sqrt{2} \times \sqrt{3} + \sqrt{2} \times \sqrt{5}$
$= \sqrt{6} + \sqrt{10}$

b) $\sqrt{3}(\sqrt{6} + 2\sqrt{5}) = \sqrt{3} \times \boxed{\sqrt{6}} + \sqrt{3} \times 2\sqrt{5}$

$= \sqrt{3} \times \boxed{(\sqrt{3} \times \sqrt{2})} + 2\sqrt{15}$
$= (\sqrt{3})^2 \times \sqrt{2} + 2\sqrt{15}$
$= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{15}$

45

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

2. Multiplicar expresiones que contienen raíces cuadradas aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación. *Ejemplo* **4.28** *(7 min)*

* Indicar que apliquen el mismo procedimiento que en el *Ejercicio* **4.31** para resolver.
* Explicar que se debe aplicar lo aprendido en la multiplicación de raíces para resolver.
* Concluir en el resumen del LE.

Indicador de logro

Calcule:

a) $\sqrt{18} - \frac{4}{\sqrt{2}}$ b) $\sqrt{27} + \frac{6}{\sqrt{3}}$

1. Resolver sumas y restas de raíces cuadradas aplicando la simplificación y la racionalización. *Ejemplo* **4.29**

(15 min)

* Presentar el ejercicio y permitir que piensen la manera de resolver aplicando lo aprendido en clases anteriores.

  ¿Qué operaciones se deben hacer antes de resolver la resta de las raíces cuadradas?

  Aplicar la simplificación de raíces al ejemplo planteado.

* Indicar que racionalicen $\frac{6}{\sqrt{2}}$.

  Al reescribir la resta después de simplificar y racionalizar ¿resultan raíces cuadradas semejantes?

* Indicar que encuentren el resultado.

2. Resolver *Ejercicio* **4.30**

(30 min)

Solución

a) $\sqrt{2}$ b) $5\sqrt{3}$
c) $-\sqrt{5}$ d) $2\sqrt{2}$
e) $4\sqrt{6}$ f) $-\sqrt{3}$
g) $5\sqrt{5}$ h) $2\sqrt{6}$

[Hasta aquí Clase 14]
[Desde aquí Clase 15]

1. Resolver *Ejercicio* **4.31**

(3 min)

Solución

$ab + ac$

Este ejercicio se hace con el objetivo de repasar la propiedad distributiva de la multiplicación.

* Explicar que en clase anteriores se multiplicaban raíces cuadradas y en esta clase se multiplicarán expresiones que contienen raíces cuadradas.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Calcule:

a) $\sqrt{3}(2\sqrt{2} - \sqrt{5})$

b) $(3 + \sqrt{5})(4 - 2\sqrt{5})$

3. Resolver *Ejercicio* **4.32**

(10 min)

Solución

a) $2\sqrt{6} - \sqrt{15}$

b) $\sqrt{2} + 6$

c) $12 - 6\sqrt{2}$

d) $10\sqrt{2} - \sqrt{15}$

e) $-2\sqrt{5} + 2\sqrt{7}$

f) $8\sqrt{2} - 8$

4. Multiplicar binomios que contienen raíces cuadradas aplicando la propiedad distributiva. *Ejemplo* **4.31**

(15 min)

* Presentar la expresión planteada en el ejemplo y pedirles que piensen la forma de resolverlo.
* Hacer un recordatorio de la multiplicación de binomios aplicando la propiedad distributiva: $(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d)$
* Aplicar este mismo procedimiento en la multiplicación dada.
* Aplicar los procedimientos aprendidos anteriormente para encontrar el resultado.

5. Resolver *Ejercicio* **4.33**

(10 min)

Solución

a) $2 - 2\sqrt{5}$

b) $4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{7} - \sqrt{21}$

Unidad 2: **Números reales**

Lección 4: (15/17) Operaciones con raíces cuadradas

Sección 11: Propiedad distributiva en expresiones con raíces cuadradas

Objetivo: Usar la propiedad distributiva cuando hay un paréntesis en una expresión con raíces cuadradas.

Cuando hay paréntesis en una expresión con raíces cuadradas, estos se pueden eliminar usando la propiedad distributiva.

Ejercicio **4.32** Multiplique las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{3}\,(2\sqrt{2} - \sqrt{5})$ b) $\sqrt{2}\,(1 + 3\sqrt{2})$ c) $2\sqrt{3}\,(\sqrt{12} - \sqrt{6})$

d) $\sqrt{5}\,(2\sqrt{10} - \sqrt{3})$ e) $\sqrt{2}\,(-\sqrt{10} + \sqrt{14})$ f) $\sqrt{2}\,(8 - 4\sqrt{2})$

Ejemplo **4.31**

Multiplique $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{3})$.

Respuesta:

$$(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{3}) = \sqrt{5}(\sqrt{7} + \sqrt{3}) + \sqrt{2}(\sqrt{7} + \sqrt{3})$$
$$= \sqrt{5}\times\sqrt{7} + \sqrt{5}\times\sqrt{3} + \sqrt{2}\times\sqrt{7} + \sqrt{2}\times\sqrt{3}$$
$$= \sqrt{35} + \sqrt{15} + \sqrt{14} + \sqrt{6}$$

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d)$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{7}) = \sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{7}) + \sqrt{3}(\sqrt{5} + \sqrt{7})$$

Ejercicio **4.33** Multiplique.

a) $(3 + \sqrt{5})(4 - 2\sqrt{5})$ b) $(2 - \sqrt{7})(2 + \sqrt{3})$

Unidad 2: Números reales

Lección 4: (16/17) Operaciones con raíces cuadradas

Sección 12: Operaciones con raíces cuadradas

Objetivo: Realizar cálculos con raíces cuadradas empleando la fórmula de los productos notables.

Indicador de logro

Calcule:

a) $\sqrt{3} + 5$

b) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

c) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$

d) $(\sqrt{11} + \sqrt{2})(\sqrt{11} - \sqrt{2})$

Sección 12: **Operaciones con raíces cuadradas**

Recordemos $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

Ejemplo 4.32

Calcule $(\sqrt{2} + 4)(\sqrt{2} - 2)$.

¿Podemos usar alguna fórmula?

Solución:

$$\begin{aligned}(\sqrt{2} + 4)(\sqrt{2} - 2) &= (\sqrt{2})^2 + [4 + (-2)]\sqrt{2} + 4(-2)\\ &= 2 + 2\sqrt{2} - 8\\ &= -6 + 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$(x + a)(x + \boxed{b}) = x^2 + (a + \boxed{b})x + a\boxed{b}$$

$$(\sqrt{2} + 4)[\sqrt{2} + \boxed{(-2)}] = (\sqrt{2})^2 + [4 + \boxed{(-2)}]\sqrt{2} + 4\boxed{(-2)}$$

Ejercicio 4.34 Calcule.

a) $(\sqrt{3} + 5)(\sqrt{3} - 2)$ b) $(\sqrt{7} + 3)(\sqrt{7} + 2)$ c) $(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} - 4)$

Recordemos $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

Ejemplo 4.33

Calcule $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$.

Solución:

$$\begin{aligned}(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 &= (\sqrt{5})^2 + 2(\sqrt{5})(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2\\ &= 5 + 2\sqrt{15} + 3\\ &= 8 + 2\sqrt{15}\end{aligned}$$

$$(x + \boxed{y})^2 = x^2 + 2\,x\,\boxed{y} + \boxed{y}^2$$

$$(\sqrt{5} + \boxed{\sqrt{3}})^2 = (\sqrt{5})^2 + 2(\sqrt{5})(\boxed{\sqrt{3}}) + (\boxed{\sqrt{3}})^2$$

47

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

---

1. Hacer un recordatorio de la fórmula de producto notable $(x + a)(x + b)$.

(3 min)

¿A qué es igual la expresión $(x + a)(x + b)$?

* Concluir que

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$.

2. Calcular multiplicación de binomios que contienen raíces cuadradas.

Ejemplo 4.32

(7 min)

* Comparar la multiplicación de binomios con la expresión dada.

¿En qué se parecen estas expresiones?

¿Se puede aplicar el mismo procedimiento del binomio en la multiplicación dada?

¿Qué valor representa a y b en la expresión dada?

¿Qué valor representa x?

Indicar que sustituyan los valores en la fórmula del binomio y que encuentren el resultado.

3. Resolver Ejercicio 4.34

(7 min)

Solución

a) $-7 + 3\sqrt{3}$

b) $13 + 5\sqrt{7}$

c) $9 - 5\sqrt{5}$

4. Hacer un recordatorio de las fórmulas de productos notables $(x + y)^2$

(3 min)

¿A qué es igual la expresión $(x + y)^2$

* Concluir que

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

5. Aplicar el producto notable $(x + y)^2$ para calcular expresiones que contienen raíces cuadradas.

Ejemplo 4.33

(5 min)

* De forma similar que en el **Ejemplo 4.32** explicar la manera de encontrar el producto planteado.

¿Qué valores representan x, y en la expresión dada?

* Al sustituir los valores, ¿cuál es el resultado?

continúa en la siguiente página...

Unidad 2: **Números reales**

Lección 4: (16/17) Operaciones con raíces cuadradas

Sección 12: Operaciones con raíces cuadradas

Objetivo: Realizar cálculos con raíces cuadradas empleando la fórmula de los productos notables.

Indicador de logro

Calcule:

a) $\sqrt{3} + 5$
b) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$
c) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$
d) $(\sqrt{11} + \sqrt{2})(\sqrt{11} - \sqrt{2})$

6. Resolver *Ejercicio* **4.35**
(6 min)
Solución
a) $5 + 2\sqrt{6}$
b) $7 - 2\sqrt{10}$
c) $12 + 2\sqrt{35}$

7. Hacer un recordatorio de la fórmula de producto notable $(x + a)(x - a)$.
(3 min)
¿A qué es igual la expresión $(x + a)(x - a)$?
* Concluir que
$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$.

8. Aplicar el producto notable $(x + a)(x - a)$. Para calcular expresiones que contienen raíces cuadradas.
Ejemplo **4.34**
(4 min)
* De forma similar que en el *Ejemplo* **4.33** explicar la manera de encontrar el producto planteado.
¿Qué valores representan a x y a a en la expresión dada?
* Al sustituir los valores, ¿cuál es el resultado?
* Indicar que resuelvan la expresión.

9. Resolver *Ejercicio* **4.36**
(7 min)
Solución
a) 9
b) -5
c) 2
d) -3

Ejercicio **4.35** Calcule.

a) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ b) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$ c) $(\sqrt{7} + \sqrt{5})^2$

Recordemos $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$

Ejemplo **4.34**

Calcule $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

Solución:

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2$$
$$= 3 - 2$$
$$= 1$$

$$(x + \boxed{a})(x - \boxed{a}) = x^2 - \boxed{a}^2$$
$$\downarrow$$
$$(\sqrt{3} + \boxed{\sqrt{2}})(\sqrt{3} - \boxed{\sqrt{2}}) = (\sqrt{3})^2 - (\boxed{\sqrt{2}})^2$$

Ejercicio **4.36** Calcule.

a) $(\sqrt{11} + \sqrt{2})(\sqrt{11} - \sqrt{2})$

b) $(\sqrt{2} - \sqrt{7})(\sqrt{2} + \sqrt{7})$

c) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})$

d) $(\sqrt{3} - \sqrt{6})(\sqrt{3} + \sqrt{6})$

Unidad 2: **Números reales**

Lección 4: (17/17) Operaciones con raíces cuadradas

Sección 12: Operaciones con raíces cuadradas

Objetivo: Realizar cálculos con raíces cuadradas utilizando sustitución.

Ejemplo 4.35

Si $a = \sqrt{3} - 2$, calcule $a^2 - 4$.

Solución 1:

Se sustituye el valor de a

$$\begin{aligned} a^2 - 4 &= (\sqrt{3} - 2)^2 - 4 \\ &= (\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{3})(2) + (-2)^2 - 4 \\ &= 3 - 4\sqrt{3} + 4 - 4 \\ &= 3 - 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

Solución 2:

Primero se desarrolla la diferencia de cuadrados y luego se sustituye el valor de a

$$\begin{aligned} a^2 - 4 &= (a + 2)(a - 2) \\ &= [(\sqrt{3} - 2) + 2][(\sqrt{3} - 2) - 2] \\ &= \sqrt{3}(\sqrt{3} - 4) \\ &= (\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3} \\ &= 3 - 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

Al comparar las soluciones 1 y 2, se observa que ambas respuestas son iguales, por lo que se puede emplear cualquiera de los dos procedimientos.

Ejercicio 4.37 Si $x = \sqrt{5} + 1$, calcule.

a) $x^2 - 1$ b) $x^2 + 5x - 6$

Ejemplo 4.36

Si $x = \sqrt{3} + 2$, $y = \sqrt{3} - 2$, calcule $x^2 + xy$.

Solución 1:

Se sustituye el valor de x y y

$$\begin{aligned} x^2 + xy &= (\sqrt{3} + 2)^2 + (\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2) \\ &= (3 + 4\sqrt{3} + 4) + [(\sqrt{3})^2 - (2)^2] \\ &= (7 + 4\sqrt{3}) + (3 - 4) \\ &= 7 + 4\sqrt{3} - 1 \\ &= 6 + 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

Solución 2:

Se factoriza y luego se sustituye el valor de x y y

$$\begin{aligned} x^2 + xy &= x(x + y) \\ &= (\sqrt{3} + 2)[(\sqrt{3} + 2) + (\sqrt{3} - 2)] \\ &= (\sqrt{3} + 2)(2\sqrt{3}) \\ &= 2(\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3} \\ &= 2(3) + 4\sqrt{3} \\ &= 6 + 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

Para resolver ejercicios de este tipo, puede emplear cualquiera de las 2 formas.

Ejercicio 4.38 Si $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $y = \sqrt{2} - \sqrt{3}$, calcule.

a) $x^2 - y^2$ b) $x^2 + 2xy + y^2$

49

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

Indicador de logro

Calcule:

a) Si $x = \sqrt{5} + 1$ calcule $x^2 - 1$

b) Si $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $y = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ calcule $x^2 - y^2$

1. Encontrar el valor de expresiones como a^2 - 4 sustituyendo el valor de la variable. Ejemplo 4.35

(10 min)

* Permitir a los estudiantes encontrar diferentes formas de resolver.

  ¿Qué operación podríamos hacer primero?

  ¿Qué observan al momento de sustituir el valor de a?

  ¿Hay algún producto notable que se puede desarrollar?

* Explicar que podemos resolver la operación de dos formas: **Solución 1**: primero sustituyendo y luego desarrollando el producto notable que se genera, **Solución 2**: factorizando a^2 - 4 y luego sustituyendo.

* Concluir que si se aplica cualquiera de las formas propuestas anteriormente se obtendrá el mismo resultado.

2. Resolver Ejercicio 4.37

(10 min)

Solución

a) $5 + 2\sqrt{5}$ b) $5 + 7\sqrt{5}$

3. Encontrar el valor de $x^2 + xy$ sustituyendo el valor de las variables x, y.

Ejemplo 4.36

(10 min)

* De forma similar que en Ejemplo 4.35 explicar la forma de encontrar el valor de la expresión.

* Explicar las dos soluciones propuestas en el LE.

4. Resolver Ejercicio 4.38

(15 min)

Solución

a) $4\sqrt{6}$ b) 8

Unidad 2: Números reales

(1/2) Ejercicios de la unidad

Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre números reales.

1 Encontrar la raíz cuadrada de un número.

Solución

a) ± 3 b) ± 4 c) $\pm \sqrt{10}$

d) $\pm \frac{5}{2}$ e) $\pm \sqrt{7}$

2 Expresar sin el signo $\sqrt{\ }$ un número.

Solución

a) 6 b) -2 c) 5 d) $\frac{1}{4}$ e) 3

3 Establecer relación de orden con raíces cuadradas.

Solución

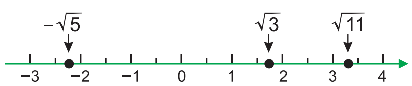
a) $\sqrt{11} > \sqrt{9}$ b) $\sqrt{7} < 3$

c) $6 > \sqrt{31}$ d) $5 < \sqrt{26}$

e) $\sqrt{68} < 8.3$

4 Representar números irracionales en la recta numérica.

Solución



5 Multiplicar y dividir raíces cuadradas.

Solución

a) $\sqrt{21}$ b) 4 c) $\sqrt{7}$

d) $\sqrt{2}$ e) 2

6 Expresar en la forma $\sqrt{a}$.

Solución

a) $\sqrt{20}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{50}$

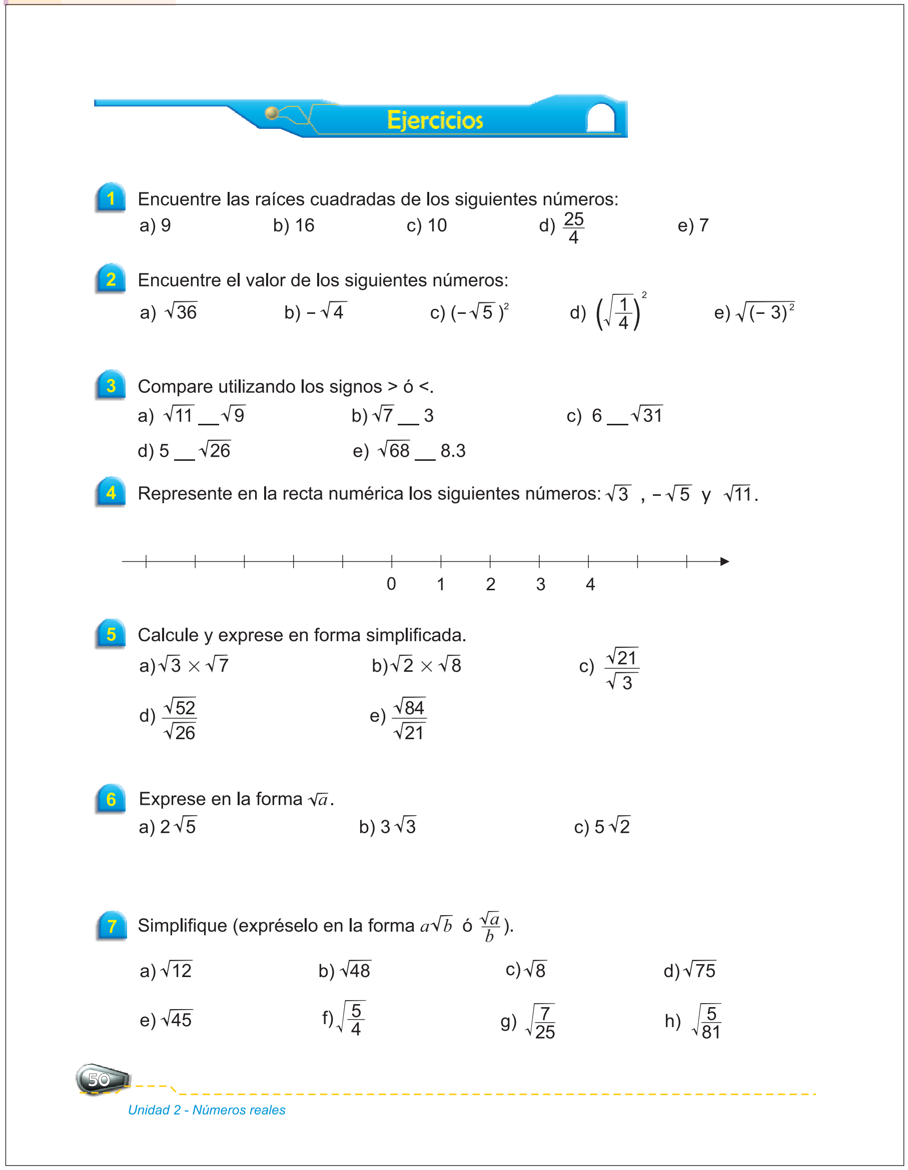
7 Simplificar raíces cuadradas

Solución

a) $2\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{2}$

d) $5\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{5}$ f) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

g) $\frac{\sqrt{7}}{5}$ h) $\frac{\sqrt{5}}{9}$



Ejercicios

1 Encuentre las raíces cuadradas de los siguientes números:

a) 9 b) 16 c) 10 d) $\frac{25}{4}$ e) 7

2 Encuentre el valor de los siguientes números:

a) $\sqrt{36}$ b) $-\sqrt{4}$ c) $(-\sqrt{5})^2$ d) $\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^2$ e) $\sqrt{(-3)^2}$

3 Compare utilizando los signos > ó <.

a) $\sqrt{11}$ __ $\sqrt{9}$ b) $\sqrt{7}$ __ 3 c) 6 __ $\sqrt{31}$

d) 5 __ $\sqrt{26}$ e) $\sqrt{68}$ __ 8.3

4 Represente en la recta numérica los siguientes números: $\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$ y $\sqrt{11}$.

0 1 2 3 4

5 Calcule y exprese en forma simplificada.

a) $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$ b) $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$ c) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}}$

d) $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{26}}$ e) $\frac{\sqrt{84}}{\sqrt{21}}$

6 Exprese en la forma $\sqrt{a}$.

a) $2\sqrt{5}$ b) $3\sqrt{3}$ c) $5\sqrt{2}$

7 Simplifique (expréselo en la forma $a\sqrt{b}$ ó $\frac{\sqrt{a}}{b}$).

a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{48}$ c) $\sqrt{8}$ d) $\sqrt{75}$

e) $\sqrt{45}$ f) $\sqrt{\frac{5}{4}}$ g) $\sqrt{\frac{7}{25}}$ h) $\sqrt{\frac{5}{81}}$

50 Unidad 2 - Números reales

continúa en la siguiente página...

Unidad 2: **Números reales**

(2/2) Ejercicios de la unidad

Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre números reales.

8 Calcule.

a) $2\sqrt{5} \times 4\sqrt{6}$ b) $11\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ c) $15\sqrt{13} \times \sqrt{10}$ d) $\sqrt{7} \times 8\sqrt{5}$

e) $\frac{12\sqrt{14}}{3\sqrt{7}}$ f) $\frac{5\sqrt{36}}{\sqrt{12}}$ g) $\frac{30\sqrt{66}}{10\sqrt{11}}$ h) $\frac{\sqrt{40}}{2\sqrt{8}}$

9 Calcule.

a) $6\sqrt{15} \div \sqrt{12}$ b) $9\sqrt{22} \div \sqrt{18}$ c) $3\sqrt{10} \div \sqrt{45}$ d) $10\sqrt{14} \div \sqrt{32}$

10 Calcule.

a) $\sqrt{20} \times \sqrt{18} \div \sqrt{10}$ b) $\sqrt{80} \div \sqrt{20} \times \sqrt{2}$

11 Racionalice.

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$ e) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ f) $\frac{4}{5\sqrt{2}}$

12 Sume o reste las siguientes expresiones.

a) $5\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$ b) $-2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$ c) $-6\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$

d) $9\sqrt{10} - 14\sqrt{10}$ e) $-2\sqrt{6} + 2\sqrt{6}$ f) $-8\sqrt{7} + 11\sqrt{7}$

13 Calcule.

a) $-\sqrt{3} + 4\sqrt{5} - \sqrt{3}$ b) $12\sqrt{11} - 5\sqrt{2} - 19\sqrt{11}$

c) $7\sqrt{10} + 4\sqrt{7} - 10\sqrt{7} - 7\sqrt{10}$ d) $9\sqrt{15} - 3\sqrt{6} - 3\sqrt{6} + 10\sqrt{6}$

e) $\sqrt{3} - \sqrt{27}$ f) $\sqrt{5} + \sqrt{45}$

14 Calcule.

a) $\sqrt{12} - \sqrt{18} + \sqrt{27}$ b) $4\sqrt{6} + \sqrt{32} + \sqrt{24} + \sqrt{50}$

51

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

14 Sumar y restar raíces cuadradas aplicando simplificación.

Solución

a) $5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

b) $6\sqrt{6} + 9\sqrt{2}$

8 Multiplicar o dividir raíces cuadradas.

Solución

a) $8\sqrt{30}$ b) $11\sqrt{6}$ c) $15\sqrt{130}$

d) $8\sqrt{35}$ e) $4\sqrt{2}$ f) $5\sqrt{3}$

g) $3\sqrt{6}$ h) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

9 Dividir raíces cuadradas.

Solución

a) $3\sqrt{5}$ b) $3\sqrt{11}$

c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{5\sqrt{7}}{2}$

10 Multiplicar y dividir raíces cuadradas.

Solución

a) 6 b) $2\sqrt{2}$

[Hasta aquí Clase 1]

[Desde aquí Clase 2]

11 Representar números irracionales en la recta numérica.

Solución

a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\frac{\sqrt{15}}{5}$

d) $\frac{\sqrt{42}}{7}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ f) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$

12 Sumar o restar expresiones con raíces.

Solución

a) $2\sqrt{5}$ b) $-5\sqrt{3}$ c) $-2\sqrt{2}$

d) $-5\sqrt{10}$ e) 0 f) $3\sqrt{7}$

13 Sumar y restar expresiones con raíces.

Solución

a) $-2\sqrt{3} + 4\sqrt{5}$

b) $-7\sqrt{11} - 5\sqrt{2}$

c) $-6\sqrt{7}$

d) $9\sqrt{15} + 4\sqrt{6}$

e) $-2\sqrt{3}$

f) $4\sqrt{5}$

continúa en la siguiente página...

Unidad 2: **Números reales**

(2/2) Ejercicios de la unidad

Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre números reales.

15 Calcule.

a) $\sqrt{3} - \frac{6}{\sqrt{3}}$ b) $-4\sqrt{10} + \frac{50}{\sqrt{10}}$ c) $\frac{21}{\sqrt{7}} + 6\sqrt{7}$ d) $-\frac{30}{\sqrt{5}} - 6\sqrt{5}$

16 Calcule.

a) $\sqrt{12} + \frac{9}{\sqrt{3}}$ b) $-\frac{10}{\sqrt{2}} - \sqrt{50}$ c) $\sqrt{28} - \frac{14}{\sqrt{7}}$ d) $-\frac{30}{\sqrt{6}} + \sqrt{54}$

17 Multiplique.

a) $\sqrt{5}(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ b) $6\sqrt{3}(-\sqrt{3} + 1)$ c) $\sqrt{2}(-2 + \sqrt{10})$

d) $(2 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3})$ e) $(\sqrt{7} - 5)(\sqrt{7} - 3)$

18 Multiplique.

a) $(\sqrt{2} - 3)(\sqrt{2} + 6)$ b) $(\sqrt{10} + 2)(\sqrt{10} - 5)$ c) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$

d) $(\sqrt{2} - \sqrt{7})^2$ e) $(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})$ f) $(\sqrt{11} - \sqrt{6})(\sqrt{11} + \sqrt{6})$

19 Si $x = \sqrt{2} - 1$, calcule.

a) $x^2 - 1$ b) $x^2 + 2x - 3$

20 Si $x = \sqrt{5} + 3$, $y = \sqrt{5} - 3$, calcule.

a) $y^2 + xy$ b) $x^2 - y^2$

15 Sumar o restar expresiones con raíces aplicando la racionalización.

Solución

a) $-\sqrt{3}$ b) $\sqrt{10}$ c) $9\sqrt{7}$

d) $-12\sqrt{5}$

16 Sumar o restar expresiones con raíces aplicando la simplificación y la racionalización.

Solución

a) $5\sqrt{3}$ b) $-10\sqrt{2}$

c) 0 d) $-2\sqrt{6}$

17 Multiplicar expresiones aplicando la propiedad distributiva.

Solución

a) $\sqrt{10} - \sqrt{15}$

b) $-18 + 6\sqrt{3}$

c) $-2\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$

d) $5 + 2\sqrt{3}$

e) $22 - 8\sqrt{7}$

18 Multiplicar binomios aplicando productos notables.

Solución

a) $3\sqrt{2} - 16$ b) $-3\sqrt{10}$

c) $8 + 2\sqrt{15}$ d) $9 - 2\sqrt{14}$

e) -2 f) 5

19 Resolver expresiones sustituyendo la variable x.

Solución

a) $2 - 2\sqrt{2}$ b) -2

20 Resolver expresiones sustituyendo la variable x y y.

Solución

a) $10 - 6\sqrt{5}$ b) $12\sqrt{5}$

Método común de aproximación o redondeo

Escriba el valor aproximado hasta las centésimas de las siguientes raíces:

a) $\sqrt{17}$ b) $\sqrt{7}$ c) $\sqrt{11}$ d) $\sqrt{23}$

Solución:

Para redondear o aproximar un número, primero debe determinarse qué cifra se va a redondear. En este caso, la cifra a redondear es la que ocupa el lugar de las centésimas, es decir, el segundo dígito a la derecha del punto decimal.

Regla 1: Si el dígito que está a la derecha de la cifra a redondear es menor que 5 (1, 2, 3 o 4), la cifra a redondear queda tal y como está.

De este modo, para el inciso a)

Cifra a redondear

a) $\sqrt{17} = 4.12\underline{3}105625...$

$\sqrt{17} \approx 4.12$

es menor que 5

Como el dígito que está a la derecha de las centésimas es 3 y 3 es menor que 5, entonces la cifra a redondear queda igual.

Regla 2: Si el dígito que está a la derecha de la cifra a redondear es mayor o igual que 5 (5, 6, 7, 8 o 9), se debe sumar 1 a la cifra a redondear.

De este modo, para los incisos b), c) y d).

Cifra a redondear

b) $\sqrt{7} = 2.64\underline{5}751311...$

$\sqrt{7} \approx 2.65$

es igual que 5

Como el dígito que está a la derecha de las centésimas es 5 para el inciso b) y 6 para el inciso c) y ambos son mayores o iguales que 5, entonces se le sumó 1 a la cifra a redondear.

Cifra a redondear

c) $\sqrt{11} = 3.31\underline{6}62479...$

$\sqrt{11} \approx 3.32$

es mayor que 5

d) $\sqrt{23} = 4.79\underline{5}83152...$

$\sqrt{23} \approx 4.80$

es igual que 5

En este caso la cifra a redondear es 9 por lo tanto al sumarle 1 se convierte en 10, así que se debe colocar cero y sumar 1 a la cifra anterior que es 7.

53

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

¿$\sqrt{2}$ es un número irracional?

Solución:

Si suponemos que $\sqrt{2}$ es un número racional, éste se puede escribir como $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ donde a y b son números naturales y números primos entre sí.

Elevando al cuadrado ambos lados,

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$$
$$2 = \frac{b^2}{a^2}$$
$$2a^2 = b^2$$

Cuando b^2 es número par, b también es número par.
Por eso, se puede escribir como

$b = 2m$, donde m es número natural

Entonces, $2a^2 = b^2$

$$2a^2 = (2m)^2$$
$$2a^2 = 4m^2$$
$$a^2 = 2m^2$$

a^2 es número par, por eso a también es número par.
Lo anterior contradice que a y b son números primos entre sí.
Por lo que, $\sqrt{2}$ no se puede escribir como
$\sqrt{2} = \frac{b}{a}$, donde a y b son números naturales y números primos entre sí.
Entonces, $\sqrt{2}$ no es un número racional.
Por tanto, se puede decir que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Un número irracional es un número real que no es racional.

En 8vo grado, se ha utilizado el método de demostración directo o deductivo. En la demostración de por qué $\sqrt{2}$ es un número irracional, se ha empleado un método indirecto: demostración por contradicción o reducción al absurdo.

La idea general es suponer que la proposición que se quiere demostrar es falsa ($\sqrt{2}$ es un número racional), y a partir de ella, usando deducciones matemáticas, llegar a una contradicción o algo absurdo (a y b no son números primos entre sí), lo cual implica que nuestra proposición es necesariamente cierta ($\sqrt{2}$ es un número irracional).

Unidad 3
Ecuaciones de segundo grado

Lección 1: Ecuaciones de segundo grado

Lección 2: Resolución de ecuaciones de segundo grado

Lección 3: Aplicación de las ecuaciones de segundo grado

Ecuaciones de segundo grado

(13 horas)

1 Expectativas de logro

- Reconocen situaciones que se pueden describir mediante ecuaciones cuadráticas.
- Aplican sus conocimientos de ecuaciones cuadráticas en una variable para resolver problemas de la vida diaria.

2 Relación y desarrollo

Séptimo grado

Variables y expresiones
- Expresión algebraica (EA)
- Reglas convencionales
- Expresión de cantidades con variables
- Valor numérico de EAs
- Términos y coeficientes de EAs
- Adición y sustracción de EAs
- Multiplicación y división de EAs

Ecuaciones de primer grado en una variable
- Ecuaciones de primer grado (Definición)
- Propiedades de la igualdad y sus aplicaciones
- Resolución de ecuaciones de primer grado
- Aplicación

Octavo grado

Polinomios
- Monomios y polinomios
- Adición y sustracción de polinomios
- Multiplicación y división de polinomios por un número
- Multiplicación y división de monomios

Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables
- Despeje de una variable
- Sistema de dos ecuaciones de primer grado (Definición)
- Resolución de sistemas mediante:
  - Tablas
  - Método de eliminación
  - Método de sustitución
- Varios tipos de sistemas
- Aplicación

Funciones de primer grado
- Funciones de primer grado
- Razón de cambio
- Sistema de coordenadas
- Gráfica de funciones de primer grado
- Expresión de una función de primer grado $y = ax + b$ mediante su gráfica
- Expresión de una función de primer grado $y = ax + b$ a partir de dos puntos
- Criterio de paralelismo y perpendicularidad
- Solución gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables
- Gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables
- Solución gráfica de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables
- Aplicación

Noveno grado

Polinomios
- Multiplicación y división de un polinomio por un monomio
- Multiplicación de polinomios
- Valor numérico de un polinomio
- Productos notables
- Aplicación de productos notables
- Factorización de polinomios
- Aplicación de la factorización

Ecuaciones de segundo grado
- Ecuación de segundo grado (Definición)
- Resolución de ecuaciones mediante:
  - Sustitución de valores
  - Factorización
  - Raíz cuadrada
  - Completación de cuadrados
  - Fórmula cuadrática
- Aplicación

3 Plan de estudio (13 horas)

Lección	Distribución de horas	Contenidos
1. Ecuaciones de segundo grado (2 horas)	1/2	• Ecuaciones de segundo grado
	2/2	• Resolución de ecuaciones de segundo grado sustituyendo valores
2. Resolución de ecuaciones de segundo grado (6 horas)	1~2/6	• Resolución de ecuaciones de segundo grado usando factorización
	3/6	• Resolución de ecuaciones de segundo grado usando raíz cuadrada
	4/6	• Resolución de ecuaciones de segundo grado usando completación de cuadrados
	5~6/6	• Resolución de ecuaciones de segundo grado usando fórmula cuadrática
3. Aplicación de las ecuaciones de segundo grado (3 horas)	1~3/3	• Aplicación de las ecuaciones de segundo grado
Ejercicios (2 horas)	1~2/2	

4 Puntos de lección

Análisis de las pruebas diagnósticas 2016 – 2017

Unidad 3: Ecuaciones de segundo grado

[Pregunta] Resuelva la ecuación
$x^2 - 7x + 6 = 0.$

Institutos: 3% CEB: 0% (2017)

Para resolver esta pregunta, se puede aplicar la fórmula cuadrática, sin embargo generalmente se resuelve por factorización. Por lo tanto, es necesario que los estudiantes aprendan los contenidos de la unidad 1 (Polinomios, que incluye la factorización) de 9no grado. Actualmente los estudiantes no comprenden esta temática y esto se refleja en los bajos resultados.

Lección 1: Ecuaciones de segundo grado

En 7mo grado los estudiantes aprendieron las ecuaciones de primer grado en una variable, en este grado aprenderán las ecuaciones de segundo grado, en este libro se utilizará este nombre sin embargo es importante que los estudiantes sepan que también se les llama ecuaciones cuadráticas.

Se le llama ecuación de segundo grado a aquella expresión que después del desarrollo se representa como:

(Polinomio de grado dos) = 0.

$(x - 3)^2 = x^2 + 1$ no es una ecuación de segundo grado porque después que se desarrolla es equivalente a $6x - 8 = 0$ y esta es una ecuación de primer grado.

La solución de una ecuación de segundo grado son los números que satisfacen la ecuación.

Lección 2: Resolución de ecuaciones de segundo grado

Hay varias maneras de resolver las ecuaciones de segundo grado, por medio de: la factorización, la raíz cuadrada, la completación de cuadrados y la fórmula cuadrática.

Uso de la factorización

Cuando el producto de dos números es cero, uno de los números es cero, es decir, si AB = 0 entonces A = 0 o B = 0. Aplicando esto a la ecuación $(x - a)(x - b) = 0$ se sabe que $x = a$ y $x = b$.

Ejemplo: Resuelva $x^2 - 2x - 3 = 0$.

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0 \quad \ldots \text{ factorizar}$$

Por lo tanto $x - 3 = 0$ o $x + 1 = 0$, de esto se deduce que $x = 3$ y $x = -1$.

En el caso de las ecuaciones cuadráticas cuyos coeficientes son números racionales, si es factorizable las soluciones son números racionales, pero hay ecuaciones que tienen soluciones que no son números racionales, en este último caso la completación al cuadrado es útil. En este grado solo se estudiarán ecuaciones de segundo grado que tienen solución en el conjunto de los números reales.

Uso de la completación de cuadrados

La ecuación de la forma $(x - a)^2 = b$, donde $b \geq 0$, se puede resolver como se presenta a continuación:

$$(x - a)^2 = b$$

$$x - a = \pm\sqrt{b}$$

$$x = a \pm \sqrt{b}$$

La expresión $a \pm \sqrt{b}$ representa a $a + \sqrt{b}$ y al mismo tiempo a $a - \sqrt{b}$.

Para transformar cualquier ecuación cuadrática usando esta forma se procede de la siguiente manera:

Como $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$, para convertir $x^2 + bx$ en la forma de un trinomio cuadrado perfecto se suma $(\frac{b}{2})^2$, es decir, que:

$$x^2 + bx + (\tfrac{b}{2})^2 = x^2 + 2(\tfrac{b}{2})x + (\tfrac{b}{2})^2$$
$$= (x + \tfrac{b}{2})^2$$

Aplicando esta transformación es posible solucionar una ecuación de segundo grado.

Ejemplo: Resuelva $x^2 + 5x - 1 = 0$.

Paso 1. Trasladar el término independiente al lado derecho.

Paso 2. Sumar a ambos lados el cuadrado de la mitad del coeficiente de x.

Paso 3. Factorizar el lado izquierdo con trinomio cuadrado perfecto y operar el derecho.

Paso 4. Extraer la raíz cuadrada.

Paso 5. Trasladar la constante al lado derecho.

$$x^2 + 5x - 1 = 0$$

$$x^2 + 5x = 1 \quad \text{...Paso 1}$$

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \quad \text{...Paso 2}$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{29}{4}\right)^2 \quad \text{...Paso 3}$$

$$x + \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{29}{4}} \quad \text{...Paso 4}$$

$$x = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{29}}{2} \quad \text{...Paso 5}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

Cuando el coeficiente del término cuadrático no es 1, se divide entre ese coeficiente y se siguen los pasos descritos anteriormente.

Ejemplo: Resuelva $5x^2 + 7x + 1 = 0$.

Dividir ambos lados entre 5.

$$x^2 + \frac{7}{5}x + \frac{1}{5} = 0$$

$$x^2 + \frac{7}{5}x = -\frac{1}{5} \qquad \text{...Paso 1}$$

$$x^2 + \frac{7}{5}x + \left(\frac{7}{10}\right)^2 = -\frac{1}{5} + \left(\frac{7}{10}\right)^2 \qquad \text{...Paso 2}$$

$$\left(x + \frac{7}{10}\right)^2 = \frac{29}{100} \qquad \text{...Paso 3}$$

$$x + \frac{7}{10} = \pm\frac{\sqrt{29}}{10} \qquad \text{...Paso 4}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{29}}{10} \qquad \text{...Paso 5}$$

Aplicando el proceso anterior a la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ (donde $a \neq 0$) se obtiene la fórmula cuadrática. Si $b^2 + 4ac \geq 0$ las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Cuando no se puede utilizar la factorización se usa la fórmula cuadrática para resolver una ecuación de segundo grado.

De la fórmula cuadrática se sabe lo siguiente en relación a las soluciones:

a) Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales.

b) Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una solución real.

c) Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales.

A la expresión $b^2 - 4ac$ se le llama discriminante.

Lección 3: Aplicación de las ecuaciones de segundo grado

Para resolver problemas donde se aplican las ecuaciones de segundo grado, primero hay que representar una de las cantidades del problema con la variable x y establecer una ecuación que refleje la relación entre las cantidades.

Después de resolver la ecuación, hay que examinar si las soluciones son las respuestas al problema. En este sentido, en el Ejemplo 3.1 $x = -5$ y $x = 4$ son soluciones de la ecuación pero $x = -5$ no es solución del problema ya que este establece que los números deben ser naturales.

Plan de pizarra Lección 2 Sección 1 Página 79 de GD

Tema: Resolución de ecuaciones de segundo grado mediante factorización 1

Ejemplo **2.4** 2 **Pág.** 61 3

Resuelva $2x^2 + 3x - 9 = 0$

Solución 4

$2x^2 + 3x - 9 = 0$

$(2x - 3)(x + 3) = 0$ ... Factorizar el lado izquierdo

$2x - 3 = 0$ *o* $x + 3 = 0$ ... Igualar a cero cada factor

$2x = 3$ *o* $x = -3$ ... Resolver cada ecuación

$x = \frac{3}{2}$ *o* $x = -3$

Respuesta: Las soluciones son $x = \frac{3}{2}, x = -3.$ 4 ✓

Ejercicio **2.4** 2 **Pág.** 61 3

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas.

Solución 4

a) $2x^2 + 7x + 3 = 0$

$(2x + 1)(x + 3) = 0$

$2x + 1 = 0$ *o* $x + 3 = 0$

$x = -\frac{1}{2}$ *o* $x = -3$

Respuesta: Las soluciones son $x = -\frac{1}{2}, x = -3.$ 4 ✓

b) $3x^2 - 5x - 2 = 0$

$(3x + 1)(x - 2) = 0$

$3x + 1 = 0$ *o* $x - 2 = 0$

$x = -\frac{1}{3}$ *o* $x = 2$

Respuesta: Las soluciones son $x = -\frac{1}{3}, x = 2.$ 4 ✓

c) $5x^2 + 9x - 2 = 0$

$(5x - 1)(x + 2) = 0$

$5x - 1 = 0$ *o* $x + 2 = 0$

$x = \frac{1}{5}$ *o* $x = -2$

Respuesta: Las soluciones son $x = \frac{1}{5}, x = -2.$ 4 ✓

Ejemplo **2.5** 2 **Pág.** 61 3

Resuelva $(x + 3)(x - 1) = 5.$

$(x + 3)(x - 1) = 5$

$x^2 + 2x - 3 = 5$ ... Desarrollar el lado izquierdo

$x^2 + 2x - 8 = 0$ ... Transponer el 5

$(x + 4)(x - 2) = 0$ ... Factorizar el lado izquierdo

$x + 4 = 0$ ó $x - 2 = 0$ ... Igualar a cero cada factor

$x = -4$ ó $x = 2$ ... Resolver cada ecuación

Respuesta: Las soluciones son $x = -4, x = 2.$ 4 ✓

Ejercicio **2.5** 2 **Pág.** 61 3

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas.

Solución 4

a) $(x - 6)(x - 3) = 4$

$x^2 - 3x - 6x + 18 = 4$

$x^2 - 9x + 14 = 0$

$(x - 7)(x - 2) = 0$

$x - 7 = 0$ o $x - 2 = 0$

$x = 7$ o $x = 2$

Respuesta: Las soluciones son $x = 7, x = 2.$ ✓ 4

b) $(x + 5)(x - 2) = 8$

$x^2 - 2x + 5x - 10 = 8$

$x^2 + 3x - 18 = 0$

$(x + 6)(x - 3) = 0$

$x + 6 = 0$ o $x - 3 = 0$

$x = -6$ o $x = 3$

Respuesta: Las soluciones son $x = -6, x = 3.$ ✓ 4

Para seguir con el ejercicio se puede borrar la parte izquierda de la pizarra.

1. Al inicio de la clase escribir solo la palabra "**Tema**" y hasta el final de la clase (o en el desarrollo de la misma) escribir el contenido del tema.
2. Escribir el número del *Ejemplo* o *Ejercicio*.
3. Escribir el número de **Pág.** del LE para entender dónde se quedaron con respecto al tiempo.
4. Escribir la **Solución** y **Respuesta**.
5. En el problema planteado marcar los datos importantes para poder llegar a la respuesta.
6. Escribir la conclusión en un rectángulo de color rojo.

✓ Marcar en el *Ejercicio* cuando la solución o la respuesta sean correctas.

Nota: Los puntos aquí explicados no siempre aplican todos en un plan de pizarra.

Tema: Aplicación de las ecuaciones de segundo grado 1

Ejemplo 3.1 2   **Pág.** 68 3

Hay dos números naturales consecutivos. La suma de los cuadrados de estos números es 41. ¿Cuáles son estos números?

Solución 4

Primer número: x → $x = 4$

Consecutivo: $x + 1$ → $x + 1 = 4 + 1 = 5$

Sus cuadrados: x^2; $(x + 1)^2$

$x^2 + (x + 1)^2 = 41$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 41$

$2x^2 + 2x - 40 = 0$

$x^2 + x - 20 = 0$ Dividiendo entre 2

$(x + 5)(x - 4) = 0$

$x + 5 = 0$ o $x - 4 = 0$

$x = -5$ o $x = 4$

No es un número natural   **Sí** es un número natural

Respuesta: Los números son 4 y 5. 4

Ejercicio 3.1 2   **Pág.** 68 3

a) Hay dos números naturales consecutivos. La suma de los cuadrados de estos números es 85. ¿Cuáles son estos números?

Solución 4

Primer número: x → $x = 6$

Consecutivo: $x + 1$ → $x + 1 = 6 + 1 = 7$

Sus cuadrados: x^2; $(x + 1)^2$

$x^2 + (x + 1)^2 = 85$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 85$

$2x^2 + 2x - 84 = 0$

$x^2 + x - 42 = 0$ Dividiendo entre 2

$(x - 6)(x + 7) = 0$

$x - 6 = 0$ o $x + 7 = 0$

$x = 6$ o $x = -7$

Sí es un número natural   No es un número natural

Respuesta: Los números son 6 y 7. ✓ 4

b) El producto de dos números naturales consecutivos es 72. ¿Cuáles son esos números?

Solución 4

Primer número: x → $x = 8$

Consecutivo: $x + 1$ → $x + 1 = 8 + 1 = 9$

Su producto: $x(x + 1)$

$x(x + 1) = 72$

$x^2 + x = 72$

$x^2 + x - 72 = 0$

$(x - 8)(x + 9) = 0$

$x - 8 = 0$ o $x + 9 = 0$

$x = 8$ o $x = -9$

Sí es un número natural   No es un número natural

Respuesta: Los números son 8 y 9. ✓ 4

1 Al inicio de la clase escribir solo la palabra "**Tema**" y hasta el final de la clase (o en el desarrollo de la misma) escribir el contenido del tema.

2 Escribir el número del Ejemplo o Ejercicio.

3 Escribir el número de **Pág.** del LE para entender dónde se quedaron con respecto al tiempo.

4 Escribir la **Solución** y **Respuesta**.

5 En el problema planteado marcar los datos importantes para poder llegar a la respuesta.

6 Escribir la conclusión en un rectángulo de color rojo.

✓ Marcar en el Ejercicio cuando la solución o la respuesta sean correctas.

Nota: Los puntos aquí explicados no siempre aplican todos en un plan de pizarra.

Indicador de logro

De las siguientes ecuaciones, ¿cuáles son cuadráticas?

a) $x^2 + 5x - 6 = 0$

b) $-10x + 7 = 0$

1. Expresar el área de un rectángulo como una ecuación.

Ejemplo **1.1**

(7 min)

* Hacer una representación gráfica del problema.

* ¿Cuánto mide el ancho del rectángulo?

* Si el ancho mide x cm, ¿cuánto mide el largo del rectángulo? ¿Cómo se puede expresar el área del rectángulo?

* Si el área del rectángulo es 88 cm², ¿qué ecuación se forma?

* Definir el primer y segundo miembro de la ecuación.

2. Sustituir valores de x en la ecuación.

(7 min)

* Sustituyan el valor de x por 6 en la ecuación. ¿Cuál es el valor? ¿Este valor es igual a 88?

* De forma similar hacer la sustitución para $x = 7$ y $x = 8$. ¿Qué sucede cuando se sustituye el valor de 8 en la ecuación?

* Concluir que $x = 8$ es un valor que satisface la ecuación.

3. Llamar ecuación de segundo grado al desarrollo de $(x + 3)x = 88$.

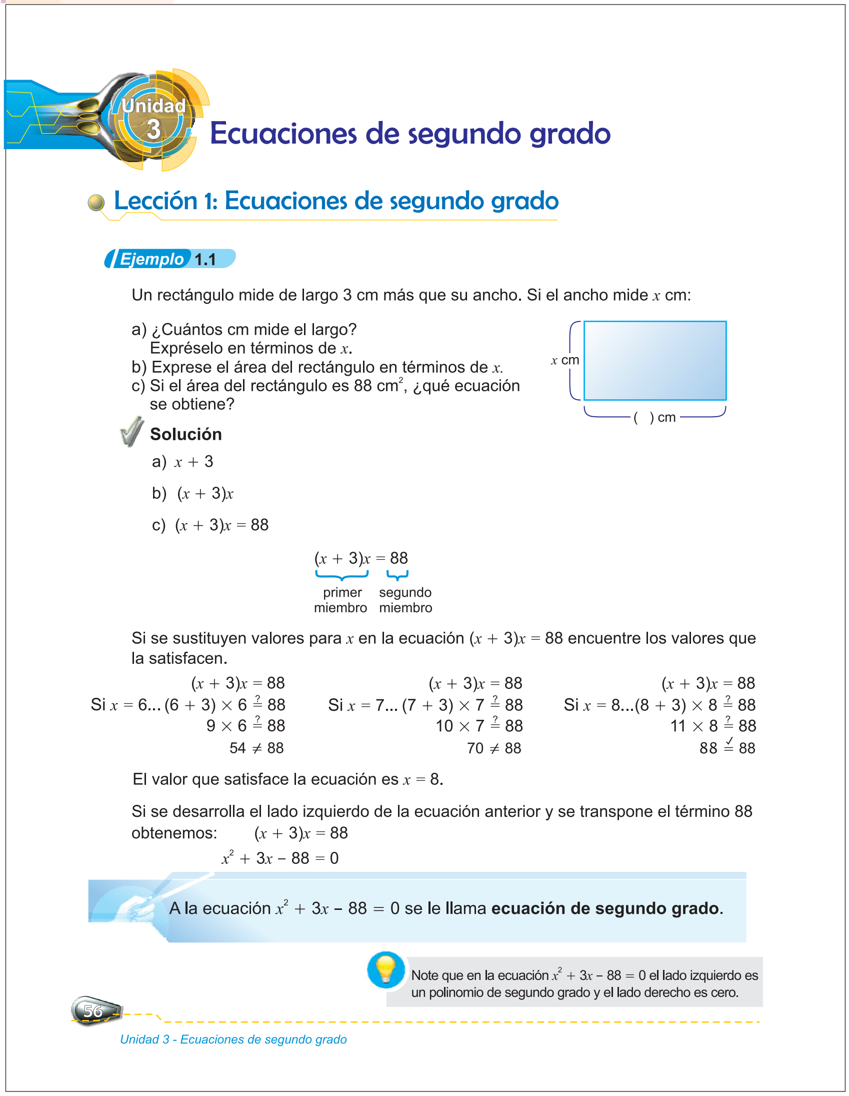
(4 min)

* Desarrollar el lado izquierdo $(x + 3)x = 88$ y transponer el término 88. ¿Qué resulta? ¿Qué expresión es el lado izquierdo de esta ecuación?

Unidad 3: Ecuaciones de segundo grado

Lección 1: (1/2) Ecuaciones de segundo grado

Objetivo: Definir una ecuación de segundo grado.



Unidad 3

Ecuaciones de segundo grado

Lección 1: Ecuaciones de segundo grado

Ejemplo **1.1**

Un rectángulo mide de largo 3 cm más que su ancho. Si el ancho mide x cm:

a) ¿Cuántos cm mide el largo?
Expréselo en términos de x.
b) Exprese el área del rectángulo en términos de x.
c) Si el área del rectángulo es 88 cm², ¿qué ecuación se obtiene?

x cm

( ) cm

Solución

a) $x + 3$

b) $(x + 3)x$

c) $(x + 3)x = 88$

$$\underbrace{(x+3)x}_{\text{primer miembro}} = \underbrace{88}_{\text{segundo miembro}}$$

Si se sustituyen valores para x en la ecuación $(x + 3)x = 88$ encuentre los valores que la satisfacen.

$(x + 3)x = 88$	$(x + 3)x = 88$	$(x + 3)x = 88$
Si $x = 6$... $(6 + 3) \times 6 \stackrel{?}{=} 88$	Si $x = 7$... $(7 + 3) \times 7 \stackrel{?}{=} 88$	Si $x = 8$...$(8 + 3) \times 8 \stackrel{?}{=} 88$
$9 \times 6 \stackrel{?}{=} 88$	$10 \times 7 \stackrel{?}{=} 88$	$11 \times 8 \stackrel{?}{=} 88$
$54 \neq 88$	$70 \neq 88$	$88 \stackrel{\checkmark}{=} 88$

El valor que satisface la ecuación es $x = 8$.

Si se desarrolla el lado izquierdo de la ecuación anterior y se transpone el término 88 obtenemos: $(x + 3)x = 88$

$x^2 + 3x - 88 = 0$

A la ecuación $x^2 + 3x - 88 = 0$ se le llama **ecuación de segundo grado**.

Note que en la ecuación $x^2 + 3x - 88 = 0$ el lado izquierdo es un polinomio de segundo grado y el lado derecho es cero.

* Concluir que a $x^2 + 3x - 88 = 0$ se le llama ecuación de segundo grado.

continua en la siguiente página...

Unidad 3: # Ecuaciones de segundo grado

Lección 1: (1/2) Ecuaciones de segundo grado

Objetivo: Definir una ecuación de segundo grado.

Una ecuación de segundo grado es toda ecuación que se puede escribir de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ donde $a \neq 0$. A las ecuaciones de segundo grado, también se les llama **ecuaciones cuadráticas**.

Ejemplo 1.2

Identifique cuáles de las siguientes ecuaciones son ecuaciones de segundo grado.

a) $2x^2 - 5x + 1 = 0$ b) $x^2 + 1 = 0$

c) $5x^3 + 7x - 4 = 0$ d) $(x + 1)(x - 2) = 0$

Solución:

a) Sí es una ecuación de segundo grado, porque se puede escribir de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ donde $a = 2$, $b = -5$, $c = 1$.

b) Sí es una ecuación de segundo grado, porque se puede escribir de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$.

c) No es una ecuación de segundo grado, porque no se puede escribir de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, además el término $5x^3$ es de grado 3.

d) Sí porque al desarrollar $(x + 1)(x - 2) = 0$ queda como $x^2 - x - 2 = 0$ y tiene la forma de una ecuación de segundo grado.

Ejercicio 1.1 Identifique cuáles de las siguientes ecuaciones son de segundo grado.

a) $x^2 + 5x - 6 = 0$ b) $2x^2 + 3 = 0$ c) $3x^4 - 5x = 0$

d) $8x^3 - 1 = 0$ e) $-10x + 7 = 0$ f) $-x^2 + x = 0$

Ejemplo 1.3

Identifique si la ecuación $x^2 = 3$ es de segundo grado.

Solución:

Si se transpone el 3 al lado izquierdo y se iguala a cero, se obtiene $x^2 - 3 = 0$, como se puede escribir de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a = 1$, $b = 0$, $c = -3$ entonces sí es una ecuación de segundo grado.

Ejercicio 1.2 Identifique cuáles de las siguientes ecuaciones son de segundo grado.

a) $x^2 = 4$ b) $x^3 = -3$ c) $x^2 = 5x$

Indicador de logro

De las siguientes ecuaciones, ¿cuáles son cuadráticas?

a) $x^2 + 5x - 6 = 0$

b) $-10x + 7 = 0$

4. Definir una ecuación cuadrática.

(3 min)

* Analizar las características de $x^2 + 3x - 88 = 0$ y concluir que toda expresión de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ se le llama ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática.

5. Resolver Ejemplo 1.2

(7 min)

* Identificar cuáles de las siguientes ecuaciones son ecuaciones de segundo grado.
* Indicar que toda ecuación que se pueda escribir de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ es una ecuación de segundo grado.
* Concluir que en una ecuación de segundo grado, b y c pueden ser cero pero que a no puede ser cero.

6. Resolver Ejercicio 1.1

(7 min)

Identifique cuáles son ecuaciones de segundo grado.

Solución

a) Sí d) No

b) Sí e) No

c) No f) Sí

7. Resolver Ejemplo 1.3

(4 min)

* Identificar si la ecuación $x^2 = 3$ es de segundo grado.
* Hacer énfasis en los valores de a, b y c.

8. Resolver Ejercicio 1.2

(6 min)

Identifique cuáles de las siguientes ecuaciones son de segundo grado.

Solución

a) Sí

b) No

c) Sí

Unidad 3: Ecuaciones de segundo grado

Lección 1: (2/2) Ecuaciones de segundo grado

Objetivo: Resolver ecuaciones de segundo grado sustituyendo valores.

Indicador de logro

Encuentre la solución de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ sustituyendo los siguientes valores: 1, 2, 3, 4 y 5.

1. **Sustituir los valores de x en la ecuación y encontrar los valores que la satisfacen.** *Ejemplo* **1.4**

   (10 min)

* Sustituir los valores de x en el miembro izquierdo de la ecuación para encontrar los valores que la satisfacen.

* Concluir:

- Si el primer miembro de la ecuación es igual al segundo miembro de la ecuación entonces satisface la ecuación.
- Si el primer miembro de la ecuación no es igual al segundo miembro de la ecuación entonces no satisface la ecuación.

2. **Definir a qué se le llama solución en una ecuación de segundo grado.**

   (5 min)

* Definir que es resolver una ecuación de segundo grado.

3. **Resolver** *Ejercicio* **1.3**

   (15 min)

   Solución

   $x = 1 \longrightarrow$ R: 2

   $x = 2 \longrightarrow$ R: 0

   $x = 3 \longrightarrow$ R: 0

   $x = 4 \longrightarrow$ R: 2

   $x = 5 \longrightarrow$ R: 6

   Las soluciones son $x = 2$ y $x = 3$.

Ejemplo **1.4**

Sustituya valores para x en la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$ y encuentre los valores que la satisfacen.

Solución:

Si $x = -2$ ... $x^2 - x - 2 = 0$; $(-2)^2 - (-2) - 2 \stackrel{?}{=} 0$; $4 + 2 - 2 \stackrel{?}{=} 0$; $4 \neq 0$

Si $x = -1$ ... $x^2 - x - 2 = 0$; $(-1)^2 - (-1) - 2 \stackrel{?}{=} 0$; $1 + 1 - 2 \stackrel{?}{=} 0$; $0 \stackrel{\checkmark}{=} 0$

Si $x = 0$ ... $x^2 - x - 2 = 0$; $(0)^2 - (0) - 2 \stackrel{?}{=} 0$; $0 - 0 - 2 \stackrel{?}{=} 0$; $-2 \neq 0$

Si $x = 1$ ... $x^2 - x - 2 = 0$; $(1)^2 - (1) - 2 \stackrel{?}{=} 0$; $1 - 1 - 2 \stackrel{?}{=} 0$; $-2 \neq 0$

Si $x = 2$ ... $x^2 - x - 2 = 0$; $(2)^2 - (2) - 2 \stackrel{?}{=} 0$; $4 - 2 - 2 \stackrel{?}{=} 0$; $0 \stackrel{\checkmark}{=} 0$

Respuesta: Los valores que satisfacen la ecuación son $x = -1$, $x = 2$.

A los valores que satisfacen una ecuación de segundo grado se les llama **solución**. Por ejemplo $x = -1$ y $x = 2$ son soluciones de la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$.

Resolver una ecuación de segundo grado es encontrar su solución.

Ejercicio **1.3** Encuentre la solución de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ sustituyendo los siguientes valores: 1, 2, 3, 4 y 5.

Ejercicio **1.4** Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones de segundo grado sustituyendo valores para x.

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$ con $x = -2$; $x = 2$; $x = 1$; $x = 3$

b) $x^2 + 3x + 2 = 0$ con $x = -2$; $x = 1$; $x = 3$; $x = -1$

c) $x^2 - 6x + 8 = 0$ con $x = 1$; $x = -2$; $x = 4$; $x = 2$

58

Unidad 3 - Ecuaciones de segundo grado

4. Resolver *Ejercicio* **1.4** *(15 min)* **Solución**

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$

$x = -2 \longrightarrow$ R: 12; $x = 2 \longrightarrow$ R: 0; $x = 1 \longrightarrow$ R: 0; $x = 3 \longrightarrow$ R: 2

Las soluciones son $x = 1$ y $x = 2$.

b) $x^2 + 3x + 2 = 0$

$x = -2 \longrightarrow$ R: 0; $x = 3 \longrightarrow$ R: 20; $x = 1 \longrightarrow$ R: 6; $x = -1 \longrightarrow$ R: 0

Las soluciones son $x = -1$ y $x = -2$.

c) $x^2 - 6x + 8 = 0$

$x = 1 \longrightarrow$ R: 3; $x = -2 \longrightarrow$ R: 24; $x = 4 \longrightarrow$ R: 0; $x = 2 \longrightarrow$ R: 0

Las soluciones son $x = 4$ y $x = 2$.

Unidad 3: Ecuaciones de segundo grado

Lección 2: (1/6) Resolución de ecuaciones de segundo grado

Sección 1: Resolución de ecuaciones de segundo grado usando factorización

Objetivo: Resolver ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ mediante la factorización.

Lección 2: Resolución de ecuaciones de segundo grado

Sección 1: Resolución de ecuaciones de segundo grado usando factorización

Ahora se aprenderá a resolver ecuaciones de segundo grado de la siguiente manera.

Ejemplo 2.1

Resuelva $(x + 3)(x - 1) = 0$.

> Para dos números A y B, si $A \times B = 0$ entonces $A = 0$ ó $B = 0$

Solución:

Como el lado izquierdo de la ecuación $(x + 3)(x - 1) = 0$ ya está factorizado nos queda:

$(x + 3)(x - 1) = 0$

$x + 3 = 0$ ó $x - 1 = 0$ ... Igualar a cero cada factor

$x = -3$ ó $x = 1$ ... Despejar para x

Por tanto las soluciones de la ecuación $(x + 3)(x - 1) = 0$ son $x = -3$ y $x = 1$.

> Comprobación
>
> $(x + 3)(x - 1) = 0$
>
> Si $x = -3$ ... $(-3 + 3)(-3 - 1) \overset{?}{=} 0$
>
> $(0)(-4) \overset{?}{=} 0$
>
> $0 \overset{\checkmark}{=} 0$
>
> $(x + 3)(x - 1) = 0$
>
> Si $x = 1$ ... $(1 + 3)(1 - 1) \overset{?}{=} 0$
>
> $(4)(0) \overset{?}{=} 0$
>
> $0 \overset{\checkmark}{=} 0$

Ejercicio 2.1 Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $(x + 2)(x - 7) = 0$ b) $(x - 4)(x + 3) = 0$

Ejemplo 2.2

Resuelva $x^2 + 2x - 8 = 0$.

Solución:

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x - 2)(x + 4) = 0$ ... Factorizar el lado izquierdo de la ecuación

$x - 2 = 0$ ó $x + 4 = 0$ ... Igualar a cero cada factor

$x = 2$ ó $x = -4$ ... Resolver cada ecuación

> Para resolver la ecuación primero hay que factorizar, si se puede.

Respuesta: Las soluciones son $x = 2, x = -4$.

59

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

Indicador de logro

Resuelva $x^2 + 5x + 6 = 0$ utilizando factorización.

1. Resolver ecuaciones de segundo grado usando factorización. **Ejemplo 2.1**

(10 min)

* Resolver $(x + 3)(x - 1) = 0$.

* ¿La ecuación $(x + 3)(x - 1) = 0$ es de segundo grado? ¿Por qué? ¿Que se hace para resolverla?

¿En qué forma está dada esta ecuación?

¿Que es cada uno de los factores del primer miembro?

* Resaltar la propiedad del factor cero (A x B = 0).

* ¿Cuáles son las dos ecuaciones de primer grado que se tienen?

¿Cuáles son los valores de x que se obtienen al resolver estas ecuaciones?

* Probar los valores de $x = -3$ y $x = 1$ sustituyéndolos en la ecuación y determinar que son las soluciones.

2. Resolver el **Ejercicio 2.1**

(6 min)

a) $x = -2, x = 7$

b) $x = 4, x = -3$

3. Resolver el **Ejemplo 2.2**

(5 min)

* Desarrollarlo en forma similar al **Ejemplo 2.1** teniendo el cuidado de factorizar primero el primer miembro de la ecuación.

continúa en la siguiente página...

4. Resolver el Ejercicio **2.2**

(8 min)

Solución

a) x = -3, x = -2

b) x = 5, x = -3

5. Resolver Ejemplo **2.3**

(8 min)

¿Qué se hace para resolver x^2 - 10x + 25 = 0?

¿Qué pasó con el resultado?

* En esta parte se trabaja con trinomios cuadrados perfectos que al factorizarlos se obtienen dos factores iguales y por lo tanto tienen solo una solución.

* Concluir que una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática puede tener una o dos soluciones, pero hay casos que no tienen solución.

6. Resolver Ejercicio **2.3**

(8 min)

Solución

a) x = 1

b) x = -3

c) x = 2

Ejercicios adicionales:

Resuelva

a) x^2 + 6x + 8 = 0

b) x^2 - 4x - 12 = 0

c) x^2 + 7x - 18 = 0

d) x^2 - 7x - 8 = 0

Solución

a) x = - 4, x = - 2

b) x = 6, x = -2

c) x = -9, x = 2

d) x = 8, x = -1

Unidad 3: **Ecuaciones de segundo grado**

Lección 2: (1/6) Resolución de ecuaciones de segundo grado

Sección 1: Resolución de ecuaciones de segundo grado usando factorización

Objetivo: Resolver ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ mediante la factorización.

Ejercicio **2.2** Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$ b) $x^2 - 2x - 15 = 0$

Ejemplo **2.3**

Resuelva $x^2 - 10x + 25 = 0$.

Factorizar $x^2 - 10x + 25$ utilizando $x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$

Solución:

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$
$$(x - 5)^2 = 0$$
$$x - 5 = 0$$
$$x = 5$$

Algunas ecuaciones cuadráticas tienen dos soluciones, otras como $x^2 - 10x + 25 = 0$ solo tienen una.

Respuesta: La solución es $x = 5$.

Ejercicio **2.3** Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$

b) $x^2 + 6x + 9 = 0$

c) $x^2 - 4x + 4 = 0$

60 Unidad 3 - Ecuaciones de segundo grado

Ejercicios adicionales:

Resuelva

a) x^2 - 12x + 36 = 0 b) x^2 + 2x + 1 = 0

c) x^2 + 14x + 49 = 0 d) x^2 + 4x + 4 = 0

Solución

a) x = 6 b) x = -1

c) x = -7 d) x = -2

Unidad 3: **Ecuaciones de segundo grado**

Lección 2: (2/6) Resolución de ecuaciones de segundo grado

Sección 1: Resolución de ecuaciones de segundo grado usando factorización

Objetivo: Resolver ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ mediante la factorización.

Ejemplo 2.4

Resuelva $2x^2 + 3x - 9 = 0$.

Solución:

$2x^2 + 3x - 9 = 0$

$(2x - 3)(x + 3) = 0$ ... Factorizar el lado izquierdo

$2x - 3 = 0$ ó $x + 3 = 0$ ... Igualar a cero cada factor

$2x = 3$ ó $x = -3$ ... Resolver cada ecuación

$x = \frac{3}{2}$ ó $x = -3$

Respuesta: Las soluciones son $x = \frac{3}{2}$, $x = -3$.

Ejercicio 2.4 Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $2x^2 + 7x + 3 = 0$ b) $3x^2 - 5x - 2 = 0$ c) $5x^2 + 9x - 2 = 0$

Ejemplo 2.5

Resuelva $(x + 3)(x - 1) = 5$.

Solución:

Para resolver la ecuación primero es necesario convertir a la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

$(x + 3)(x - 1) = 5$

$x^2 + 2x - 3 = 5$ ... Desarrollar el lado izquierdo

$x^2 + 2x - 8 = 0$ ... Transponer el 5

$(x + 4)(x - 2) = 0$ ... Factorizar el lado izquierdo

$x + 4 = 0$ ó $x - 2 = 0$ ... Igualar a cero cada factor

$x = -4$ ó $x = 2$ ... Resolver cada ecuación

Respuesta: Las soluciones son $x = -4, x = 2$.

Ejercicio 2.5 Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $(x - 6)(x - 3) = 4$ b) $(x + 5)(x - 2) = 8$

c) $(x - 5)(x + 7) = -11$ d) $(x - 7)(x - 4) = 10$

61

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

4. Resolver **Ejercicio 2.5**

(17 min)

Solución

a) $x^2 - 9x + 14 = 0$

$(x - 7)(x - 2) = 0$

$x = 7, \ x = 2$

b) $x^2 + 3x - 18 = 0$

$(x + 6)(x - 3) = 0$

$x = -6, \ x = 3$

c) $x^2 + 2x - 24 = 0$

$(x + 6)(x - 4) = 0$

$x = -6, \ x = 4$

d) $x^2 - 11x + 18 = 0$

$(x - 2)(x - 9) = 0$

$x = 2, \ x = 9$

Indicador de logro

Resuelve $2x^2 + 7x + 3 = 0$ usando factorización.

1. Resolver la ecuación $2x^2 + 3x - 9 = 0$ **Ejemplo 2.4**

(5 min)

¿Qué se hace para resolver $2x^2 + 3x - 9 = 0$?

¿Qué se obtiene al factorizar el lado izquierdo?

Después de factorizar, ¿qué sigue?

¿Cuáles son las ecuaciones de primer grado que se forman?

¿Cuáles son los valores de x al resolver estas ecuaciones?

2. Resolver **Ejercicio 2.4**

(15 min)

Solución

a) $(2x + 1)(x + 3) = 0$

$x = -\frac{1}{2}, \ x = -3$

b) $(3x + 1)(x - 2) = 0$

$x = -\frac{1}{3}, \ x = 2$

c) $(5x - 1)(x + 2) = 0$

$x = \frac{1}{5}, \ x = -2$

3. Resolver la ecuación $(x + 3)(x - 1) = 5$ **Ejemplo 2.5**

(8 min)

¿En qué se diferencia esta ecuación de las resueltas anteriormente?

* Hacer notar que en esta ecuación aunque el lado izquierdo está factorizado no está igualada a cero.

¿Qué se hace para resolver $(x + 3)(x - 1) = 5$?

¿Qué se debe desarrollar primero?

Después de desarrollar el producto, ¿qué sigue?

Indicador de logro

Resuelva: a) $x^2 = 5$ b) $(x + 3)^2 = 5$

1. Resolver la ecuación $x^2 = 7$. Ejemplo 2.6

(5 min)

¿Cuál es el significado de x en $x^2 = 7$?

* ¿Cuál será ese número que multiplicado por sí mismo es 7? ¿Habrá otro número?
* Encontrar la solución de $x^2 = 7$ empleando el concepto de raíz cuadrada.
* Concluir que las soluciones son $\sqrt{7}$ y $-\sqrt{7}$ y que en forma conjunta se escribe $\pm\sqrt{7}$.

2. Resolver Ejercicio 2.6

(6 min)

Solución

a) $x = \pm\sqrt{5}$

b) $x = \pm\sqrt{13}$

c) $x = \pm 5$

3. Resolver la ecuación $2x^2 - 18 = 0$ Ejemplo 2.7

(7 min)

¿Cómo podemos encontrar la solución de $2x^2 - 18 = 0$ tomando en cuenta el ejemplo anterior?

¿Cuál es el resultado de dividir entre 2?

Luego de aplicar la definición de raíz cuadrada, ¿cuál es la solución?

4. Resolver Ejercicio 2.7

(10 min)

Solución

a) $x = \pm 4$

b) $x = \pm 2$

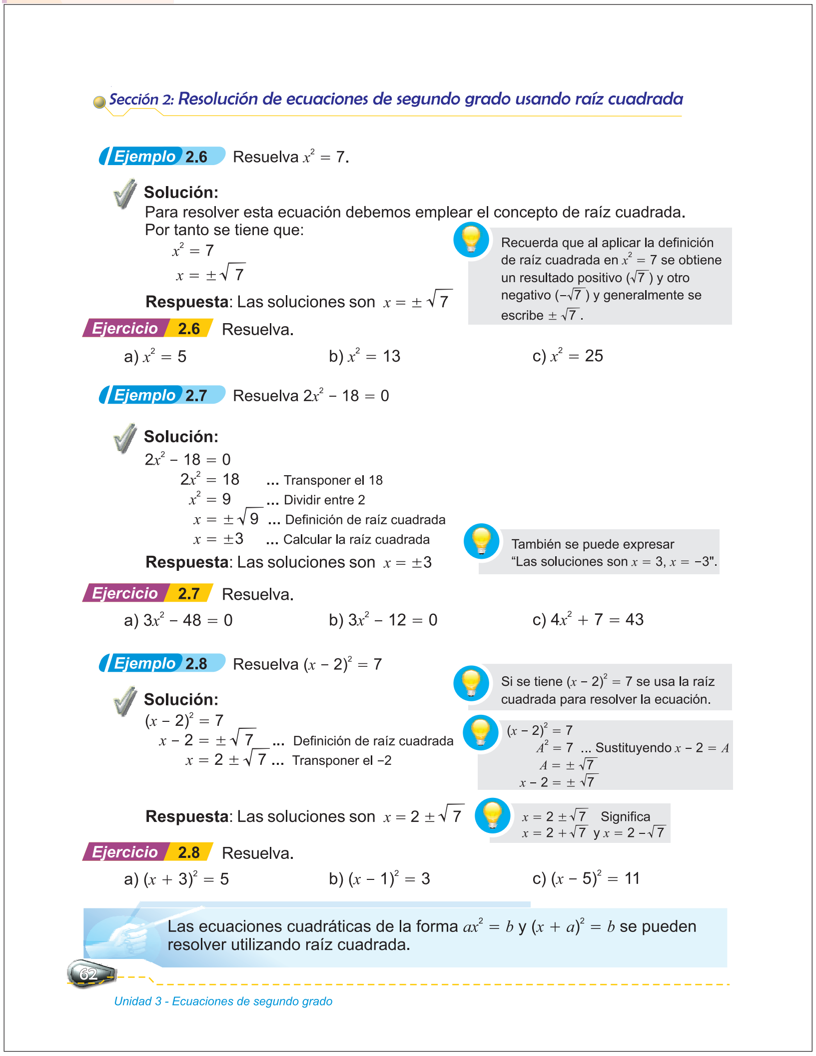
c) $x = \pm 3$

Unidad 3: **Ecuaciones de segundo grado**

Lección 2: (3/6) Resolución de ecuaciones de segundo grado

Sección 2: Resolución de ecuaciones de segundo grado usando raíz cuadrada

Objetivo: Resolver ecuaciones de segundo grado usando la raíz cuadrada.



Sección 2: Resolución de ecuaciones de segundo grado usando raíz cuadrada

Ejemplo 2.6 Resuelva $x^2 = 7$.

Solución:
Para resolver esta ecuación debemos emplear el concepto de raíz cuadrada.
Por tanto se tiene que:

$$x^2 = 7$$
$$x = \pm\sqrt{7}$$

Respuesta: Las soluciones son $x = \pm\sqrt{7}$

Recuerda que al aplicar la definición de raíz cuadrada en $x^2 = 7$ se obtiene un resultado positivo ($\sqrt{7}$) y otro negativo ($-\sqrt{7}$) y generalmente se escribe $\pm\sqrt{7}$.

Ejercicio 2.6 Resuelva.

a) $x^2 = 5$ b) $x^2 = 13$ c) $x^2 = 25$

Ejemplo 2.7 Resuelva $2x^2 - 18 = 0$

Solución:

$2x^2 - 18 = 0$
$2x^2 = 18$ ... Transponer el 18
$x^2 = 9$ ... Dividir entre 2
$x = \pm\sqrt{9}$ ... Definición de raíz cuadrada
$x = \pm 3$ ... Calcular la raíz cuadrada

Respuesta: Las soluciones son $x = \pm 3$

También se puede expresar "Las soluciones son $x = 3$, $x = -3$".

Ejercicio 2.7 Resuelva.

a) $3x^2 - 48 = 0$ b) $3x^2 - 12 = 0$ c) $4x^2 + 7 = 43$

Ejemplo 2.8 Resuelva $(x - 2)^2 = 7$

Solución:

$(x - 2)^2 = 7$
$x - 2 = \pm\sqrt{7}$ ... Definición de raíz cuadrada
$x = 2 \pm\sqrt{7}$ ... Transponer el -2

Si se tiene $(x - 2)^2 = 7$ se usa la raíz cuadrada para resolver la ecuación.

$(x - 2)^2 = 7$
$A^2 = 7$ ... Sustituyendo $x - 2 = A$
$A = \pm\sqrt{7}$
$x - 2 = \pm\sqrt{7}$

Respuesta: Las soluciones son $x = 2 \pm\sqrt{7}$

$x = 2 \pm\sqrt{7}$ Significa $x = 2 + \sqrt{7}$ y $x = 2 - \sqrt{7}$

Ejercicio 2.8 Resuelva.

a) $(x + 3)^2 = 5$ b) $(x - 1)^2 = 3$ c) $(x - 5)^2 = 11$

Las ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 = b$ y $(x + a)^2 = b$ se pueden resolver utilizando raíz cuadrada.

62

Unidad 3 - Ecuaciones de segundo grado

5. Resolver la ecuación $(x - 2)^2 = 7$ Ejemplo 2.8 (7 min)

¿En qué se parece $(x - 2)^2 = 7$ a la ecuación $x^2 = 7$?

* Resuelvan $(x - 2)^2 = 7$ en forma análoga a $x^2 = 7$.

¿Qué queda? ¿Cuál es el valor final de x?

* Después de calcular la raíz cuadrada y transponer el -2 concluir que $x = 2 \pm\sqrt{7}$.

6. Resolver Ejercicio 2.8 (10 min)

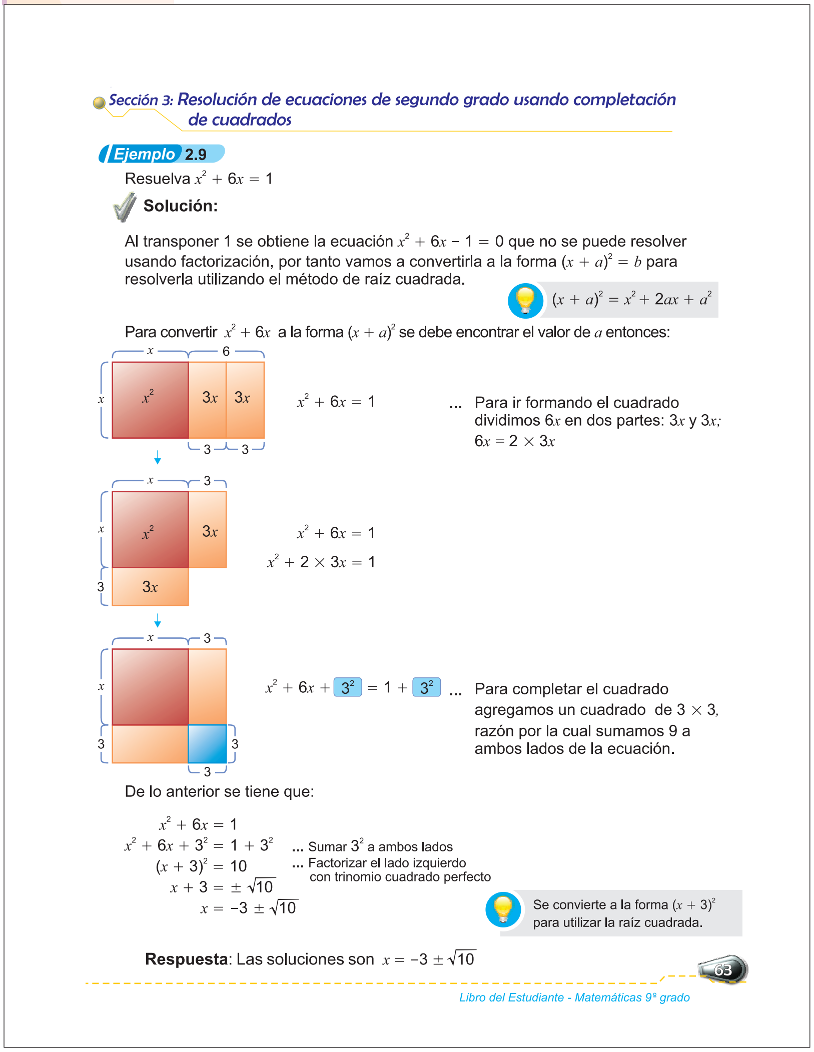
Solución a) $x = -3 \pm\sqrt{5}$ b) $x = 1 \pm\sqrt{3}$ c) $x = 5 \pm\sqrt{11}$

Unidad 3: Ecuaciones de segundo grado

Lección 2: (4/6) Resolución de ecuaciones de segundo grado

Sección 3: Resolución de ecuaciones de segundo grado usando completación de cuadrados

Objetivo: Resolver ecuaciones de segundo grado usando completación de cuadrados.



Sección 3: Resolución de ecuaciones de segundo grado usando completación de cuadrados

Ejemplo 2.9

Resuelva $x^2 + 6x = 1$

Solución:

Al transponer 1 se obtiene la ecuación $x^2 + 6x - 1 = 0$ que no se puede resolver usando factorización, por tanto vamos a convertirla a la forma $(x + a)^2 = b$ para resolverla utilizando el método de raíz cuadrada.

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

Para convertir $x^2 + 6x$ a la forma $(x + a)^2$ se debe encontrar el valor de a entonces:

$x^2 + 6x = 1$ ... Para ir formando el cuadrado dividimos $6x$ en dos partes: $3x$ y $3x$; $6x = 2 \times 3x$

$x^2 + 6x = 1$

$x^2 + 2 \times 3x = 1$

$x^2 + 6x + \boxed{3^2} = 1 + \boxed{3^2}$ ... Para completar el cuadrado agregamos un cuadrado de 3×3, razón por la cual sumamos 9 a ambos lados de la ecuación.

De lo anterior se tiene que:

$x^2 + 6x = 1$

$x^2 + 6x + 3^2 = 1 + 3^2$ ... Sumar 3^2 a ambos lados

$(x + 3)^2 = 10$ ... Factorizar el lado izquierdo con trinomio cuadrado perfecto

$x + 3 = \pm\sqrt{10}$

$x = -3 \pm \sqrt{10}$

Se convierte a la forma $(x + 3)^2$ para utilizar la raíz cuadrada.

Respuesta: Las soluciones son $x = -3 \pm \sqrt{10}$

63

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

Indicador de logro

Resuelva $x^2 + 2x = 4$ usando la completación de cuadrados.

1. Resolver ecuaciones cuadráticas usando la completación de cuadrados.

Ejemplo 2.9

(20 min)

¿Qué se hace para resolver $x^2 + 6x = 1$?

Luego de transponer 1, ¿se puede resolver la ecuación por factorización?

* Regresar a la ecuación original y trabajar con el miembro de la izquierda.
* Representar $x^2 + 6x$ utilizando el área de rectángulos y cuadrados.
* Concluir con la figura del LE.
* Formar un cuadrado con las figuras que representan $x^2 + 6x$, ¿cómo queda? ¿Qué falta para formar el cuadrado?

  Si agregamos un cuadrado, ¿cuál es la longitud del lado de este cuadrado?
* Si se completa la figura con el cuadrado, ¿qué se debe hacer con la ecuación $x^2 + 6x = 1$? ¿Qué relación hay entre la parte de la ecuación $x^2 + 6x + 9$ y el área $(x+3)^2$ del cuadrado formado? ¿Cómo se puede encontrar el 9 partiendo de la parte $x^2 + 6x$ de la ecuación?
* Sumar 9 a ambos lados de la ecuación, luego factorizar la parte izquierda y desarrollar la derecha.
* Concluir que las soluciones son $x = -3 \pm \sqrt{10}$.

continua en la siguiente página...

Indicador de logro

Resuelva $x^2 + 2x = 4$ usando la completación de cuadrados.

* Leer el resumen de la página 64 del LE.

2. Resolver la ecuación $x^2 - 8x = -1$ completando el cuadrado. Ejemplo 2.10

(10 min)

* ¿Qué se hace para resolver $x^2 - 8x = -1$ usando el método de completación de cuadrados?

* ¿Cuál es el primer paso para resolver por este método?

* ¿Qué hace falta en el lado izquierdo de la ecuación $x^2 - 8x = -1$ para formar un trinomio cuadrado perfecto? ¿Qué sigue?

* Concluir que al factorizar el lado izquierdo queda $(x - 4)^2 = 15$.

* Aplicar la raíz cuadrada y escribir que las soluciones de x son $x = 4 \pm \sqrt{15}$.

3. Resolver Ejercicio 2.9

(15 min)

Solución

a) $x^2 + 2x + 1^2 = 4 + 1^2$

$(x + 1)^2 = 5$

$x + 1 = \pm\sqrt{5}$

$x = -1 \pm \sqrt{5}$

b) $x^2 + 4x + 2^2 = -2 + 2^2$

$(x + 2)^2 = 2$

$x + 2 = \pm\sqrt{2}$

$x = -2 \pm \sqrt{2}$

c) $x^2 - 10x + 5^2 = -23 + 5^2$

$(x - 5)^2 = 2$

$x - 5 = \pm\sqrt{2}$

$x = 5 \pm \sqrt{2}$

Ejercicios adicionales

Resuelva:

a) $x^2 + 6x + 3 = 0$

b) $x^2 - 8x - 7 = 0$

c) $x^2 - 10x + 2 = 0$

Unidad 3: **Ecuaciones de segundo grado**

Lección 2: (4/6) Resolución de ecuaciones de segundo grado

Sección 3: Resolución de ecuaciones de segundo grado usando completación de cuadrados

Objetivo: Resolver ecuaciones de segundo grado usando completación de cuadrados.

Al procedimiento de resolver una ecuación de segundo grado sumando a ambos lados el cuadrado de la mitad del coeficiente de x se le llama **completación de cuadrados.**

Ejemplo: $x^2 + \underline{6x} = 1$

6 es el coeficiente de x
entonces la mitad 6 es 3,
el cuadrado 3 es 3^2,
por eso se agrega 3^2 a ambos lados de la ecuación.

Ejemplo 2.10

Resuelva $x^2 - 8x = -1$ usando completación de cuadrados.

Solución:

$x^2 - 8x = -1$

$x^2 - 8x + 4^2 = -1 + 4^2$ ... Sumar a ambos lados el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, es decir, $\left(-\frac{8}{2}\right)^2 = (-4)^2 = 4^2$

$x^2 - 8x + 16 = -1 + 16$

$(x - 4)^2 = 15$ ... Factorizar

$x - 4 = \pm\sqrt{15}$ ... Definición de raíz cuadrada

$x = 4 \pm \sqrt{15}$

Respuesta: Las soluciones son $x = 4 \pm \sqrt{15}$

Ejercicio 2.9 Resuelva usando completación de cuadrados.

a) $x^2 + 2x = 4$

b) $x^2 + 4x = -2$

c) $x^2 - 10x = -23$

64 Unidad 3 - Ecuaciones de segundo grado

Solución

a) $x = -3 \pm \sqrt{6}$ b) $x = 4 \pm \sqrt{23}$ c) $x = 5 \pm \sqrt{23}$

Nota:
Si agrega ejercicios de ecuaciones cuadráticas utilizando la completación de cuadrados tenga cuidado que el coeficiente del término lineal no sea impar porque sino se tendrá que trabajar con números racionales.

Unidad 3: Ecuaciones de segundo grado

Lección 2: (5/6) Resolución de ecuaciones de segundo grado

Sección 4: Resolución de ecuaciones de segundo grado usando la fórmula cuadrática

Objetivos:
* Deducir la fórmula cuadrática.
* Identificar los valores para a, b y c en una ecuación de segundo grado.

Sección 4: Resolución de ecuaciones de segundo grado usando la fórmula cuadrática

1. Observe y comente.
Vamos a pensar en una forma de resolver la ecuación cuadrática en la forma más general $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$ comparándola con la resolución de $3x^2 + 5x + 1 = 0$, usando la completación de cuadrados.

$3x^2 + 5x + 1 = 0$	
$3x^2 + 5x = -1$	Transponer 1
$x^2 + \frac{5}{3}x = -\frac{1}{3}$	Dividir entre 3
$x^2 + \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$	Sumar a ambos lados el cuadrado de la mitad del coeficiente de x
$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{13}{36}$	Factorizar por trinomio cuadrado perfecto

Por tanto

$$x + \frac{5}{6} = \pm\frac{\sqrt{13}}{6} \quad \text{Definición de raíz cuadrada}$$

$$x = -\frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{13}}{6}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Las soluciones de la ecuación $3x^2 + 5x + 1 = 0$, son:

$$x = \frac{-5 + \sqrt{13}}{6} \quad \text{y} \quad x = \frac{-5 - \sqrt{13}}{6}$$

$b^2 - 4ac \geq 0$ significa que $b^2 - 4ac$ es mayor o igual que 0.

$ax^2 + bx + c = 0$	
$ax^2 + bx = -c$	Transponer c
$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$	Dividir entre a
$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ *	Sumar a ambos lados el cuadrado de la mitad del coeficiente de x
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	Factorizar por trinomio cuadrado perfecto

Por tanto si $b^2 - 4ac \geq 0$ se da que

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

* La mitad del coeficiente de x es:

$$\frac{b}{a} \div 2 = \frac{b}{a} \times \frac{1}{2} = \frac{b}{2a}$$

y su cuadrado es $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$

La suma de:

$$-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4a(-c) + 1(b^2)}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ vienen dadas por la **fórmula cuadrática** $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ donde $b^2 - 4ac \geq 0$.

¡Memorizarlo es muy importante!

65

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

Indicador de logro

Identifique a, b y c en $5x^2 - 7x + 1 = 0$.

1. Deducir la fórmula cuadrática mediante la completación de cuadrados.
(30 min)

* Aplicar lo aprendido en la clase anterior para resolver paso a paso la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ comparándola con la resolución $3x^2 + 5x + 1 = 0$.
* ¿Qué es lo nuevo en la ecuación $3x^2 + 5x + 1 = 0$ en relación a las ecuaciones resueltas en la clase anterior?
* Concluir que existen similitudes: transponer 1 con transponer c; dividir entre 3 con dividir entre a; sumar $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ con $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$; resolver $\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{13}{36}$ con resolver $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.
¿Cuáles son las soluciones?
* Concluir que a $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ se le llama fórmula cuadrática y que $b^2 - 4ac$ debe ser mayor o igual que 0.

continua en la siguiente página...

Unidad 3: Ecuaciones de segundo grado

Lección 2: (6/6) Resolución de ecuaciones de segundo grado

Sección 4: Resolución de ecuaciones de segundo grado usando la fórmula cuadrática

Objetivo: Resolver ecuaciones de segundo grado usando la fórmula cuadrática.

2. Resolver Ejercicio 2.10

(15 min)

Solución

Con la fórmula cuadrática

a) $5x^2 + 7x + 1 = 0$

$a = \boxed{5}$; $b = \boxed{7}$; $c = \boxed{1}$

b) $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \dfrac{-\boxed{7} \pm \sqrt{(7)^2 - 4(\boxed{5})(\boxed{1})}}{2(\boxed{5})}$

$= \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 - 20}}{10}$

$= \dfrac{-7 \pm \sqrt{29}}{10}$

Las soluciones son

$x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{29}}{10}$

[Hasta aquí Clase 7]

[Desde aquí Clase 8]

1. Resolver la ecuación $3x^2 - 7x + 1 = 0$ usando la fórmula cuadrática.

Ejemplo 2.11

(10 min)

¿Qué debemos hacer para aplicar la fórmula cuadrática y resolver $3x^2 - 7x + 1 = 0$?

* Indicar a los alumnos tener cuidado con los números y sus respectivos signos.

2. Resolver Ejercicio 2.11

(15 min)

Solución

a) $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}$ b) $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$

c) $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{29}}{10}$

Ejercicios adicionales (Clase 8)

Resuelva:

a) $3x^2 + 7x + 1 = 0$ b) $x^2 + x - 5 = 0$

Solución

a) $x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{37}}{6}$ b) $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$

Ejercicio 2.10 En la ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ identifique los valores para a, b y c en la ecuación $5x^2 + 7x + 1 = 0$ y complete.

a) $a = \square$ $b = \square$ $c = \square$

b) $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \dfrac{-(\ ) \pm \sqrt{(\ )^2 - 4(\ )(\ )}}{2(\ )}$ ... Sustituir los valores de a, b y c en la fórmula.

Continúe...

Ejemplo 2.11

Resuelva $3x^2 - 7x + 1 = 0$ usando la fórmula cuadrática.

Solución:

Para usar la fórmula cuadrática primero se deben identificar los valores para a, b y c.

$a = 3$ $b = -7$ $c = 1$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \dfrac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)}$

$= \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 12}}{6}$

$= \dfrac{7 \pm \sqrt{37}}{6}$

Respuesta: Las soluciones son $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{37}}{6}$

$x = \dfrac{7 \pm \sqrt{37}}{6}$ significa $x = \dfrac{7 + \sqrt{37}}{6}$ y $x = \dfrac{7 - \sqrt{37}}{6}$

Ejercicio 2.11 Resuelva usando la fórmula cuadrática.

a) $2x^2 + 5x + 1 = 0$ b) $4x^2 + x - 1 = 0$ c) $5x^2 - 7x + 1 = 0$

66 Unidad 3 - Ecuaciones de segundo grado

Ejercicios adicionales (Clase 7)

Resuelva:

$3x^2 + 5x - 1 = 0$

$a = \boxed{3}$; $b = \boxed{5}$; $c = \boxed{-1}$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-\boxed{5} \pm \sqrt{(5)^2 - 4(\boxed{3})(\boxed{-1})}}{2 \times \boxed{3}} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 + 12}}{6}$

$= \dfrac{-5 \pm \sqrt{37}}{6}$

Las soluciones son $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{37}}{6}$

continua en la siguiente página...

Unidad 3: **Ecuaciones de segundo grado**

Lección 2: (6/6) Resolución de ecuaciones de segundo grado

Sección 4: Resolución de ecuaciones de segundo grado usando la fórmula cuadrática

Objetivo: Resolver ecuaciones de segundo grado usando la fórmula cuadrática.

Ejemplo 2.12

Resuelva $2x^2 + 5x - 3 = 0$ usando la fórmula cuadrática.

Solución:

$a = 2 \quad b = 5 \quad c = -3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$\sqrt{49} = 7$

$$= \frac{-5 \pm 7}{4}$$

Se tienen dos soluciones: $x = \frac{-5+7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ó $x = \frac{-5-7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$

Respuesta: Las soluciones son $x = \frac{1}{2}, x = -3$

Ejercicio 2.12 Resuelva.

a) $6x^2 + 7x + 2 = 0$ b) $2x^2 + 3x + 1 = 0$

Indicador de logro

Resuelva $2x^2 + 5x + 1 = 0$ usando la fórmula cuadrática.

3. Resolver la ecuación $2x^2 + 5x - 3 = 0$ usando la fórmula cuadrática.

Ejemplo 2.12

(10 min)

* Resolver $2x^2 + 5x - 3 = 0$ siguiendo los 3 pasos principales:

1) Identificar los valores de a, b y c.
2) Sustituir estos valores en la fórmula cuadrática.
3) Operar.

* Cuando se pueda, se simplifican las fracciones resultantes para determinar los valores de x.

4. Resolver Ejercicio 2.12

(10 min)

Solución

a)

$$x = \frac{-\boxed{7} \pm \sqrt{(7)^2 - 4(\boxed{6})(\boxed{2})}}{2(\boxed{6})}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{12}$$

$$= \frac{-7 \pm 1}{12}$$

$$x = \frac{-7+1}{12} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{-7-1}{12} = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}$$

b)

$$x = \frac{-\boxed{3} \pm \sqrt{(3)^2 - 4(\boxed{2})(\boxed{1})}}{2(\boxed{2})}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4}$$

$$= \frac{-3 \pm 1}{4}$$

$$x = \frac{-3+1}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{-3-1}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

Ejercicios adicionales

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas usando la fórmula cuadrática.

a) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ b) $4x^2 + 5x + 1 = 0$ c) $2x^2 + 7x - 15 = 0$

Solución

a) $x = \frac{1}{2}, \; x = -3$ b) $x = -\frac{1}{4}, \; x = -1$ c) $x = \frac{3}{2}, \; x = -5$

Unidad 3: Ecuaciones de segundo grado

Lección 3: (1/3) Aplicación de las ecuaciones de segundo grado

Objetivo: Resolver problemas aplicando las ecuaciones de segundo grado.

Indicador de logro

Resuelva: El producto de dos números naturales consecutivos es 72 ¿Cuáles son esos números?

1. **Encontrar dos números naturales consecutivos cuya suma de sus cuadrados es 41.** *Ejemplo* **3.1**

   (20 min)

   * Exprese el primer número con x y luego su consecutivo. ¿Cómo queda la ecuación de la suma de los cuadrados de estos números?

   * Hay que analizar bien la situación y establecer la relación entre las cantidades. ¿Cuál es la respuesta?

   * Para resolver la ecuación se pueden utilizar cualquiera de los procedimientos vistos en clases anteriores pero es mejor usar el más conveniente.

   * Explicar que la solución $x = -5$ no es solución del problema ya que no es un número natural. Verificar que los números 4 y 5 son solución del problema, es decir, $4^2 + 5^2 = 41$.

2. **Resolver** *Ejercicio* **3.1**

   (25 min)

   Solución

   a) x : primer número

   PO: $x^2 + (x + 1)^2 = 85$

   $2x^2 + 2x - 84 = 0$

   $x^2 + x - 42 = 0$

   $(x + 7)(x - 6) = 0$

   como $x > 0$

   $x = 6$

   Los números son: 6 y 7

   b) x : primer número

   PO: $x(x + 1) = 72$

   $x^2 + x - 72 = 0$

   $(x - 8)(x + 9) = 0$

   como $x > 0$

   $x = 8$

   Los números son: 8 y 9

Lección 3: Aplicación de las ecuaciones de segundo grado

Ejemplo **3.1**

Hay dos números naturales consecutivos. La suma de los cuadrados de estos números es 41. ¿Cuáles son esos números?

Solución:

Si se representa el primer número con x y su consecutivo con $x + 1$ se tiene:

$$x^2 + (x + 1)^2 = 41$$
$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 41$$
$$2x^2 + 2x - 40 = 0$$
$$x^2 + x - 20 = 0 \quad \text{... Dividir entre 2}$$
$$(x + 5)(x - 4) = 0$$
$$x + 5 = 0 \quad \text{ó} \quad x - 4 = 0$$
$$x = -5 \quad \text{ó} \quad x = 4$$

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

Como x debe ser un número natural, la solución $x = -5$ no es adecuada, es decir, no es solución al problema ya que -5 no es un número natural.

La solución $x = 4$ es un número natural y por lo tanto es el primer número.

El segundo número es $x + 1 = 4 + 1 = 5$.

Respuesta: Los números son 4 y 5.

Ejercicio **3.1**

a) Hay dos números naturales consecutivos. La suma de los cuadrados de estos números es 85. ¿Cuáles son esos números?

b) El producto de dos números naturales consecutivos es 72. ¿Cuáles son esos números?

68 *Unidad 3 - Ecuaciones de segundo grado*

Ejercicio adicional

Si la suma de dos números es 14 y su producto es 45, ¿cuáles son esos dos números?

Solución

Si se representa un número como x, el otro número es $14 - x$

PO: $x(14 - x) = 45$

Respuesta: Los números son 5 y 9.

Unidad 3: Ecuaciones de segundo grado

Lección 3: (2/3) Aplicación de las ecuaciones de segundo grado

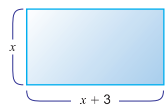
Objetivo: Resolver problemas aplicando las ecuaciones de segundo grado.

Ejemplo 3.2

Un rectángulo mide de largo 3 cm más que su ancho. Si el ancho mide x cm:

a) ¿Cómo se expresa el área del rectángulo?

b) Si el área del rectángulo es 70 cm², ¿cuáles son las medidas del largo y ancho del rectángulo?



Solución:

a) Si se representa con x el ancho del rectángulo, el largo se expresa como $x + 3$.
Para calcular el área del rectángulo hay que multiplicar largo por ancho.

Por tanto el área del rectángulo se expresa como:

$$\text{Área} = \text{ancho} \times \text{largo}.$$
$$= x(x + 3)$$

b) Si el área del rectángulo es 70 cm² se puede sustituir en la ecuación anterior.

$$x(x + 3) = 70$$

Al resolver la ecuación anterior se obtiene:

$$x(x + 3) = 70$$
$$x^2 + 3x = 70$$
$$x^2 + 3x - 70 = 0$$
$$(x + 10)(x - 7) = 0$$
$$x + 10 = 0 \quad \text{ó} \quad x - 7 = 0$$
$$x = -10 \quad \text{ó} \quad x = 7$$

Como x es la longitud, x debe ser un número positivo, la solución $x = -10$ no es solución al problema.

Por tanto ancho: $x = 7$

largo: $x + 3 = 7 + 3 = 10$

Respuesta: El largo del rectángulo mide 10 cm y el ancho 7 cm.

Ejercicio 3.2 Víctor es 2 años mayor que Alicia y el producto de ambas edades es 48. Encuentre las edades de Víctor y Alicia.

Ejercicio adicional

¿Cuánto mide el largo y cuánto mide el ancho del rectángulo cuya área es 56 cm² y el largo mide 10 cm más que su ancho?

Solución

x: longitud del ancho

PO: $(x + 10)\,x = 56$

Respuesta: El ancho mide 4 cm.
El largo mide 14 cm.

Indicador de logro

Resuelve: Víctor es 2 años mayor que Alicia y el producto de ambas edades es 48. Encuentre las edades de Víctor y Alicia.

1. **Encontrar la medida del largo y el ancho de un rectángulo utilizando ecuaciones cuadráticas.** Ejemplo 3.2

   (20 min)

   Después de leer el problema, ¿cuánto mide el largo y el ancho del rectángulo?

   ¿Cómo podemos expresar el ancho del rectángulo?

   ¿Cómo podemos expresar el largo del rectángulo?

   Si sabemos que el área es 70 cm², ¿cómo se puede sustituir en la ecuación anterior?

   Luego de plantear la ecuación resolverla por el método que más convenga.

* Asegurarse que los estudiantes comprendan cada problema y que establezcan las relaciones entre las cantidades para que escriban correctamente la ecuación.

* Tener cuidado en las soluciones de la ecuación porque solo una de ellas es solución al problema.

2. **Resolver** Ejercicio 3.2

   (25 min)

   Solución

   x: edad de Alicia

   PO: $x(x + 2) = 48$

   $x^2 + 2x - 48 = 0$

   $(x + 8)(x - 6) = 0$

   $x = -8$, $x = 6$

   Como x es la edad, x debe ser un número positivo, por tanto $x = 6$.

   Respuesta: Alicia 6 años.
   Víctor 8 años.

Indicador de logro

Resolver el Ejercicio 3.3 .

1. Encontrar la medida del ancho de una acera utilizando ecuaciónes cuadraticas.

Ejemplo 3.3

(25 min)

Después de leer el problema,

¿qué se debe hacer para solucionar el problema?

¿Cuánto debe medir el ancho de la acera?

¿Cómo podemos representar el área afuera de la acera?

¿Cómo se expresa el ancho?

¿Cómo se expresa el largo?

¿Cómo queda expresada el área?

Luego de plantear la ecuación, ¿qué sigue?

* Recordar que se puede resolver por los métodos aprendidos en las clases anteriores.

* Tener en cuenta que x = 23 no puede ser solución al problema porque es mayor que el ancho y el largo de todo el terreno.

2. Resolver Ejercicio 3.3

(20 min)

Solución

x: longitud del ancho de la acera

PO: $(8 - x)(6 - x) = 24$

$x^2 - 14x + 24 = 0$

$(x - 12)(x - 2) = 0$

$x = 12, x = 2$

$x = 12$ no puede ser solución del problema, porque es mayor que el ancho y el largo de la plaza.

Respuesta: El ancho de la acera debe medir 2 m.

* Asegurarse que los alumnos hagan una representación gráfica del problema para un mayor entendimiento del mismo.

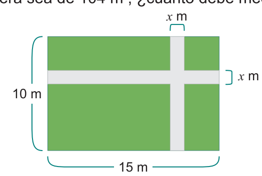
Unidad 3: Ecuaciones de segundo grado

Lección 3: (3/3) Aplicación de las ecuaciones de segundo grado

Objetivo: Resolver problemas aplicando las ecuaciones de segundo grado.

Ejemplo 3.3

En un terreno de forma rectangular cuyo largo mide 15 m y el ancho 10 m, se va a hacer una acera vertical y una horizontal del mismo ancho x metros. Si se quiere que el área fuera de la acera sea de 104 m², ¿cuánto debe medir el ancho de la acera?



Solución:

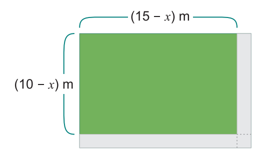
Para encontrar el ancho de la acera, se puede representar el área fuera de la acera de la siguiente manera:

largo: $15 - x$

ancho: $10 - x$

Área = largo × ancho

$104 = (15 - x)(10 - x)$



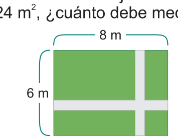
Resolviendo la ecuación anterior se obtiene:

$$(15 - x)(10 - x) = 104$$
$$150 - 15x - 10x + x^2 = 104$$
$$x^2 - 25x + 150 - 104 = 0$$
$$x^2 - 25x + 46 = 0$$
$$(x - 23)(x - 2) = 0$$
$$x - 23 = 0 \quad \text{ó} \quad x - 2 = 0$$
$$x = 23 \quad \text{ó} \quad x = 2$$

La solución $x = 23$ no puede ser solución al problema, porque es mayor que el ancho y el largo del terreno.

Respuesta: El ancho de la acera debe medir 2 m.

Ejercicio 3.3 En una plaza de forma rectangular cuyo largo y ancho miden 8 y 6 m respectivamente, se hará una acera vertical y una horizontal del mismo ancho como en el dibujo. Si se quiere que el área fuera del paso sea de 24 m², ¿cuánto debe medir el ancho de la acera?



70 Unidad 3 - Ecuaciones de segundo grado

* Asegurarse que comprendan y establezcan las relaciones entre las cantidades para que escriban la ecuación correcta.

Unidad 3: Ecuaciones de segundo grado

(1/2) Ejercicios de la unidad

Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre las ecuaciones de segundo grado.

Ejercicios

1 Identifique cuáles de las siguientes ecuaciones son de segundo grado.

a) $x^2 + x + 3 = 0$ b) $x - 1 = x^2$ c) $x^2 - x^3 = 0$
d) $x^2 - 3x + 5x^4 = 3$ e) $x + 7 = x^3$ f) $x(x - 1) = 4$

2 ¿Cuál es la ecuación cuya solución es −2 y −6?

a) $x^2 + 8x - 12 = 0$ b) $x^2 - 8x - 12 = 0$ c) $x^2 + 8x + 12 = 0$
d) $x^2 - 8x + 12 = 0$

3 Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $(x - 3)(x - 2) = 0$ b) $(x + 5)(x + 4) = 0$ c) $x^2 + 3x - 10 = 0$
d) $x^2 - 3x - 28 = 0$ e) $x^2 - 12x + 27 = 0$

4 Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $3x^2 - 7x + 2 = 0$ b) $5x^2 - 3x - 2 = 0$ c) $(x - 2)(x - 3) = 20$
d) $(x + 4)(x - 3) = -10$

5 Resuelva.

a) $x^2 = 13$ b) $x^2 = 36$ c) $x^2 = 8$
d) $x^2 = 81$ e) $4x^2 - 16 = 0$ f) $5x^2 - 25 = 0$

6 Resuelva.

a) $(x - 5)^2 = 7$ b) $(x + 3)^2 = 3$ c) $(x - 4)^2 = 16$
d) $(x + 8)^2 = 5$

7 Resuelva usando completación de cuadrados.

a) $x^2 + 14x = -2$ b) $x^2 + 4x = -2$ c) $x^2 + 12x + 2 = 0$

71

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

7 Resolución de ecuaciones cuadráticas usando completación de cuadrados

Solución

a) $x^2 + 14x + 7^2 = -2 + 7^2$
$x^2 + 14x + 49 = -2 + 49$
$(x + 7)^2 = 47$
$x = -7 \pm \sqrt{47}$

b) $x^2 + 4x + 2^2 = -2 + 2^2$
$x^2 + 4x + 4 = 2$
$(x + 2)^2 = 2$
$x = -2 \pm \sqrt{2}$

c) $x^2 + 12x + 6^2 = -2 + 6^2$
$x^2 + 12x + 36 = 34$
$(x + 6)^2 = 34$
$x = -6 \pm \sqrt{34}$

1 Identificación de ecuaciones de segundo grado.

Solución

a) Sí b) Sí c) No
d) No e) No f) Sí

2 Identificación de ecuaciones de segundo grado dada la solución.

Solución

c) $x^2 + 8x + 12 = 0$

3 Resolución de ecuaciones cuadráticas usando factorización.

Solución

a) $x = 3, x = 2$ b) $x = -5, x = -4$
c) $x = -5, x = 2$ d) $x = -4, x = 7$
e) $x = 9, x = 3$

4 Resolución de ecuaciones cuadráticas usando factorización.

Solución

a) $(3x - 1)(x - 2) = 0$
$x = \frac{1}{3}, x = 2$

b) $(5x + 2)(x - 1) = 0$
$x = -\frac{2}{5}, x = 1$

c) $x^2 - 5x - 14 = 0$
$(x - 7)(x + 2) = 0$
$x = 7, x = -2$

d) $x^2 + x - 2 = 0$
$(x + 2)(x - 1) = 0$
$x = -2, x = 1$

5 Resolución de ecuaciones cuadráticas usando raíz cuadrada.

Solución

a) $x = \pm\sqrt{13}$ b) $x = \pm 6$
c) $x = \pm 2\sqrt{2}$ d) $x = \pm 9$
e) $x = \pm 2$ f) $x = \pm\sqrt{5}$

6 Resolución de ecuaciones cuadráticas usando raíz cuadrada.

Solución

a) $x = 5 \pm \sqrt{7}$ b) $x = -3 \pm \sqrt{3}$
c) $x = 0, x = 8$ d) $x = -8 \pm \sqrt{5}$

Unidad 3: **Ecuaciones de segundo grado**

(2/2) Ejercicios de la unidad

Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre las ecuaciones de segundo grado

8 Cuando se expresan las siguientes ecuaciones de segundo grado en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, identifique a, b y c.

a) $x^2 - 5x + 3 = 0$ b) $5x^2 + 7x = -7$ c) $x^2 - 3x + 5 = 0$
d) $2x^2 = -3x + 8$

9 Resuelva usando la fórmula cuadrática.

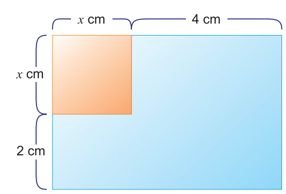
a) $x^2 + 3x + 1 = 0$ b) $2x^2 + x - 4 = 0$ c) $4x^2 + x - 1 = 0$
d) $2x^2 - 5x - 3 = 0$

10 Resuelva.

a) Si la suma de 2 números es 15 y su producto es 56. ¿Cuáles son esos 2 números?

b) La base de un triángulo es 3 cm más que la altura, si el área del triángulo es de 35 cm^2 ¿Cuáles son las medidas de la base y la altura del triángulo?

c) Hay un cuadrado de x cm cada lado. Si se extiende el lado vertical y el horizontal 2 cm y 4 cm respectivamente, se obtiene un rectángulo cuya área es de 48 cm^2. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?



8 Identificar a, b y c en las ecuaciones cuadráticas dadas en la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Solución

a) $a = 1$ $b = -5$ $c = 3$
b) $a = 5$ $b = 7$ $c = 7$
c) $a = 1$ $b = -3$ $c = 5$
d) $a = 2$ $b = 3$ $c = -8$

9 Resolución de ecuaciones cuadráticas usando fórmula cuadrática.

Solución

a) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

b) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}$

c) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$

d) $x = -\frac{1}{2}$, $x = 3$

10 Aplicaciones de las ecuaciones cuadráticas.

a) x: un número

$15 - x$: el otro número

PO: $x(15 - x) = 56$

$x^2 - 15x + 56 = 0$

$(x - 7)(x - 8) = 0$

$x = 7$, $x = 8$

si $x = 7$, $15 - x = 8$

si $x = 8$, $15 - x = 7$

Los números son 7 y 8

b) x: longitud de la altura

$x + 3$: longitud de la base

PO: $\frac{x(x+3)}{2} = 35$

$x(x + 3) = 70$

$x^2 + 3x - 70 = 0$

$(x + 10)(x - 7) = 0$

como $x > 0$

$x = 7$

La altura mide 7 cm.

La base mide $x + 3 = 7 + 3 = 10$ (cm).

c) PO: $(x + 4)(x + 2) = 48$

$x^2 + 6x - 40 = 0$

$(x + 10)(x - 4) = 0$

como $x > 0$

$x = 4$

El lado del cuadrado mide 4 cm

Unidad 4
Semejanza de triángulos

Lección 1: Semejanza de triángulos

Unidad 4

Semejanza de triángulos

(18 horas)

1 Expectativas de logro

- Construyen triángulos aplicando criterios o propiedades de congruencia o semejanza a otro dado.

2 Relación y desarrollo

Séptimo grado

Conjunto de puntos
- Puntos, rectas y planos
- Rayos y segmentos
- Longitud de un segmento
- Segmentos congruentes
- Distancia entre puntos
- Punto medio de un segmento
- Bisector de un segmento
- Puntos colineales

Ángulos
- Ángulo, medida y congruencia
- Clasificación de ángulos
- Construcción de la bisectriz
- Rectas perpendiculares y mediatriz de un segmento
- Construcción de la mediatriz
- Construcción de una perpendicular usando definición de mediatriz

Octavo grado

Paralelismo
- Rectas paralelas y transversales
- Ángulos formados por dos rectas paralelas y una transversal
- Congruencia de ángulos formados por dos rectas paralelas y una transversal
- Demostraciones sobre paralelismo
- Distancia entre rectas paralelas
- Construcción de rectas paralelas

Congruencia de triángulos
- Suma de las medidas de los ángulos de un triángulo
- Suma de las medidas de los ángulos de un polígono
- Congruencia de triángulos
- Triángulos isósceles y rectángulo

Cuadriláteros
- Elementos y clasificación de los cuadriláteros
- Paralelogramos
- Rectángulos, rombos y cuadrados
- Trapecios

Noveno grado

Semejanza de triángulos
- Figuras semejantes
- Triángulos semejantes
- Criterios de semejanza de triángulos
- Relación entre triángulos y proporción
- Relación entre paralelas y proporción
- Aplicación de la semejanza de triángulos

Teorema de Pitágoras
- Teorema de Pitágoras
- Recíproco del teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Polígonos regulares y el círculo
- Polígonos regulares
- Medida de los ángulos internos de un polígono regular
- Centro de un polígono regular
- Círculos
- Tangente a un círculo
- Área del círculo

Sólidos geométricos
- Áreas laterales de sólidos geométricos (cubos, prismas, pirámides, cilindros conos y esferas)
- Volumen de sólidos geométricos (pirámides, conos, cilindros y esferas)

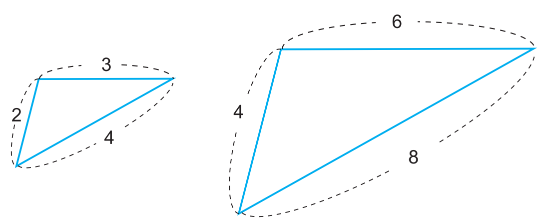
3 Plan de estudio (18 horas)

Lección	Distribución de horas	Contenidos
1. Semejanza de triángulos (16 horas)	1/16	• Figuras semejantes
	2~3/16	• Condiciones de dos triángulos semejantes
	4/16	• Criterios de semejanza de triángulos
	5~7/16	• Demostración aplicando criterios de semejanza de triángulos
	8~9/16	• Rectas paralelas y proporción
	10~12/16	• Relación entre triángulos y proporción
	13~14/16	• Relación entre paralelas y proporción
	15~16/16	• Aplicación de la semejanza de triángulos
Ejercicios (2 horas)	1~2/2	

4 Puntos de lección

Análisis de las pruebas diagnósticas 2016 - 2017

[Pregunta] Los siguientes triángulos son semejantes. ¿Cuál es la razón de semejanza?



Institutos: 14% CEB: 0% (2017)

Los contenidos de esta unidad no son fáciles, ya que necesitan los conocimientos que han adquirido en el bloque de Geometría y también deben tener los conocimientos de Razón, Proporcionalidad y Porcentaje (unidad 6 de 7mo grado).

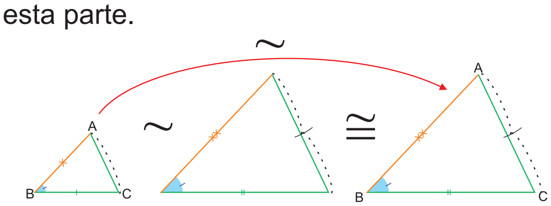
En adición a lo anterior, hay centros educativos que no logran cubrir este contenido, otra de las razones de por qué el porcentaje de respuestas correctas es tan bajo.

Lección 1: Semejanza de triángulos

En las secciones 1 y 2 se introduce el concepto de figuras semejantes a través de la reducción y ampliación de figuras sencillas utilizando la cuadrícula. Más adelante, se establecen las dos condiciones que deben cumplir las figuras semejantes. Seguidamente, se conceptualiza la razón de semejanza, pero es hasta en la sección 6 cuando se hacen ejemplos y ejercicios para encontrar este valor.

Para encontrar la longitud de un lado de un triángulo semejante a otro, se emplea el concepto de proporción y razón de semejanza.

En la sección 3, los criterios de semejanza de triángulos se introducen construyendo triángulos congruentes a los triángulos ampliados al doble del $\triangle ABC$. Se sugiere no profundizar en esta parte.



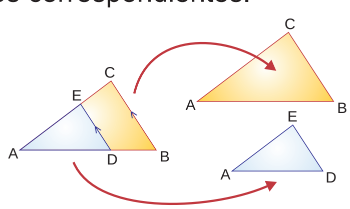
Los estudiantes deben comprender que los criterios de semejanza son paralelos a los criterios de congruencia.

En lugar de referirse a lados congruentes, se habla de lados proporcionales. Para designar los ángulos y lados correspondientes, se hace uso de la notación prima simple: A´, B´, C´, *a*´, *b*´ y *c*´.

En la sección 4, se proponen demostraciones donde se aplican los criterios de semejanza de triángulos. Se incluyen 2 demostraciones, que pueden ser tratadas como ejercicios adicionales o como actividades de la clase 7.

Rectas paralelas y proporción

En esta nueva edición, se definen triángulos en posición de Thales. Para que los estudiantes visualicen fácilmente dicho triángulos, se sugiere dibujarlos por separado e indicar sus lados correspondientes.



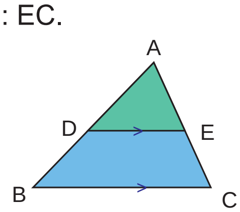
Se concluye que toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo que corta a los otros dos lados determina un triángulo semejante al dado.

Relación entre triángulos y proporción

Al tener como hipótesis el paralelismo del $\overline{DE}$ y $\overline{BC}$, se deduce la equivalencia entre la proporcionalidad de los lados

AD : AB = AE : AC = DE : BC

AD : DB = AE : EC.

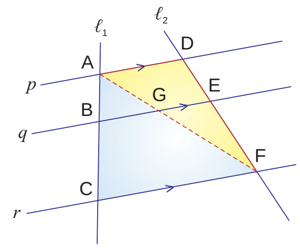


También se establece su recíproco, pero solo se demuestra que si AD : AB = AE : AC entonces $\overline{DE}$ y $\overline{BC}$ son paralelos.

Para concluir esta sección se demuestra y aplica el teorema del segmento medio de un triángulo.

Relación entre paralelas y proporción

Se demuestra el teorema de Thales aplicando las conclusiones de la relación entre triángulos y proporción.



Luego, se aplica este teorema para:

1) Encontrar la longitud de un segmento cuando se conoce su correspondiente en la otra recta transversal y la razón entre ambos.

2) Dividir un segmento en partes iguales.

Aplicación de la semejanza de triángulos

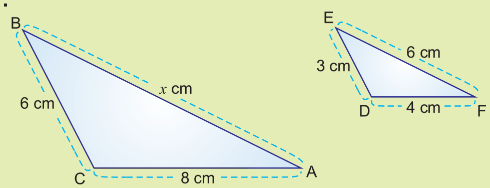
Con todos los conocimientos adquiridos sobre semejanza de triángulos, el estudiante es capaz de resolver problemas de aplicación.

Se inicia con un poco de historia matemática sobre el teorema de Thales. Luego, resuelve situaciones donde es necesario encontrar determinadas alturas o distancias inaccesibles. Para estos últimos se utilizan las mismas unidades de longitud, pensando siempre en facilitar el aprendizaje del estudiante.

Tema: Razón de semejanza [1]

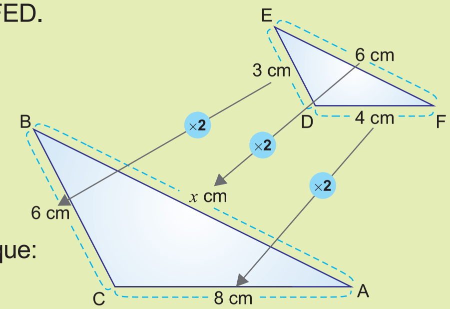
Ejemplo 1.5 [2] **Pág.** 78 [3]

Encuentre la longitud del lado AB si las longitudes de los lados correspondientes de los triángulos semejantes ABC y FED están a razón de 2 : 1.



Solución [4]

La razón de semejanza 2 : 1 entre el ΔABC y el ΔFED, significa que la longitud de los lados del ΔABC es 2 veces la longitud de los lados correspondientes en el ΔFED.



De esta forma, se tiene que:

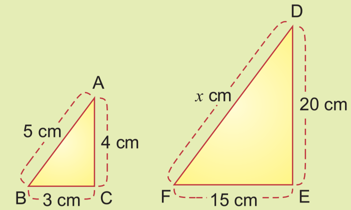
$x = 6 \times 2$

$x = 12$

Respuesta: AB = 12 cm [4]

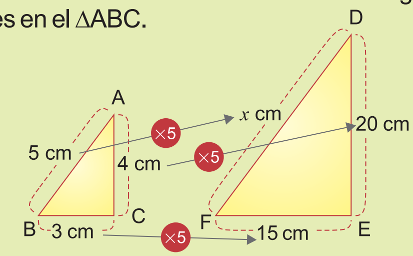
Ejercicio 1.4 [2] **Pág.** 79 [3]

Encuentre la longitud del lado DF si las longitudes de los lados correspondientes de los triángulos semejantes ABC y DFE están a razón de 1 : 5.



Solución [4]

La razón de semejanza 1 : 5 entre el ΔABC y el ΔDFE, significa que la longitud de los lados del ΔDFE es 5 veces la longitud de los lados correspondientes en el ΔABC.



De esta forma, se tiene que:

$x = 5 \times 5$

$x = 25$

Respuesta: DF = 25 cm [4] ✓

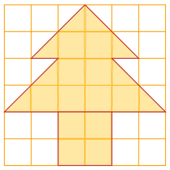
1. Al inicio de la clase escribir solo la palabra “**Tema**” y hasta el final de la clase (o en el desarrollo de la misma) escribir el contenido del tema.
2. Escribir el número del Ejemplo o Ejercicio.
3. Escribir el número de **Pág.** del LE para entender dónde se quedaron con respecto al tiempo.
4. Escribir la **Solución** y **Respuesta**.
5. En el problema planteado marcar los datos importantes para poder llegar a la respuesta.
6. Escribir la conclusión en un rectángulo de color rojo.

✓ Marcar en el Ejercicio cuando la solución o la respuesta sean correctas.

Nota: Los puntos aquí explicados no siempre aplican todos en un plan de pizarra.

Indicador de logro

Amplíe al doble la siguiente figura:



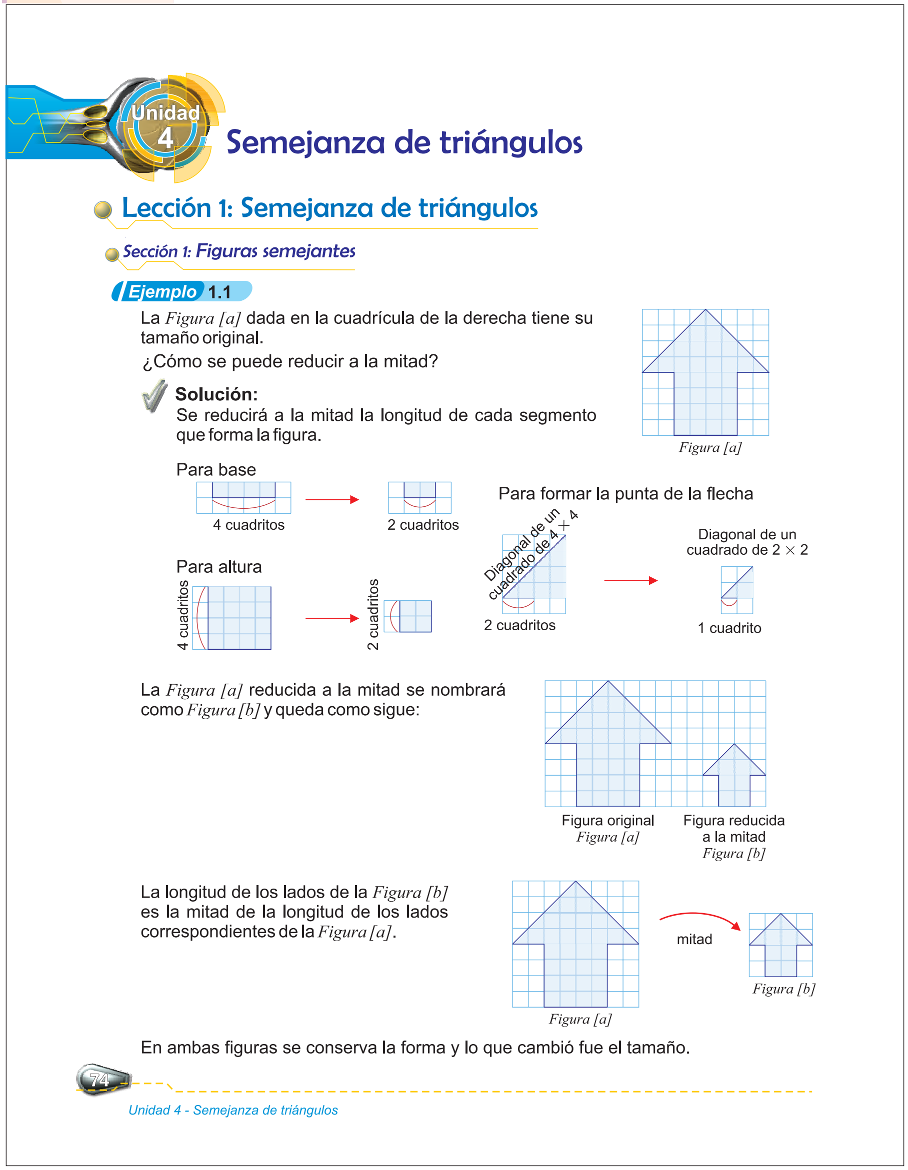
La lección 1 inicia con la semejanza de figuras en general, más adelante se profundizará sólo para los triángulos.

Unidad 4: Semejanza de triángulos

Lección 1: (1/16) Semejanza de triángulos

Sección 1: Figuras semejantes

Objetivos:
- Ampliar y reducir figuras en cuadrícula.
- Definir figuras semejantes.



Unidad 4 Semejanza de triángulos

Lección 1: Semejanza de triángulos

Sección 1: Figuras semejantes

Ejemplo 1.1

La *Figura [a]* dada en la cuadrícula de la derecha tiene su tamaño original.
¿Cómo se puede reducir a la mitad?

Solución:
Se reducirá a la mitad la longitud de cada segmento que forma la figura.

La *Figura [a]* reducida a la mitad se nombrará como *Figura [b]* y queda como sigue:

La longitud de los lados de la *Figura [b]* es la mitad de la longitud de los lados correspondientes de la *Figura [a]*.

En ambas figuras se conserva la forma y lo que cambió fue el tamaño.

74
Unidad 4 - Semejanza de triángulos

1. Definir figuras semejantes a través de la reducción utilizando la cuadrícula

Ejemplo 1.1

(15 min)

* Identificar con los estudiantes las partes que forman la *Figura [a]*: base, altura y la punta de la flecha.

* La longitud de cada segmento de los cuadritos que forman la figura, se expresará como 1, 2, 3,…, sin unidad. Al no tener unidad, esta puede ser equivalente a mm, cm, m o cualquier otra medida de longitud.

* Utilizando el papel cuadrícula reducen la *Figura [a]* a la mitad. Se divide la medida de cada uno de los lados que forman la *Figura [a]* entre 2 y se traza la *Figura [b]* en la misma hoja de papel cuadrícula.

¿Qué operación se hizo con la longitud de los lados de la *Figura [a]* para encontrar la longitud de los lados correspondientes de la *Figura [b]*?, ¿qué cambió en las figuras?, ¿qué se conservó?

* Explicar que la reducción consiste en disminuir el tamaño de una figura conservando su forma. Como información adicional puede mencionarse que el número por el que se divide la medida de los lados de la figura original para encontrar la medida de los lados de la nueva figura se llama constante de proporcionalidad, razón de semejanza o factor de escala según el contexto.

continúa en la siguiente página...

Unidad 4: **Semejanza de triángulos**

Lección 1: (1/16) Semejanza de triángulos

Sección 1: Figuras semejantes

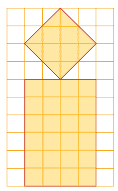
Objetivos:
- Ampliar y reducir figuras en cuadrícula.
- Definir figuras semejantes.

La reducción de una figura, es una nueva figura cuyos lados tienen por medida, la medida de los lados de la figura original dividida en todos por un mismo número y se dice que ambas figuras son **semejantes**.

La *Figura [a]* y la *Figura [b]* son semejantes.

Para indicar semejanza, se utiliza el símbolo ~, que es la tilde de la ñ, y se le conoce como virgulilla.
De esta forma, *Figura [a]* ~ *Figura [b]* se lee "*Figura [a]* es semejante a la *Figura [b]*"

Ejercicio 1.1 Reduzca a la mitad la siguiente figura.



Ejemplo 1.2
Dibuje una ampliación al doble de la *Figura [c]*, de manera que un segmento que mide 1 de largo, mida 2 en la figura ampliada y llámese a esta *Figura [d]*.

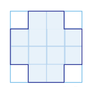


Figura [c]

Solución:
La longitud de los lados de la *Figura [d]* es el doble de la longitud de los lados correspondientes de la *Figura [c]*.

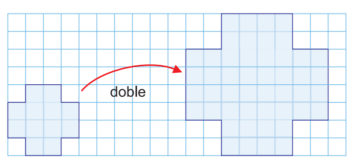
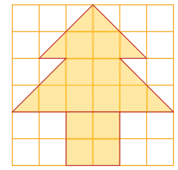


Figura original *Figura [c]*
Figura ampliada al doble *Figura [d]*

La ampliación de una figura, es una nueva figura cuyos lados tienen por medida, la medida de los lados de la figura original multiplicada en todos por un mismo número y se dice que ambas figuras son **semejantes**.

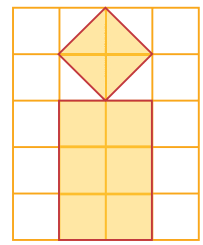
De esta forma, *Figura [d]* ~ *Figura [c]*

Indicador de logro
Amplíe al doble la siguiente figura:



* Definir cuándo dos figuras son semejantes.
* Indicar el símbolo que se utiliza para denotar semejanza.

2. Resolver **Ejercicio 1.1**
(10 min)
Solución

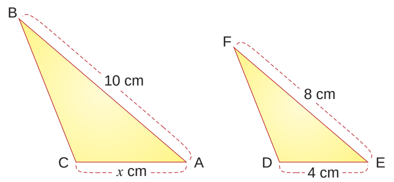


3. Definir figuras semejantes a través de la ampliación utilizando la cuadrícula.
Ejemplo 1.2
(10 min)
* Seguir el mismo razonamiento empleado en el **Ejemplo 1.1**
* Distinguir que al dividir las medidas de las longitudes de la figura original para obtener una nueva figura se está haciendo una reducción y al multiplicarlas, se está haciendo una ampliación.
* Verificar que se emplee correctamente el símbolo de semejanza.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Dado que $\triangle ABC$ y $\triangle EFD$ son semejantes, es decir, $\triangle ABC \sim \triangle EFD$, encuentre la longitud del lado CA

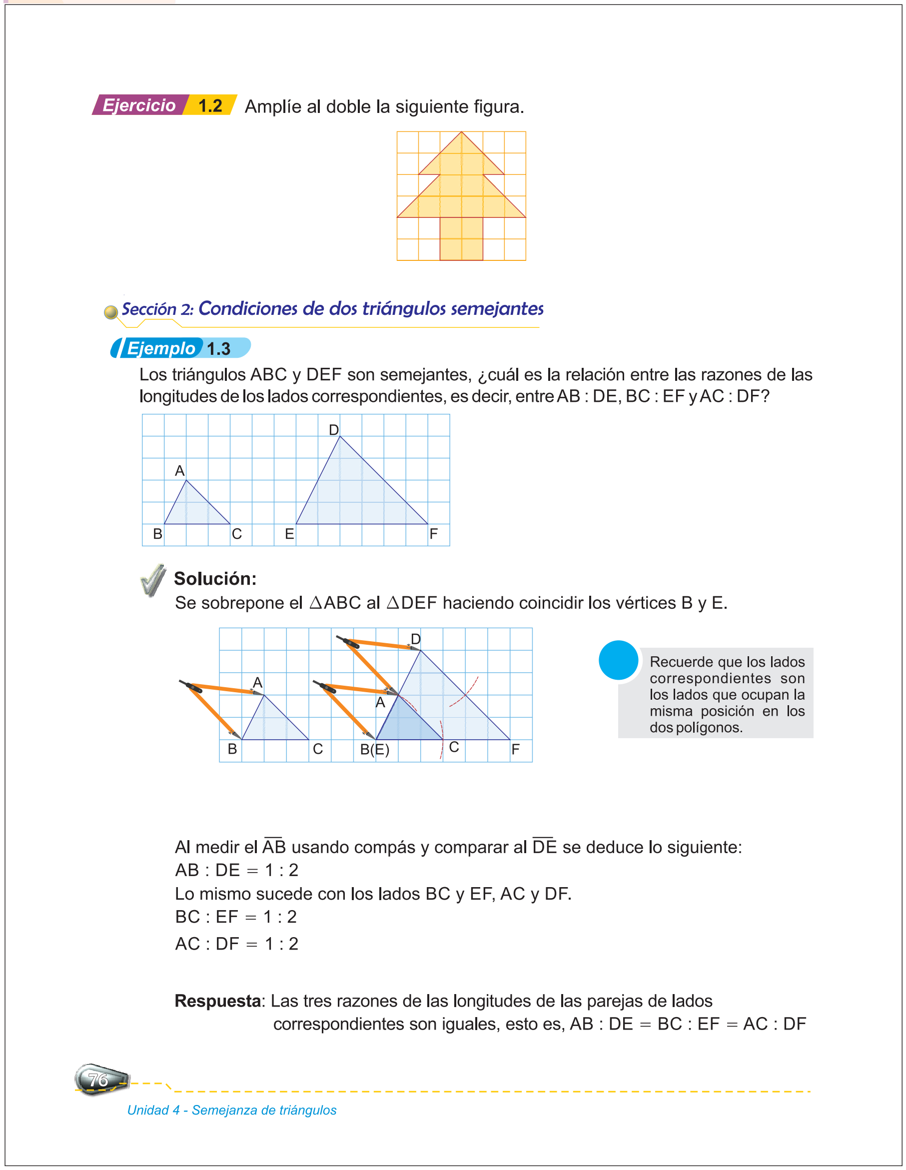


Unidad 4: Semejanza de triángulos

Lección 1: Semejanza de triángulos
(2/16)

Sección 2: Condiciones de dos triángulos semejantes

Objetivos:
- Determinar las condiciones que cumplen dos triángulos semejantes.
- Designar y leer dos triángulos semejantes.
- Encontrar la longitud de un lado de un triángulo semejante a otro.


Ejercicio 1.2 Amplíe al doble la siguiente figura.

Sección 2: Condiciones de dos triángulos semejantes

Ejemplo 1.3

Los triángulos ABC y DEF son semejantes, ¿cuál es la relación entre las razones de las longitudes de los lados correspondientes, es decir, entre AB : DE, BC : EF y AC : DF?

Solución:
Se sobrepone el $\triangle ABC$ al $\triangle DEF$ haciendo coincidir los vértices B y E.

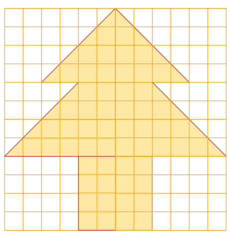
Recuerde que los lados correspondientes son los lados que ocupan la misma posición en los dos polígonos.

Al medir el $\overline{AB}$ usando compás y comparar al $\overline{DE}$ se deduce lo siguiente:
AB : DE = 1 : 2
Lo mismo sucede con los lados BC y EF, AC y DF.
BC : EF = 1 : 2
AC : DF = 1 : 2

Respuesta: Las tres razones de las longitudes de las parejas de lados correspondientes son iguales, esto es, AB : DE = BC : EF = AC : DF

76
Unidad 4 - Semejanza de triángulos

4. Resolver *Ejercicio* **1.2**
(10 min)
Solución



[Hasta aquí Clase 1]
[Desde aquí Clase 2]

1. Establecer la relación entre las razones de las longitudes de los lados correspondientes de triángulos semejantes. *Ejemplo* **1.3**
(25 min)

* Mostrar la lámina de los triángulos o dibujarlos en la pizarra, recalcando que son figuras semejantes.

* Sobreponer el $\triangle ABC$ (triángulo pequeño) al $\triangle DEF$ (triángulo grande) haciendo coincidir los vértices B y E.

* Recordar la definición de vértices, lados y ángulos correspondientes. El orden en este ejemplo es del triángulo pequeño ($\triangle ABC$) al triángulo grande ($\triangle DEF$).

* Utilizar el compás para comparar las longitudes de los lados AB y DE. Se verifica que la longitud del $\overline{DE}$ es 2 veces la longitud del $\overline{AB}$, estableciendo que AB : DE = 1 : 2. Hacer lo mismo para las parejas de lados correspondientes BC y EF, AC y DF.

* Concluir que las tres razones de las longitudes de las parejas de lados correspondientes son iguales.

continúa en la siguiente página...

Unidad 4: **Semejanza de triángulos**

Lección 1: (2/16) Semejanza de triángulos

Sección 2: Condiciones de dos triángulos semejantes

Objetivos:

- Determinar las condiciones que cumplen dos triángulos semejantes.
- Designar y leer dos triángulos semejantes.
- Encontrar la longitud de un lado de un triángulo semejante a otro.

En el Ejemplo 1.3, al tomar la medida de los ángulos correspondientes, se encuentra que $m\angle$A = $m\angle$D, $m\angle$B = $m\angle$E y $m\angle$C = $m\angle$F. En general, las figuras semejantes cumplen la siguiente condición:

Dos figuras son semejantes cuando:
1) Las tres razones de las longitudes de los lados correspondientes son iguales.
2) Los ángulos correspondientes son respectivamente congruentes.

La razón entre las longitudes de los lados correspondientes se denomina **razón de semejanza**.

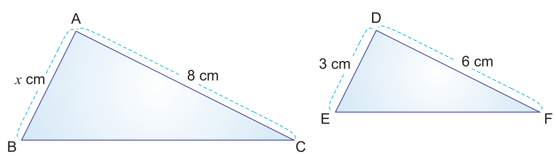
1 : 2 es la razón de semejanza entre los triángulos ABC y DEF del Ejemplo 1.3 .

En el caso del Ejemplo 1.3 el valor de la razón 1 : 2 es $\frac{1}{2}$. A veces este $\frac{1}{2}$ se llama también razón de semejanza entre los triángulos ABC y DEF.

Se puede aplicar el concepto de proporción para encontrar la longitud de un lado de una figura semejante a otra.

Ejemplo 1.4

Dado que $\triangle$ABC y $\triangle$DEF son semejantes, es decir, $\triangle$ABC ~ $\triangle$DEF, encuentre la longitud del lado AB.



Solución:
Dado que los triángulos ABC y DEF son semejantes, se puede formar una proporción con las longitudes de los lados correspondientes.

AB : DE = AC : DF

$x : 3 = 8 : 6$ ... sustituir los valores de las longitudes

$6x = 3 \times 8$ ... aplicar propiedad fundamental de las proporciones

$x = \frac{24}{6}$ ... despejar para x

$x = 4$

Propiedad fundamental de las proporciones

$\underbrace{a : \overbrace{\boxed{b} = \boxed{c}}^{\text{Medios}} : d}_{\text{Extremos}} \longrightarrow a\,d = \boxed{b}\,\boxed{c}$

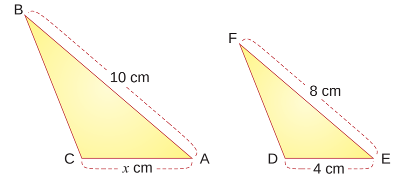
Respuesta: AB = 4 cm

77

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

Indicador de logro

Dado que $\triangle$ABC y $\triangle$EFD son semejantes, es decir, $\triangle$ABC ~ $\triangle$EFD, encuentre la longitud del lado CA



* Sobreponer el $\triangle$ABC (triángulo pequeño) al $\triangle$DEF (triángulo grande) haciendo coincidir los vértices A y D, B y E, C y F, verificando que los ángulos correspondientes son congruentes.

* Concluir con las dos condiciones que deben cumplir las figuras semejantes.

* Definir razón de semejanza.

* Especificar que el valor de la razón 1 : 2, es decir, $\frac{1}{2}$, también se llama razón de semejanza entre los triángulos ABC y DEF.

2. Encontrar la longitud de un lado de un triángulo semejante a otro. Ejemplo 1.4

(10 min)

* Designar los lados correspondientes AB y DE, AC y DF y formar la proporción.

* Especificar que lo anterior se puede hacer por la condición de semejanza que existe entre los triángulos ABC y DEF.

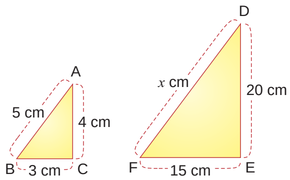
* Sustituir los valores de las longitudes y encontrar el valor de x aplicando la propiedad fundamental de las proporciones.

* Recordar que la longitud del lado AB se denota como x cm, por lo que, x representa el valor de la longitud sin la unidad de medida. Ya en la respuesta del ejemplo, se deben escribir ambas.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Encuentre la longitud del lado DF si las longitudes de los lados correspondientes de los triángulos semejantes ABC y DFE están a razón de 1 : 5



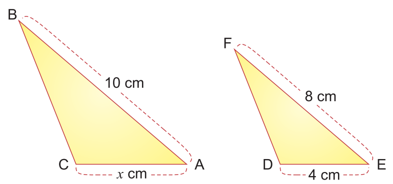
Unidad 4: Semejanza de triángulos

Lección 1: (3/16) Semejanza de triángulos

Sección 2: Condiciones de dos triángulos semejantes

Objetivo: Encontrar la longitud de un lado de un triángulo semejante a otro.

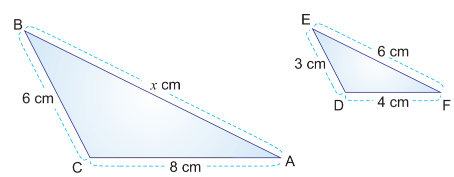
Ejercicio 1.3 Dado que $\triangle ABC$ y $\triangle EFD$ son semejantes, es decir, $\triangle ABC \sim \triangle EFD$, encuentre la longitud del lado CA.



Hay casos donde es más conveniente usar la razón de semejanza para encontrar la longitud del lado que hace falta.

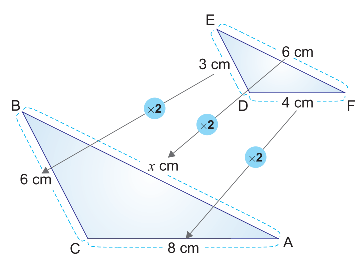
Ejemplo 1.5

Encuentre la longitud del lado AB si las longitudes de los lados correspondientes de los triángulos semejantes ABC y FED están a razón de 2 : 1.



Solución:

La razón de semejanza 2 : 1 entre el $\triangle ABC$ y el $\triangle FED$, significa que la longitud de los lados del $\triangle ABC$ es 2 veces la longitud de los lados correspondientes en el $\triangle FED$.



De esta forma, se tiene que:

$x = 6 \times 2$

$x = 12$

Respuesta: AB = 12 cm

3. Resolver **Ejercicio 1.3**

(10 min)

Solución

AB : EF = CA : DE

$10 : 8 = x : 4$

$10 \times 4 = 8x$

$40 = 8x$

$x = 5$

Respuesta: CA = 5 cm

[Hasta aquí Clase 2]

[Desde aquí Clase 3]

1. Encontrar la longitud de un lado de un triángulo semejante a otro, empleando la razón de semejanza.

Ejemplo 1.5

(25 min)

* Los estudiantes en 7mo grado han comprendido el concepto de razón, así que ahora deben aplicarlo cuando los términos de esa razón son longitudes de triángulos semejantes. En caso de ser necesario, puede darse un breve repaso sobre ese concepto.

¿Qué implica que las longitudes de los lados correspondientes de los triángulos semejantes ABC y FED estén a razón de 2 : 1?

* Auxiliarse de la figura que está en la solución para mostrar a los estudiantes que el 2 (valor de la razón 2 : 1) es también la razón de semejanza entre el $\triangle ABC$ y el $\triangle FED$.

* Encontrar el valor de x y escribir la respuesta con sus respectivas unidades.

continúa en la siguiente página...

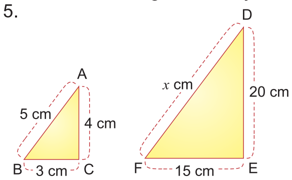
Unidad 4: Semejanza de triángulos

Lección 1: (4/16) Semejanza de triángulos

Sección 3: Criterios de semejanza de triángulos

Objetivo: Encontrar la longitud de un lado de un triángulo semejante a otro.

Ejercicio 1.4 Encuentre la longitud del lado DF si las longitudes de los lados correspondientes de los triángulos semejantes ABC y DFE están a razón de 1 : 5.

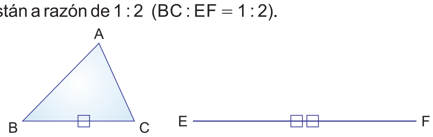


Sección 3: Criterios de semejanza de triángulos

A partir de un triángulo y de ciertas condiciones, se pueden construir triángulos semejantes a él.

Ejemplo 1.6

Construya el ∆DEF semejante al ∆ABC cuyas longitudes de los lados correspondientes BC y EF están a razón de 1 : 2 (BC : EF = 1 : 2).



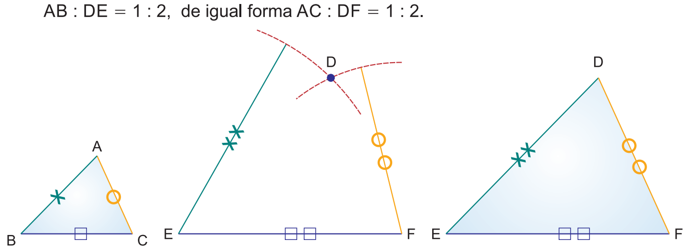
Solución:

El ∆DEF se puede construir haciendo uso de una de las siguientes maneras:

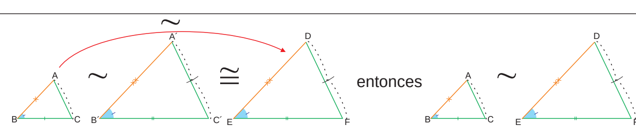
i) medida de sus 3 lados.
ii) medida de 2 lados y el ángulo comprendido entre ellos.
iii) medida de 1 lado y los dos ángulos adyacentes a él.

Utilizando manera *i*)

Aplicando la razón 1 : 2 a los lados correspondientes AB y DE, se tiene que AB : DE = 1 : 2, de igual forma AC : DF = 1 : 2.



De esta manera, el ∆DEF es congruente al triángulo de la ampliación al doble del ∆ABC, así que, ∆DEF ~ ∆ABC.

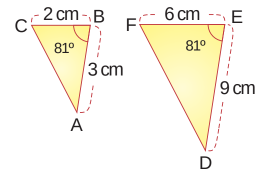


* Recordar que la razón entre las longitudes de los lados correspondientes de los triángulos puede ser cualquier otra, no solo 1 : 2.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Identifique el criterio de semejanza de triángulos (LLL, LAL, AA) utilizado para indicar si los siguientes triángulos son semejantes.



2. Resolver **Ejercicio 1.4**

(20 min)

Solución (Página 123)

Ejercicios adicionales (Página 123)

[Hasta aquí Clase 3]

[Desde aquí Clase 4]

1. Establecer los criterios de semejanza de triángulos construyendo triángulos semejantes. **Ejemplo 1.6**

(35 min)

* Recordar la construcción de triángulos que se hizo para establecer los criterios de congruencia de triángulos en 8vo grado. ¿Existe alguna manera para construir el ∆DEF semejante al ∆ABC con la condición BC : EF = 1 : 2?

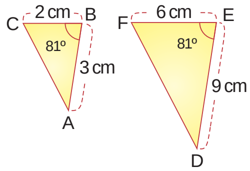
* Para la manera *i*), ¿cuál será la medida de los lados DE y DF?, ¿por qué la medida del lado DE es el doble de la medida del lado AB?, ¿puede construirse el ∆DEF conociendo la medida de los 3 lados?

* Trazando el ∆DEF conocidas las medidas de los 3 lados ¿qué observa?, ¿cuántos triángulos hay con las mismas condiciones?

* Concluir que ese ∆DEF es congruente al triángulo de la ampliación al doble del ∆ABC, por criterio de congruencia LLL. Es claro que este triángulo que es la ampliación al doble del ∆ABC es semejante al ∆ABC, por lo que ∆DEF ~ ∆ABC.

Indicador de logro

Identifique el criterio de semejanza de triángulos (LLL, LAL, AA) utilizado para indicar si los siguientes triángulos son semejantes.



* Para la manera *ii*), una vez que se tiene el segmento EF como base y la proporción BC : EF = 1 : 2, ¿que otro elemento puedo obtener del ∆ABC para trazar el ∆DEF?
* Medir con el transportador el ∠B y luego trazar el ∠E.
* Con el compás tome la longitud del lado AB y trace el lado DE, el cual tendrá el doble de la longitud del lado AB, luego trace el ∆DEF.
* Para la manera *iii*), teniendo el segmento EF como base, medir con el transportador los ángulos B y C, luego trazar los ángulos E y F. En la intersección de los rayos se ubicará el punto D y se trazará el ∆DEF.
* Resaltar que para esta manera, no se necesitó conocer la medida del tercer ángulo.

  ¿Qué sucedería si los estudiantes conocieran la medida de los tres ángulos y se les pidiera trazar triángulos con esas medidas? Ellos trazarían triángulos con lados de distinta longitud y surgiría de manera natural el concepto de triángulos semejantes.
* Para cada una de las construcciones hechas utilizando la manera *i*), *ii*) y *iii*), ¿qué criterio de semejanza se ha utilizado?
* Explicar el uso de las letras $a´$, $b´$, $c´$, A´, B´, C´.

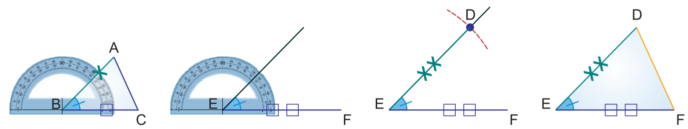
Unidad 4: Semejanza de triángulos

Lección 1: (4/16) Semejanza de triángulos

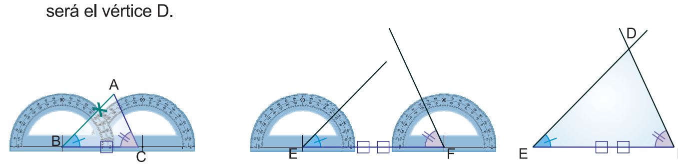
Sección 3: Criterios de semejanza de triángulos

Objetivo: Establecer los criterios de semejanza de triángulos.

Utilizando manera *ii*)
Se construye el ∠E congruente al ∠B y se utiliza la proporción AB : DE = 1 : 2



Utilizando manera *iii*)
Desde los extremos del segmento EF se construyen los ángulos conocidos, ∠B ≅ ∠E y ∠C ≅ ∠F. El punto de intersección de los lados de esos ángulos será el vértice D.



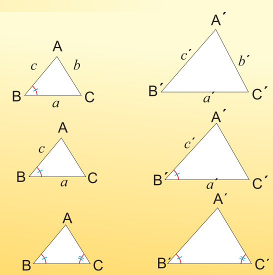
En caso de *ii*) y *iii*), también se puede concluir que ∆DEF ~ ∆ABC.

En la práctica, para saber si dos triángulos son semejantes, no se necesita comparar las tres razones de las longitudes de parejas de lados correspondientes ni la congruencia de los tres ángulos.

Al igual que en la congruencia, existen los denominados criterios de semejanza, que constituyen las condiciones mínimas necesarias para establecer que dos triángulos son semejantes.

Criterios de semejanza de triángulos

1. Las razones de las longitudes de los tres lados correspondientes son iguales (LLL).
   $a : a´ = b : b´ = c : c´$
2. Las razones de las longitudes de dos pares de lados correspondientes son iguales y el ángulo comprendido es congruente (LAL). $a : a´ = c : c´$
   ∠B ≅ ∠B´
3. Dos ángulos correspondientes son congruentes (AA). ∠B ≅ ∠B´
   ∠C ≅ ∠C´



Tal como se comprobó al construir el ∆DEF de la manera *iii*), basta conocer la medida de dos ángulos para construir un triángulo semejante, la longitud de los lados puede estar en cualquier razón respecto al ∆ABC.

80

Unidad 4 - Semejanza de triángulos

continúa en la siguiente página...

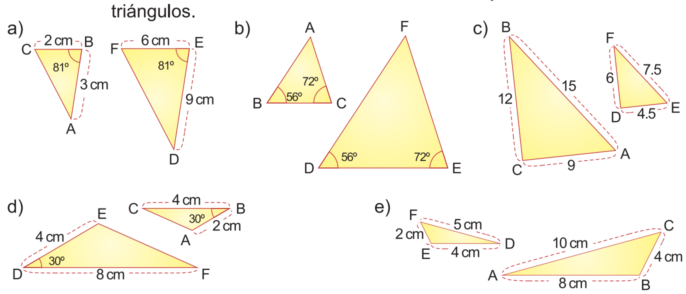
Unidad 4: Semejanza de triángulos

Lección 1: (5/16) Semejanza de triángulos

Sección 4: Demostración aplicando criterios de semejanza de triángulos

Objetivo: Establecer los criterios de semejanza de triángulos.

Ejercicio 1.5 Identifique el criterio de semejanza de triángulos (LLL, LAL, AA) utilizado para indicar si los siguientes triángulos son semejantes. La decisión debe basarse en las medidas dadas y no en la forma de los triángulos.

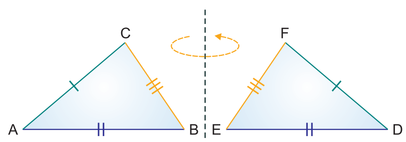


Sección 4: Demostración aplicando criterios de semejanza de triángulos

Al igual que como se hizo con los criterios de congruencia en 8vo grado, se hará uso de los criterios de semejanza vistos anteriormente para demostrar la validez de una proposición a través del razonamiento directo o deductivo. Recuerde también que es conveniente prefijar un "Plan de desarrollo de la demostración" y escribir claramente las justificaciones o razones por las cuales las proposiciones son verdaderas.

Ejemplo 1.7

En la figura de abajo, el $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. Demuestre que esos triángulos también son semejantes.



Hipótesis: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

Conclusión: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Entre ΔABC y ΔDEF ,

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\angle A \cong \angle D$	Por hipótesis y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes
2) $\angle B \cong \angle E$	Por hipótesis y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes
3) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$	Por 1), 2) y criterio de semejanza AA

La congruencia de triángulos es un caso especial de la semejanza de triángulos.

81

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

Indicador de logro

Razone y conteste.
Si la razón de semejanza entre los triángulos ABC y DEF es 1:1, ¿el ΔABC es congruente con el ΔDEF?

2. Resolver **Ejercicio 1.5**

(10 min)

Solución

a) LAL
b) AA
c) LLL
d) LAL
e) LLL

[Hasta aquí Clase 4]
[Desde aquí Clase 5]

1. Demostrar que la congruencia de triángulos es un caso especial de la semejanza de triángulos. **Ejemplo 1.7**

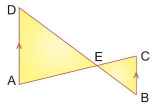
(35 min)

* Recordar de lo visto en 8vo grado, cuál es el esquema que tiene una demostración: figura, hipótesis, conclusión, afirmaciones y justificaciones.
* Para iniciar demostraciones, es necesario observar la relación entre los triángulos que se dan para ilustrar la hipótesis. Si $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ¿qué se puede concluir de los lados y ángulos correspondientes?, ¿se puede utilizar algún criterio de semejanza?, ¿hacen falta datos?
* Para este ejemplo, pudo haberse utilizado cualquier criterio de semejanza de triángulos, sin embargo, se utiliza el criterio de semejanza AA por ser más fácil de recordar para los estudiantes.
* Concluir que la congruencia de triángulos es un caso especial de la semejanza de triángulos.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

En la figura dada, si el lado AD es paralelo al lado BC demuestre que los triángulos ADE y CBE son semejantes.



Hipótesis: $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

Conclusión: $\Delta ADE \sim \Delta CBE$

Entre ____ y ΔCBE ,

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\angle A \cong$ ____	____ y congruencia de ángulos ____
2) ____ $\cong \angle B$	Por hipótesis y ____
3) ____ $\sim \Delta CBE$	Por 1), 2) y criterio de semejanza ____

2. Resolver Ejercicio **1.6**

(10 min)

Solución

Sí, el ΔABC es congruente con el ΔDEF, puesto que las longitudes de los lados y las medidas de los ángulos son iguales (están a razón 1:1).

[Hasta aquí Clase 5]

[Desde aquí Clase 6]

1. Aplicando el criterio de semejanza AA, demostrar que $\Delta ABC \sim \Delta EDC$.

Ejemplo **1.8**

(25 min)

* Para esta demostración se debe recordar la relación de ángulos alternos internos en rectas paralelas vista en 8vo grado.

* Los estudiantes deben prestar atención a las figuras que aparecen para ilustrar una demostración, los datos que encuentren en ella servirán para la hipótesis, luego, ya en la solución, aparecen marcas que denotan las justificaciones de cada una de las afirmaciones.

¿Qué implica la hipótesis $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ en relación a los ángulos A y E?, ¿y en relación a los ángulos D y B?

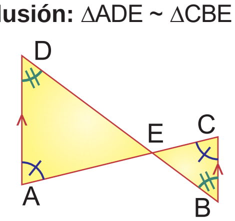
* Luego de observar la relación entre los triángulos ABC y EDC, ¿qué se puede concluir sobre la congruencia de ángulos?, ¿qué criterio de semejanza se puede emplear?

2. Resolver Ejercicio **1.7**

(20 min)

Hipótesis: $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

Conclusión: $\Delta ADE \sim \Delta CBE$



Unidad 4: Semejanza de triángulos

Lección 1: (6/16) Semejanza de triángulos

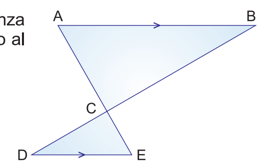
Sección 4: Demostración aplicando criterios de semejanza de triángulos

Objetivo: Demostrar proposiciones aplicando los criterios de semejanza de triángulos.

Ejercicio **1.6** Razone y conteste.
Si la razón de semejanza entre los triángulos ABC y DEF es 1:1, ¿el ΔABC es congruente con el ΔDEF?

Ejemplo **1.8**

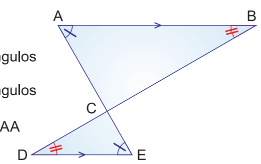
Utilizando la figura de la derecha, demuestre la semejanza de los triángulos ABC y EDC si el lado AB es paralelo al lado DE.



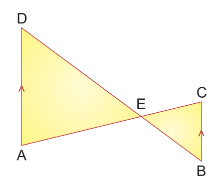
Solución:
Hipótesis: $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$
Conclusión: $\Delta ABC \sim \Delta EDC$

Entre ΔABC y ΔEDC ,

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\angle A \cong \angle E$	Por hipótesis y congruencia de ángulos alternos internos
2) $\angle B \cong \angle D$	Por hipótesis y congruencia de ángulos alternos internos
3) $\Delta ABC \sim \Delta EDC$	Por 1), 2) y criterio de semejanza AA



Ejercicio **1.7** En la figura dada, si el lado AD es paralelo al lado BC, demuestre que los triángulos ADE y CBE son semejantes.



Solución:
Hipótesis: $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
Conclusión: $\Delta ADE \sim \Delta CBE$

Entre ____ y ΔCBE ,

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\angle A \cong$ ____	____ y congruencia de ángulos ____
2) ____ $\cong \angle B$	Por hipótesis y ____
3) ____ $\sim \Delta CBE$	Por 1), 2) y criterio de semejanza ____

82

Unidad 4 - Semejanza de triángulos

Entre $\boxed{\Delta ADE \text{ y } \Delta CBE}$,

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\angle A \cong \boxed{\angle C}$	$\boxed{\text{Por hipótesis}}$ y congruencia de ángulos $\boxed{\text{alternos internos}}$
2) $\boxed{\angle D} \cong \angle B$	Por hipótesis y $\boxed{\text{congruencia de ángulos alternos internos}}$
3) $\boxed{\Delta ADE} \sim \Delta CBE$	Por 1), 2) y criterio de semejanza $\boxed{AA}$

Unidad 4: Semejanza de triángulos

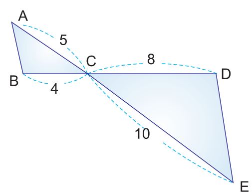
Lección 1: (7/16) Semejanza de triángulos

Sección 4: Demostración aplicando criterios de semejanza de triángulos

Objetivo: Demostrar proposiciones aplicando los criterios de semejanza de triángulos.

Ejemplo 1.9

En la figura dada, si los lados correspondientes de los triángulos ABC y EDC tienen las siguientes medidas: AC = 5 y EC = 10, BC = 4 y DC = 8, demuestre que los triángulos ABC y EDC son semejantes.



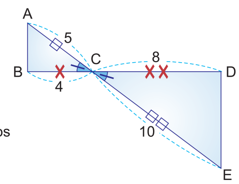
Solución:

Hipótesis: AC = 5 y EC = 10
BC = 4 y DC = 8

Conclusión: $\Delta ABC \sim \Delta EDC$

Entre ΔABC y ΔEDC ,

Afirmaciones	Justificaciones
1) AC : EC = 5 : 10 = 1 : 2	Por hipótesis y cálculo de razón simplificada
2) BC : DC = 4 : 8 = 1 : 2	Por hipótesis y cálculo de razón simplificada
3) AC : EC = BC : DC	Por 1) y 2)
4) $\angle ACB \cong \angle ECD$	Por ser ángulos opuestos por el vértice
5) $\Delta ABC \sim \Delta EDC$	Por 3), 4) y criterio de semejanza LAL



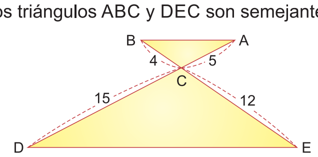
Ejercicio 1.8 En la figura dada, si los lados correspondientes de los triángulos ABC y DEC tienen las siguientes medidas: AC = 5 y DC = 15, BC = 4 y EC = 12, demuestre que los triángulos ABC y DEC son semejantes.

Solución:

Hipótesis: AC = 5 y DC = 15
BC = 4 y EC = 12

Conclusión: $\Delta ABC \sim \Delta DEC$

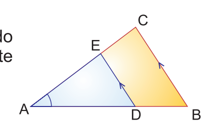
Entre ΔABC y ______ ,



Afirmaciones	Justificaciones
1) AC : DC = 5 : 15 = ___ : ___	Por ______ y cálculo de razón simplificada
2) BC : EC = ___ : ___ = 1 : 3	Por ______
3) AC : DC = ___ : ___	Por 1) y ___
4) ______ $\cong \angle DCE$	Por ser ángulos ______
5) ______ $\sim \Delta DEC$	Por ___ , ___ y criterio de semejanza ___

Sección 5: : Rectas paralelas y proporción

Dos triángulos están en posición de Thales cuando tienen un ángulo común y los lados opuestos a este ángulo son paralelos.



83

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

Indicador de logro

Resolver **Ejercicio 1.8**

1. **Demostrar proposiciones aplicando los criterios de semejanza de triángulos.** **Ejemplo 1.9**

   (25 min)

* Para esta demostración se debe recordar cómo se encuentra la razón simplificada y la relación de ángulos opuestos por el vértice vista en 8vo grado.

¿Cuál es la razón AC : EC?

* Luego de observar la relación entre las longitudes de los lados que marca la figura, ¿qué se puede concluir sobre el ángulo ACB y el ángulo ECD?, ¿qué criterio de semejanza se puede emplear?

* Los estudiantes deben comprender que para enunciar los criterios de semejanza de triángulos, no se habla de la igualdad de la longitud de uno o varios lados de los triángulos, sino de la proporcionalidad.

2. **Resolver** **Ejercicio 1.8**

   (20 min)

   Solución (Página 123)

Ejercicios adicionales
(Página 124)

[Hasta aquí Clase 7]
[Desde aquí Clase 8]

1. **Explicar cuándo dos triángulos están en posición de Thales.**

   (5 min)

* Si los estudiantes preguntan por qué el nombre de Thales, se puede hacer una breve reseña (ver páginas 94 y 95 del LE)

continúa en la siguiente página...

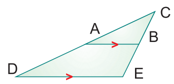
Indicador de logro

En el ΔDEC, el punto A está en el $\overline{CD}$ y el punto B está en el $\overline{CE}$.
Si $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, demuestre que los triángulos ABC y DEC son semejantes.

Hipótesis: $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$

Conclusión: $\Delta ABC \sim \Delta DEC$

Entre ______ y ΔDEC ,



Afirmaciones	Justificaciones
1) ______ $\cong \angle CDE$	Por hipótesis y congruencia de ángulos ______
2) $\angle CBA \cong$ ______	______
3) $\Delta ABC \sim$ ______	Por 1), 2) y criterio de semejanza ______

2. Demostrar que toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo que corta a los otros dos lados determina un triángulo semejante al dado *Ejemplo* **1.10**

(20 min)

¿Qué se va a demostrar?, ¿cuál es la hipótesis?, ¿qué se necesita para demostrar que dos triángulos cualesquiera son semejantes?

¿Qué rectas son paralelas?, ¿qué rectas son transversales?

* Para la solución, ir marcando en la figura cada una de las afirmaciones y preguntado a los estudiantes: ¿por qué se justifica ese paso?

* Generalizar el resultado.

* Mostrar la lámina de los triángulos o dibujarlos en la pizarra, señalando por separado, cuáles son los triángulos semejantes que estaban en posición de Thales.

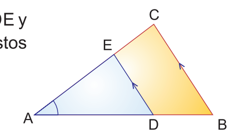
Unidad 4: Semejanza de triángulos

Lección 1: (8/16) Semejanza de triángulos

Sección 5: Rectas paralelas y proporción

Objetivo: Demostrar proposiciones aplicando semejanza de triángulos formados con rectas paralelas y proporciones.

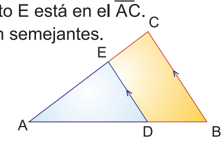
En la figura anterior, se puede ver que los dos triángulos ADE y ABC tienen el $\angle A$ en común, mientras que los lados opuestos a este ángulo, los lados DE y BC, son paralelos.



Se demostrará que si dos triángulos se pueden poner en posición de Thales, entonces sus ángulos correspondientes son congruentes y las longitudes de sus lados correspondientes proporcionales, y por tanto, son semejantes.

Ejemplo **1.10**

En el ΔABC de la figura, el punto D está en el $\overline{AB}$ y el punto E está en el $\overline{AC}$.
Si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, demuestre que los triángulos ADE y ABC son semejantes.



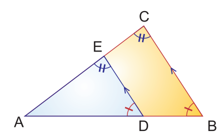
Solución:

Hipótesis: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

Conclusión: $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

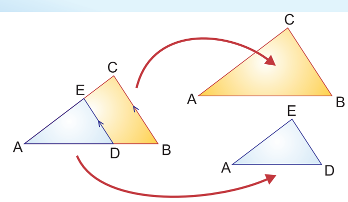
Entre ΔADE y ΔABC ,

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\angle ADE \cong \angle ABC$	Por hipótesis y congruencia de ángulos correspondientes
2) $\angle AED \cong \angle ACB$	Por hipótesis y congruencia de ángulos correspondientes
3) $\Delta ADE \sim \Delta ABC$	Por 1), 2) y criterio de semejanza AA



En general, se puede decir que

Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo que corta a los otros dos lados determina un triángulo semejante al dado.



Puesto que $\Delta ADE \sim \Delta ABC$, se sabe que la razón de cualesquiera dos longitudes de lados correspondientes es la misma.
De esta forma, a partir de $AB : AD = AC : AE = BC : DE$ se pueden formar proporciones como:

$AB : AD = AC : AE$
$AC : AE = BC : DE$
$AB : AD = BC : DE$

Todo lo anterior también puede expresarse con sus razones inversas.

84 *Unidad 4 - Semejanza de triángulos*

continúa en la siguiente página...

Unidad 4: Semejanza de triángulos

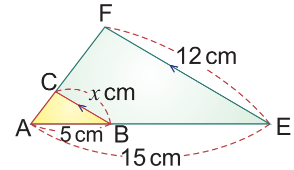
Lección 1: (9/16) Semejanza de triángulos

Sección 5: Rectas paralelas y proporción

Objetivo: Demostrar proposiciones aplicando semejanza de triángulos formados con rectas paralelas y proporciones.

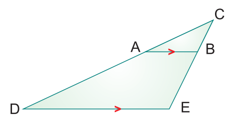
Indicador de logro

En la figura dada, si $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$, encuentre la longitud del lado BC.



Ejercicio 1.9 En el ΔDEC, el punto A está en el $\overline{CD}$ y el punto B está en el $\overline{CE}$. Si $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, demuestre que los triángulos ABC y DEC son

Solución:
Hipótesis: $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$
Conclusión: $\Delta ABC \sim \Delta DEC$
Entre ______ y ΔDEC ,

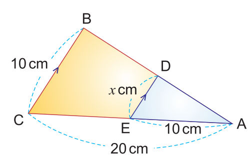


Afirmaciones	**Justificaciones**
1) ____ $\cong \angle CDE$	Por hipótesis y congruencia de ángulos entre paralelas ____
2) $\angle CBA \cong$ ____	Por hipótesis y ____
3) $\Delta ABC \sim$ ____	Por 1), 2) y criterio de semejanza ____

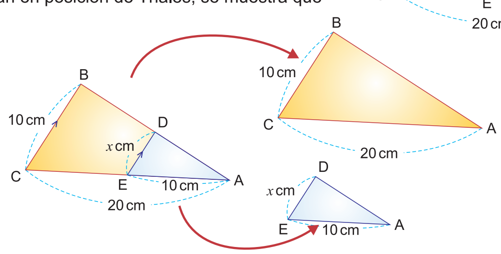
Al igual que en ejercicios anteriores, se puede aplicar la propiedad fundamental de la proporciones para encontrar la longitud de un lado de un triángulo semejante a otro en posición de Thales.

Ejemplo 1.11

En la figura dada, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, encuentre la longitud del lado DE.



Solución:
Al separar los triángulos semejantes que están en posición de Thales, se muestra que



Y aplicando la proporcionalidad de los lados, se tiene que,

BC : DE = CA : EA

$10 : x = 20 : 10$ ... sustituir los valores de las longitudes

$20x = 10 \times 10$ ... aplicar propiedad fundamental de las proporciones

$x = \frac{100}{20}$ ... despejar para x

$x = 5$

Respuesta: DE = 5 cm

85

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

¿Qué se puede formar con las razones de las longitudes de lados correspondientes?, ¿por qué?

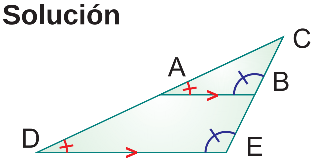
* Sustituir los valores de las longitudes y encontrar el valor de x.

* Escribir la respuesta con su respectiva unidad.

3. Resolver Ejercicio 1.9

(20 min)

Solución



Hipótesis: $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$
Conclusión: $\Delta ABC \sim \Delta DEC$
Entre ΔABC y ΔDEC ,
Afirmaciones
1) $\angle CAB \cong \angle CDE$
2) $\angle CBA \cong \angle CED$
3) $\Delta ABC \sim \Delta DEC$

Justificaciones
1) Por hipótesis y congruencia de ángulos correspondientes
2) Por hipótesis y congruencia de ángulos correspondientes
3) Por 1), 2) y criterio de semejanza AA

[Hasta aquí Clase 8]
[Desde aquí Clase 9]

1. Encontrar la longitud de un lado de un triángulo semejante a otro en posición de Thales. Ejemplo 1.11

(25 min)

* Mostrar una lámina con los triángulos ABC y ADE en posición de Thales. *Sugerencia*: El triángulo ADE puede tener un color diferente y estar superpuesto sobre 2 triángulos ABC. Luego, se separan y quedan tal como lo muestra la figura.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro
Desarrollar *Ejemplo* **1.13**

Unidad 4: **Semejanza de triángulos**

Lección 1: (10/16) Semejanza de triángulos

Sección 6: Relación entre triángulos y proporción

Objetivo: Encontrar la medida de un lado aplicando semejanza de triángulos formados con rectas paralelas y proporciones.

2. Resolver *Ejercicio* **1.10**

(20 min)

Solución

a) AB : AE = BC : EF

$5 : 15 = x : 12$

$15x = 5 \times 12$

$x = \dfrac{60}{15}$

$x = 4$

Respuesta: BC = 4 cm

b) CA : EA = BA : DA

$x : 1 = 10 : 2$

$2x = 1 \times 10$

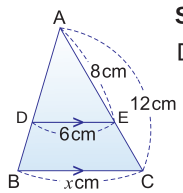
$x = \dfrac{10}{2}$

$x = 5$

Respuesta: CA = 5 cm

Ejercicios adicionales

a) En la figura dada, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, encuentre la longitud del lado BC.



Solución

DE : BC = AE : AC

$6 : x = 8 : 12$

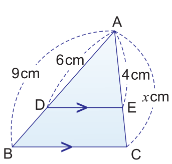
$8x = 6 \times 12$

$x = \dfrac{72}{8}$

$x = 9$

Respuesta: BC = 9 cm

b) En la figura dada, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, encuentre la longitud del lado AC.



Solución

AB : AD = AC : AE

$9 : 6 = x : 4$

$6x = 9 \times 4$

$x = \dfrac{36}{6}$

$x = 6$

Respuesta: AC = 6 cm

[Hasta aquí Clase 9]

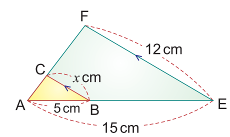
[Desde aquí Clase 10]

1. Encontrar la razón de semejanza y concluir sobre la relación entre triángulo y proporción. *Ejemplo* **1.12**

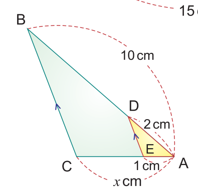
(20 min)

* Recordar la definición de razón de semejanza vista en el *Ejemplo* **1.3** "La razón entre las longitudes de los lados correspondientes se denomina razón de semejanza".

Ejercicio **1.10** a) En la figura dada, si $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$, encuentre la longitud del lado BC.



b) En la figura dada, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, encuentre la longitud del lado CA.



Sección 6: Relación entre triángulos y proporción

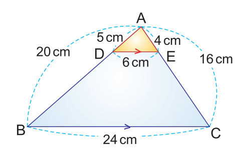
Ejemplo **1.12**

En la figura dada, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, encuentre

a) La razón de semejanza entre ΔADE y ΔABC

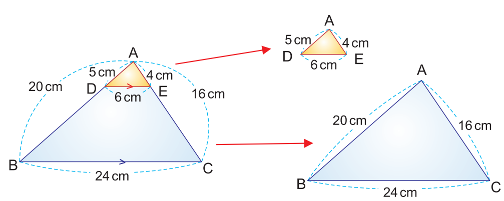
b) La razón entre las longitudes de los lados AD y DB

c) La razón entre las longitudes de los lados AE y EC



Solución:

a) Puesto que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, entonces $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ y se puede calcular la razón de semejanza dividiendo la longitud de un lado cualquiera del ΔADE entre la longitud del lado correspondiente del ΔABC.



Tomando la longitud del lado AD y su correspondiente lado AB, se tiene que

AD : AB = 5 : 20 = 1 : 4

Respuesta: 1 : 4

La respuesta sería la misma si se hubiesen tomado las razones de AE : AC y DE :

continúa en la siguiente página...

Unidad 4: **Semejanza de triángulos**

Lección 1: (10/16) Semejanza de triángulos

Sección 6: Relación entre triángulos y proporción

Objetivo: Establecer la relación entre el triángulo y las proporciones.

b) Para encontrar la razón AD : DB, primero se debe calcular la longitud del lado

AB = AD + DB
20 = 5 + DB ... sustituir los valores de las longitudes
DB = 20 − 5 ... despejar para DB
DB = 15
Luego, AD : DB = 5 : 15 = 1 : 3

Respuesta: AD : DB = 1 : 3

c) Para encontrar la razón AE : EC, se calcula primero la longitud del lado EC.

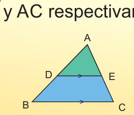
AC = AE + EC
16 = 4 + EC ... sustituir los valores de las longitudes
EC = 16 − 4 ... despejar para EC
EC = 12
Luego, AE : EC = 4 : 12 = 1 : 3

Respuesta: AE : EC = 1 : 3

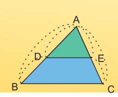
La razón entre los lados AD y DB es igual a la razón entre los lados AE y EC, por lo que AD : DB = AE : EC.
En general, al relacionar triángulos y proporciones, se dan las siguientes conclusiones:

Relación entre triángulo y proporción
En el $\triangle$ABC sean D y E puntos en los lados AB y AC respectivamente.

1 Si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ entonces se tiene que:
AD : AB = AE : AC = DE : BC
También AD : DB = AE : EC



2 Si AD : AB = AE : AC entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$
Si AD : DB = AE : EC entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$



De la conclusión anterior se probará el primer resultado del numeral **2**, y el segundo queda fuera del propósito de este libro, posiblemente será abordado en niveles superiores.

Indicador de logro

Desarrollar **Ejemplo 1.13**

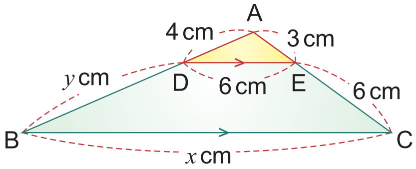
¿Qué se necesita para calcular AD : DB?, ¿cómo se encuentra la longitud del $\overline{DB}$?, ¿qué se necesita para calcular AE : EC?, ¿cómo se encuentra la longitud del $\overline{EC}$?, ¿cómo son las razones que se acaban de encontrar?

* Observar incisos b) y c), ¿qué se puede concluir?
* Reforzar las propiedades que se dan en la relación triángulo y proporción con las figuras que están en el resumen.
* Hacer la introducción del **Ejemplo 1.13**, que será la demostración del primer resultado del numeral 2 del resumen.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

En la figura dada, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, encuentre la razón de semejanza entre los triángulos ADE y ABC y las longitudes x y y.



2. Demostrar el primer resultado del numeral 2 del resumen de la pág. 87 del LE.

Ejemplo **1.13**

(25 min)

* Recordando lo visto en 8vo grado, ¿qué condiciones deben darse para demostrar el paralelismo?, ¿cuál es el plan de desarrollo de la demostración?, ¿qué indica la hipótesis?, ¿qué dato hace falta para emplear algún criterio de semejanza?

[Hasta aquí Clase 10]

[Desde aquí Clase 11]

1. Encontrar la razón de semejanza y longitudes de dos lados faltantes de triángulos en posición de Thales.

Ejemplo **1.14**

(15 min)

¿Qué implica que el $\overline{DE}$ sea paralelo al $\overline{BC}$?, si los triángulos ADE y ABC son semejantes, ¿cómo se puede calcular la razón de semejanza entre ellos?, ¿de qué lados en el ΔADE se conoce la medida del lado correspondiente en el ΔABC?, ¿se puede conocer la medida del lado AB?

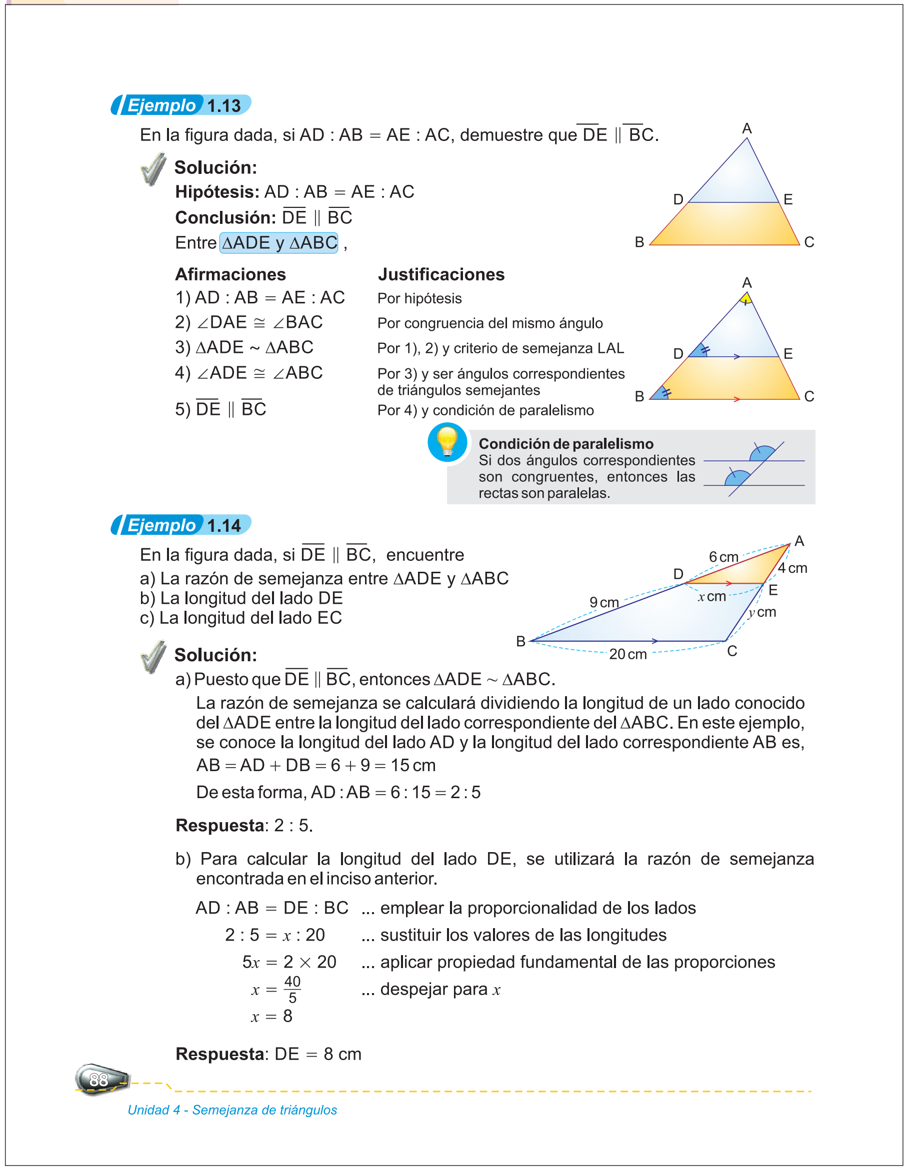
¿Qué utilidad tiene la razón de semejanza encontrada?, ¿cuál debe ser la medida del lado DE si se quiere que la razón DE : BC sea igual a 2 : 5?

Unidad 4: Semejanza de triángulos

Lección 1: (11/16) Semejanza de triángulos

Sección 6: Relación entre triángulos y proporción

Objetivo: Establecer la relación entre el triángulo y las proporciones.



Ejemplo **1.13**

En la figura dada, si AD : AB = AE : AC, demuestre que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

Solución:

Hipótesis: AD : AB = AE : AC

Conclusión: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

Entre ΔADE y ΔABC ,

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) AD : AB = AE : AC	Por hipótesis
2) $\angle$DAE $\cong$ $\angle$BAC	Por congruencia del mismo ángulo
3) ΔADE ~ ΔABC	Por 1), 2) y criterio de semejanza LAL
4) $\angle$ADE $\cong$ $\angle$ABC	Por 3) y ser ángulos correspondientes de triángulos semejantes
5) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$	Por 4) y condición de paralelismo

Condición de paralelismo
Si dos ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

Ejemplo **1.14**

En la figura dada, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, encuentre
a) La razón de semejanza entre ΔADE y ΔABC
b) La longitud del lado DE
c) La longitud del lado EC

Solución:

a) Puesto que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, entonces ΔADE ~ ΔABC.
La razón de semejanza se calculará dividiendo la longitud de un lado conocido del ΔADE entre la longitud del lado correspondiente del ΔABC. En este ejemplo, se conoce la longitud del lado AD y la longitud del lado correspondiente AB es,
AB = AD + DB = 6 + 9 = 15 cm
De esta forma, AD : AB = 6 : 15 = 2 : 5

Respuesta: 2 : 5.

b) Para calcular la longitud del lado DE, se utilizará la razón de semejanza encontrada en el inciso anterior.

AD : AB = DE : BC ... emplear la proporcionalidad de los lados
2 : 5 = x : 20 ... sustituir los valores de las longitudes
$5x = 2 \times 20$ ... aplicar propiedad fundamental de las proporciones
$x = \frac{40}{5}$ ... despejar para x
$x = 8$

Respuesta: DE = 8 cm

88

Unidad 4 - Semejanza de triángulos

continúa en la siguiente página...

Unidad 4: **Semejanza de triángulos**

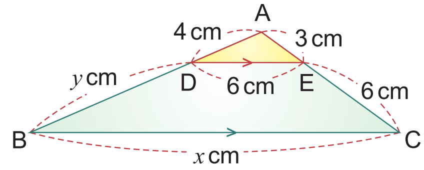
Lección 1: (11/16) Semejanza de triángulos

Sección 6: Relación entre triángulos y proporción

Objetivo:
- Establecer la relación entre el triángulo y las proporciones.
- Definir segmento medio de un triángulo.

Indicador de logro

En la figura dada, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, encuentre la razón de semejanza entre los triángulos ADE y ABC y las longitudes x y y.



c) Para calcular la longitud del lado EC, se utilizará la razón entre los lados AD y DB.

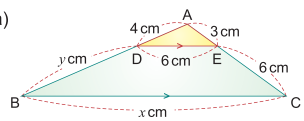
AD : DB = AE : EC	... emplear la proporcionalidad de los lados
$6 : 9 = 4 : y$	... sustituir los valores de las longitudes
$6y = 9 \times 4$	... aplicar propiedad fundamental de las proporciones
$y = \frac{36}{6}$	... despejar para x
$y = 6$	

También se puede usar la razón de semejanza entre △ADE y △ABC.

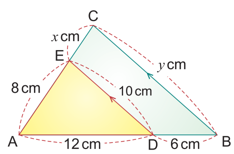
Respuesta: EC = 6 cm

Ejercicio **1.11** En las figuras dadas, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, encuentre la razón de semejanza entre los triángulos ADE y ABC y las longitudes x y y.

a)



b)



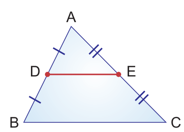
Sobre los triángulos se conocen numerosos teoremas, algunos acerca de sus lados, otros sobre sus ángulos y también aquellos que relacionan lados y ángulos. Algunos ejemplos son:

- La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180º
- La suma de las medidas de los ángulos externos de un triángulo es 360º

A continuación se estudiarán dos teoremas que permiten resolver con mayor facilidad los problemas relacionados con esta figura geométrica: Teorema del Segmento Medio y Teorema General de Thales.

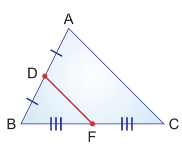
En la figura, D es el punto medio del $\overline{AB}$ y E es el punto medio del $\overline{AC}$.

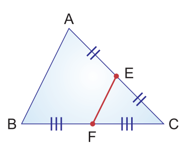
Así, el $\overline{DE}$ es un segmento medio del triángulo ABC.



Un **segmento medio** de un triángulo es un segmento que conecta los puntos medios de dos lados de un triángulo.

En las figuras, sea F el punto medio del $\overline{BC}$.





Al segmento medio de un triángulo, también se le llama conector de puntos medios.

$\overline{DF}$ y $\overline{EF}$ también son segmentos medios del triángulo ABC.

*

¿Cuál es la razón entre los lados AD y DB?, ¿cuál es la razón simplificada de 6 : 9?, ¿cuál debe ser la medida del lado EC si se quiere que la razón AE : EC sea igual a 2 : 3?

2. Resolver *Ejercicio* **1.11**

(20 min)

Solución

a)

AE : AC = DE : BC	AE : EC = AD : DB
$3 : 9 = 6 : x$	$3 : 6 = 4 : y$
$3x = 9 \times 6$	$3y = 6 \times 4$
$x = \frac{54}{3}$	$y = \frac{24}{3}$
$x = 18$	$y = 8$

b)

AD : DB = AE : EC	AD : AB = DE : BC
$12 : 6 = 8 : x$	$12 : 18 = 10 : y$
$12x = 6 \times 8$	$12y = 18 \times 10$
$x = \frac{48}{12}$	$y = \frac{180}{12}$
$x = 4$	$y = 15$

3. Introducir definición de segmento medio.

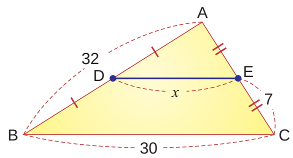
(10 min)

* Definir qué es un segmento medio.

* Mostrar las láminas o dibujar los triángulos que señalen los 3 segmentos medios que pueden encontrarse en un triángulo.

Indicador de logro

En las figuras, D es el punto medio del $\overline{AB}$ y E es el punto medio del $\overline{AC}$, encuentre el valor de x.



Unidad 4: **Semejanza de triángulos**

Lección 1: (12/16) Semejanza de triángulos

Sección 6: Relación entre triángulos y proporción

Objetivo: Aplicar el teorema del segmento medio para triángulos.

1. **Demostrar el teorema del segmento medio.**

   Ejemplo 1.15

   (20 min)

   ¿Qué significa que D sea el punto medio del $\overline{AB}$?, ¿cómo se puede escribir esa condición para que forme parte de la hipótesis?, ¿qué significa que E sea el punto medio del $\overline{AC}$?, ¿y escrito como hipótesis?, ¿a cuántas conclusiones debemos llegar?, ¿cuáles son?

   ¿Cuál es la razón entre AD y AB?, ¿por qué?, ¿cuál es la razón entre AE y AC?, ¿cuál sería la afirmación número 3?

* Regresar al **Ejemplo 1.13** y recalcar cuál fue la hipótesis y a qué conclusión se llegó.

* Escribir y justificar la afirmación número 4.

* Utilizar la conclusión vista sobre la relación entre triángulo y proporción para justificar la afirmación número 5.

* Escribir la conclusión que está en el recuadro.

* Enfatizar en la información que los símbolos de la figura muestran.

2. **Aplicar el teorema del segmento medio de un triángulo.**

   Ejemplo 1.16

   (10 min)

   ¿Cómo se denotan los segmentos congruentes en las figuras?

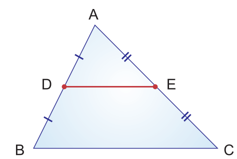
Ejemplo 1.15

Demuestre que si D es el punto medio del $\overline{AB}$ y E es el punto medio del $\overline{AC}$, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ y $DE = \frac{1}{2}$ BC.

Solución:

Hipótesis: AD = DB
AE = EC

Conclusión: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$
$DE = \frac{1}{2} BC$



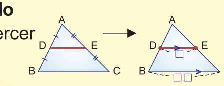
Entre $\triangle ADE$ y $\triangle ABC$,

Afirmaciones	Justificaciones
1) AD : AB = 1 : 2	Por hipótesis y definición de punto medio
2) AE : AC = 1 : 2	Por hipótesis y definición de punto medio
3) AD : AB = AE : AC	Por 1) y 2)
4) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$	Por 3) y relación entre triángulo y proporción (Ver **Ejemplo 1.13**)
5) DE : BC = AD : AB	Por 4) y relación entre triángulo y proporción
6) DE : BC = 1 : 2	Por 1) y 5)
7) $DE = \frac{1}{2}$ BC	Por 6) y propiedad fundamental de las proporciones

Teorema del segmento medio de un triángulo

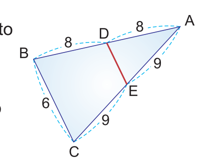
El segmento medio de un triángulo es paralelo al tercer lado del triángulo y tiene la mitad de su longitud.

$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ y $DE = \frac{1}{2}$ BC



Ejemplo 1.16

En la figura dada, D es el punto medio del $\overline{AB}$ y E es el punto medio del $\overline{AC}$, encuentre la longitud del lado DE.



Solución:

Aquí D es el punto medio del $\overline{AB}$, y E es el punto medio del $\overline{AC}$. Así, $\overline{DE}$ es un segmento medio.

Por lo tanto, por el teorema del segmento medio de un triángulo,

$DE = \frac{1}{2}$ BC

$DE = \frac{1}{2}$ (6)

DE = 3

Respuesta: DE = 3

90

Unidad 4 - Semejanza de triángulos

continúa en la siguiente página...

Unidad 4: Semejanza de triángulos

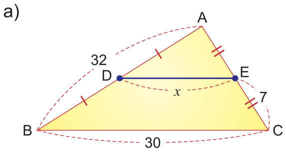
Lección 1: (13/16) Semejanza de triángulos

Sección 7: Relación entre paralelas y proporción

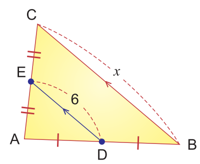
Objetivo: Establecer la relación entre paralelas y proporción.

Ejercicio 1.12 En las figuras, D es el punto medio del $\overline{AB}$ y E es el punto medio del $\overline{AC}$, encuentre el valor de x.

a)



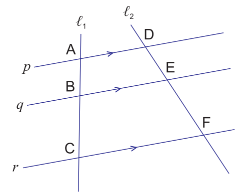
b)



Sección 7: ***Relación entre paralelas y proporción***

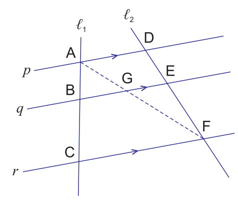
Ejemplo 1.17

En la figura dada, las rectas p, q y r son paralelas. Demuestre que AB : BC = DE : EF.



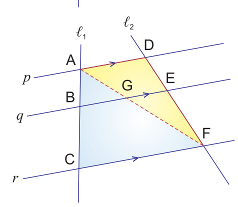
Solución:
Se hará uso del segmento auxiliar AF que interseca a la recta q en el punto G. Luego, en los triángulos ACF y ADF se utilizarán las relaciones vistas entre triángulos y proporciones. (Ver **Ejemplo 1.12**)

Hipótesis: Rectas p, q y r son paralelas.
Conclusión: AB : BC = DE : EF
En ΔACF ,



Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $\overline{BG} \parallel \overline{CF}$	Por hipótesis
2) AB : BC = AG : GF	Por 1) y relación entre triángulo y proporción

En ΔADF ,



3) $\overline{AD} \parallel \overline{GE}$	Por hipótesis
4) AG : GF = DE : EF	Por 3) y relación entre triángulo y proporción
5) AB : BC = DE : EF	Por 2) y 4)

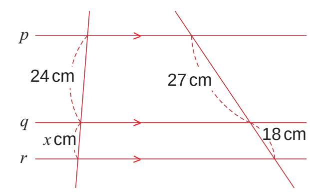
Lo anterior demuestra el teorema de Thales, que en aplicaciones permite encontrar la longitud de un segmento si conocemos su correspondiente en la otra recta y la razón entre ambos.

91

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

Indicador de logro

En la figura dada, las rectas p, q y r son paralelas. Encuentre el valor de x.



5. Resolver Ejercicio 1.12
(15 min)
Soluciones
a) x = 15
b) x = 12

[Hasta aquí Clase 12]
[Desde aquí Clase 13]

1. Demostrar el teorema de Thales. Ejemplo 1.17
(20 min)

* Recordar rápidamente el **Ejemplo 1.12** y las conclusiones que se obtuvieron.

¿Qué elementos muestra la figura que ilustra la hipótesis de este ejemplo?

¿Cuál es la condición esencial para aplicar el teorema de Thales?

* Luego de trazar el segmento auxiliar AF, ¿qué plan de desarrollo podría utilizarse en esta demostración?

¿Cuál era una de las aplicaciones de las conclusiones del **Ejemplo 1.12**?, ¿qué utilidad inmediata se le pueda dar al teorema de Thales?

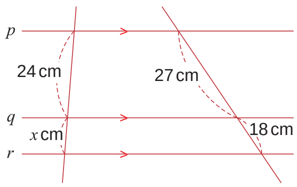
¿Se podrá aplicar el teorema de Thales cuando se tienen únicamente 3 rectas paralelas?

* Concluir con el resumen de la pág. 92 del LE.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

En la figura dada, las rectas p, q y r son paralelas. Encuentre el valor de x.



2. Encontrar la longitud de un segmento aplicando el teorema de Thales *Ejemplo* **1.18**

(10 min)

¿La longitud que se busca es correspondiente a qué valor?, ¿cuál es la razón entre 3 y 6?, ¿cuál debería ser el valor de x, para qué la razón entre ese valor y 8 sea igual a 1 : 2? En el inciso b), ¿el valor de x corresponde a cuántos centímetros?

* Aplicar el teorema de Thales y la propiedad fundamental de las proporciones para encontrar el valor de x.

3. Resolver *Ejercicio* **1.13**

(15 min)

Solución

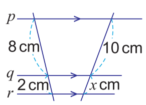
a) $24 : x = 27 : 18$
$27x = 24 \times 18$
$x = 16$

b) $10 : x = 15 : 3$
$15x = 10 \times 3$
$x = 2$

Ejercicios adicionales

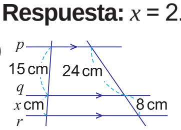
En cada una de las figuras de abajo, las rectas p, q y r son paralelas. Encuentre el valor de x.

a)



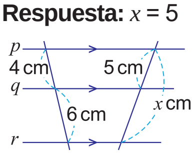
Respuesta: $x = 2.5$

b)



Respuesta: $x = 5$

c)



Respuesta: $x = 12.5$

Unidad 4: Semejanza de triángulos

Lección 1: (13/16) Semejanza de triángulos

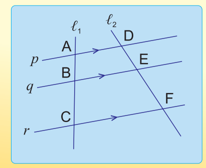
Sección 7: Relación entre paralelas y proporción

Objetivo: Establecer la relación entre paralelas y proporción.

Relación entre rectas paralelas y proporción
Teorema de Thales

Tres o más rectas paralelas dividen proporcionalmente dos transversales cualesquiera.

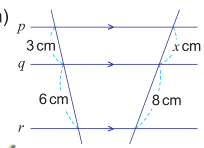
Si las rectas p, q y r son paralelas, entonces
$AB : BC = DE : EF$



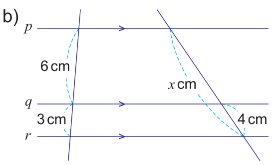
Ejemplo **1.18**

En cada una de las figuras de abajo, las rectas p, q y r son paralelas. Encuentre el valor de x.

a)



b)



Solución:

a) $3 : 6 = x : 8$ ... aplicar el teorema de Thales
$6x = 3 \times 8$ ... aplicar propiedad fundamental de las proporciones
$x = \frac{24}{6}$ ... despejar para x
$x = 4$

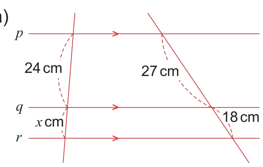
Respuesta: $x = 4$

b) $x : 4 = (6 + 3) : 3$ ... aplicar el teorema de Thales
$x : 4 = 9 : 3$ ... resolver operación entre paréntesis
$3x = 4 \times 9$ ... aplicar propiedad de las proporciones
$x = \frac{36}{3}$ ... despejar para x
$x = 12$

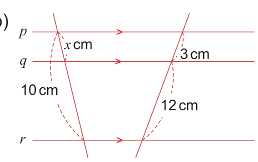
Respuesta: $x = 12$

Ejercicio **1.13** En cada una de las figuras de abajo, las rectas p, q y r son paralelas. Encuentre el valor de x.

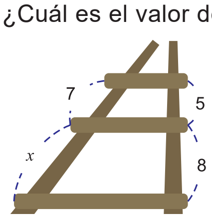
a)



b)



d) Los peldaños de la escalera representada en la figura son paralelos. ¿Cuál es el valor de x?



$7 : x = 5 : 8$
$5x = 7 \times 8$
$x = \frac{56}{5}$
$x = 11.2$

Respuesta: $x = 11.2$

Unidad 4: Semejanza de triángulos

Lección 1: (14/16) Semejanza de triángulos

Sección 7: Relación entre paralelas y proporción

Objetivo: Dividir un segmento en partes iguales aplicando teorema de Thales.

Aplicando el teorema de Thales sobre segmentos, se puede dividir un segmento en cualquier cantidad de partes iguales.

Ejemplo 1.19

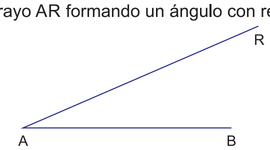
Divida el segmento AB en tres partes iguales usando compás, regla y escuadras.

A B

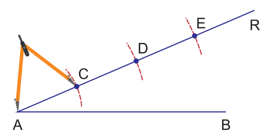
Solución:

El procedimiento en general, es encontrar segmentos proporcionales obtenidos mediante paralelas que cortan al segmento dado y a otra transversal que se construirá en cada caso.

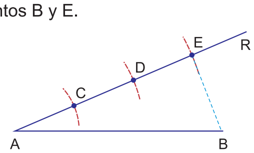
Paso 1: Trazar un rayo AR formando un ángulo con respecto al segmento AB.



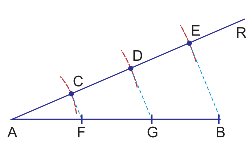
Paso 2: Sobre el rayo AR, con el compás marque las 3 partes iguales con un radio cualquiera, los puntos de corte se nombrarán C, D y E.

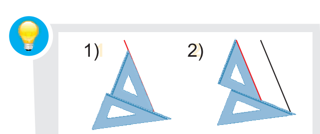


Paso 3: Una los puntos B y E.



Paso 4: Trace en cada punto marcado en el rayo AR una paralela al segmento BE hasta cortar al segmento AB en los puntos F y G.





93

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

Indicador de logro

Divida el segmento AB en cuatro partes iguales usando compás, regla y escuadras.

A B

1. Trisecar un segmento

Ejemplo 1.19

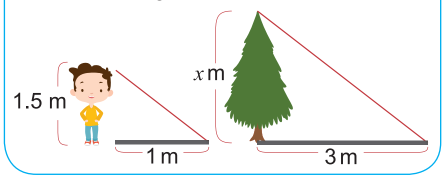
(30 min)

- * Desarrollar paso a paso la solución que se plantea. En el paso 1, cuidar que la longitud del rayo AR sea mayor al segmento AB. Para el trazo de rectas paralelas, recordar el procedimiento visto en la unidad 3: Paralelismo de 8vo grado.
- * La figura del paso 4 representa 3 rectas paralelas (CF, DG y EB) cortando a dos transversales que convergen (AB y AR), por lo que, la conclusión de la Sección 7: Relación entre paralelas y proporción verifica que los segmentos AF, FG y GB son proporcionales a los segmentos AC, CD y DE respectivamente. Estos últimos fueron trazados con un mismo radio, por lo que, los segmentos AF, FG y GB tienen la misma medida y trisecan al segmento AB. Lo anterior se ampliará con la demostración planteada en la página 94 del LE.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Un joven de 1.5 m de altura, proyecta una sombra de 1 m, ¿cuál es la altura del árbol que proyecta una sombra de 3 m a la misma hora?



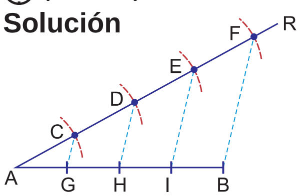
* La justificación de cada paso de la demostración que plantea el LE debería ser expresada y comentada por los estudiantes.

* Para esta demostración no se planteó un ejercicio, pues su propósito es sustentar el ejemplo.

2. Resolver *Ejercicio* **1.14**

(15 min)

Solución



[Hasta aquí Clase 14]

[Desde aquí Clase 15]

1. Explicar sobre el origen del teorema de Thales.

(10 min)

¿Cuál es el origen del teorema de Thales?, en general, ¿cuál es la aplicación del teorema de Thales en la vida cotidiana?, ¿cuál es la importancia de suponer que los rayos del sol incidían paralelamente?, ¿qué criterio hace posible que el triángulo formado por la sombra que generaba la pirámide y su altura, y la sombra del bastón de Thales con su correspondiente altura fuesen semejantes?, ¿qué relación existía entre la altura de la pirámide y la del bastón de Thales?

Unidad 4: Semejanza de triángulos

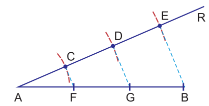
Lección 1: (15/16) Semejanza de triángulos

Sección 8: Aplicación de la semejanza de triángulos

Objetivo: Resolver problemas aplicando la semejanza de triángulos.

Aplicando la relación entre triángulo y proporción y el teorema de Thales, se puede comprobar que las divisiones encontradas en el segmento AB tienen la misma medida, y se corresponden con las tres partes iguales trazadas sobre el rayo AR.

Demostración



Afirmaciones	**Justificaciones**
1) Los segmentos CF, DG y EB son paralelos	Por construcción
2) AC : CD = 1 : 1	Por construcción
3) AC : CD = AF : FG	Por 1) y relación entre triángulo y proporción
4) AF : FG = 1:1	Por 2) y 3)
5) AF = FG	Por 4)
6) CD : DE = 1 : 1	Por construcción
7) CD : DE = FG : GB	Por 6) y aplicación del teorema de Thales
8) FG : GB = 1 : 1	Por 6) y 7)
9) FG = GB	Por 8)
10) AF = FG = GB	Por 5) y 9)

Ejercicio **1.14** Divida el segmento AB en cuatro partes iguales usando compás, regla y escuadras, tal como se hizo es el *Ejemplo* **1.19** .

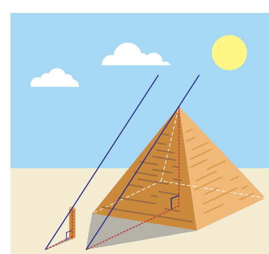
A B

Sección 8: ***Aplicación de la semejanza de triángulos***

Origen del teorema de Thales

Thales (o Tales) nació hacia el 625 a. C. en Mileto, una de las primeras ciudades fundadas por los griegos a orillas del mar Egeo, la cual en esa época era una de las más ricas y evolucionadas de la zona. Thales era considerado como uno de los siete sabios de Grecia.

Hay muchas versiones de cómo sucedió la historia, aquí se contará una de ellas. Lo que hoy se conoce como el teorema de Thales, se origina cuando Thales viajó a Egipto para aprender matemáticas, hacia el año 600 a. C., se dice que estando allí, inventó un procedimiento para calcular la altura de la pirámide Keops por semejanza, esto lo pudo hacer midiendo la sombra de ésta y la de su bastón.



La proporcionalidad entre la altura de la pirámide y la del bastón, hacían posible calcular la altura deseada.

continúa en la siguiente página...

Unidad 4: **Semejanza de triángulos**

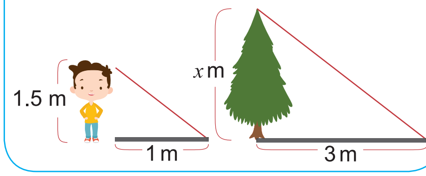
Lección 1: (15/16) Semejanza de triángulos

Sección 8: Aplicación de la semejanza de triángulos

Objetivo: Resolver problemas aplicando la semejanza de triángulos.

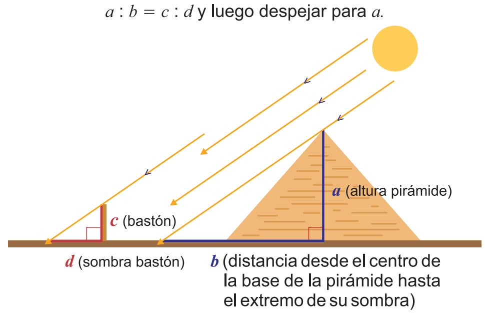
Indicador de logro

Un joven de 1.5 m de altura, proyecta una sombra de 1 m, ¿cuál es la altura del árbol que proyecta una sombra de 3 m a la misma hora?



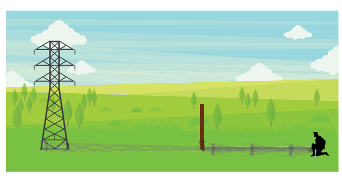
Para hacer este cálculo, supuso que los rayos del sol incidían paralelamente en la tierra, entonces la sombra que generaba la pirámide y su altura forman un triángulo rectángulo, y la sombra del bastón con su altura otro. Estos dos triángulos rectángulos son semejantes, por lo tanto, pudo establecer la siguiente proporción para obtener la altura:

$a : b = c : d$ y luego despejar para a.



Ejemplo 1.20

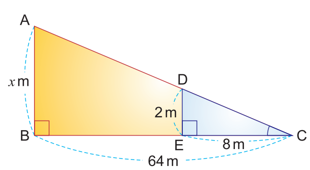
Se quiere medir la altura de una torre, pero no es posible hacerlo directamente. Para ello, a la misma hora se midió la sombra que proyecta sobre el suelo un poste de 2 m de altura y la sombra que proyecta la torre. La sombra del poste mide 8 m y la de la torre mide 64 m. Encuentre la altura de la torre, si el poste y la torre forman un ángulo recto con el suelo.



Solución:

La siguiente figura, ilustra la situación planteada.

Por el criterio de semejanza AA, los triángulos ABC y DEC que se forman son semejantes y por lo tanto, se puede establecer una proporcionalidad entre las longitudes de sus lados correspondientes.



$x : 2 = 64 : 8$

$8x = 2 \times 64$ ... aplicar propiedad fundamental de las proporciones

$x = \frac{128}{8}$ ... despejar para x

$x = 16$

Respuesta: 16 m

95

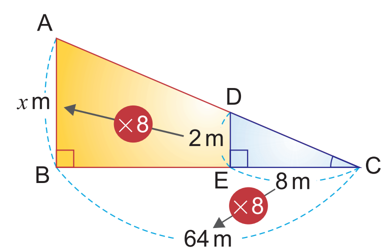
Libro del Estudiante - Matemáticas 9° grado

2. Aplicar la semejanza de triángulos para resolver situaciones donde es necesario encontrar determinadas alturas. *Ejemplo* **1.20**

(10 min)

¿Es fácil medir la altura de una torre?, ¿qué tipo de ángulo forman la torre y el poste con el suelo?, ¿cómo son los segmentos AB y DE?, ¿paralelos?, ¿proporcionales?, ¿por qué?, ¿se puede aplicar la semejanza de triángulos?, ¿por qué?, ¿qué relación guardan la sombra de la torre y la del poste?

* En este ejemplo también se puede aplicar la razón de semejanza, tal como se muestra en la siguiente figura:



De esta forma, $x = 8 \times 2$

$x = 16$

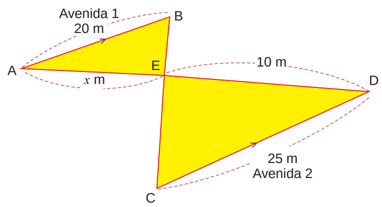
Respuesta: 16 m

* No olvidar que la respuesta se compone del valor de x más la unidad de medida.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Sobre dos avenidas paralelas se han construido dos puentes peatonales que se cortan en el punto E. Teniendo en cuenta las medidas de la figura, encuentre la longitud del $\overline{AE}$.



3. Resolver *Ejercicio* **1.15**

(25 min)

Solución

a) 40 m

b) 4.5 m

c) 1.75 m

[Hasta aquí Clase 15]

[Desde aquí Clase 16]

1. Aplicar la semejanza de triángulos para resolver situaciones donde es necesario encontrar distancias inaccesibles. *Ejemplo* **1.21**

(20 min)

¿Es accesible medir la parte más larga de un lago?, ¿cómo podría medirse?, ¿se puede aplicar la semejanza de triángulos?, ¿por qué?, ¿qué criterio de semejanza se puede emplear?, ¿cómo deberían ser las longitudes de los lados AB y DC?, ¿qué significa que deban ser proporcionales?

* Recuerde que también se puede aplicar la razón de semejanza entre los triángulos DCE y ABE, que es 1 : 2500.

Unidad 4: **Semejanza de triángulos**

Lección 1: (16/16) Semejanza de triángulos

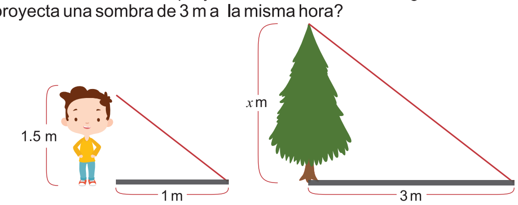
Sección 8: Aplicación de la semejanza de triángulos

Objetivo: Resolver problemas aplicando la semejanza de triángulos.

Ejercicio **1.15** Aplicando la semejanza de triángulos, resuelva los siguientes problemas:

a) Si la torre del *Ejemplo* **1.20** tuviese una altura de 10 m, ¿cuánto mediría la sombra proyectada?

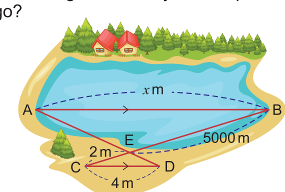
b) Un joven de 1.5 m de altura proyecta una sombra de 1 m, ¿cuál es la altura del árbol que proyecta una sombra de 3 m a la misma hora?



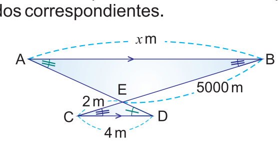
c) La sombra de un adulto mide 1.4 m y en el mismo instante la sombra de un edificio de 10 m que se encuentra cerca mide 8 m. Encuentre la altura del adulto, si el edificio y el adulto forman un ángulo recto con la tierra.

Ejemplo **1.21**

Para medir la parte más larga de un lago, un ingeniero marcó los puntos A, B, C, D y E como lo muestra el dibujo. Los segmentos AB y CD son paralelos. ¿Cuántos metros mide la parte más larga del lago?



Solución:
Por el criterio de semejanza AA, los triángulos ABE y DCE que se forman son semejantes y por lo tanto, se puede establecer una proporcionalidad entre las longitudes de sus lados correspondientes.



$2 : 5000 = 4 : x$

$2x = 5000 \times 4$ ... aplicar propiedad fundamental de las proporciones

$x = \frac{20000}{2}$ ... despejar para x

$x = 10000$

Respuesta: 10000 m

continúa en la siguiente página...

Unidad 4: **Semejanza de triángulos**

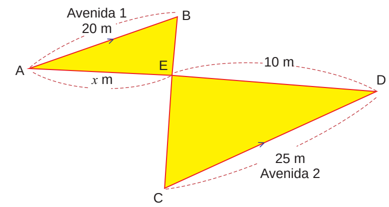
Lección 1: (16/16) Semejanza de triángulos

Sección 8: Aplicación de la semejanza de triángulos

Objetivo: Resolver problemas aplicando la semejanza de triángulos.

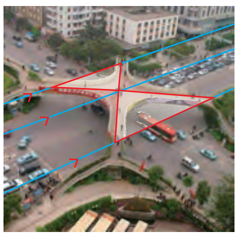
Indicador de logro

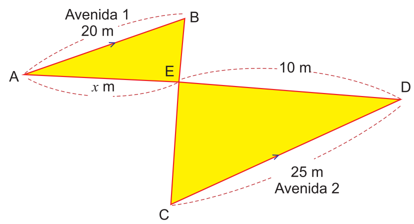
Sobre dos avenidas paralelas se han construido dos puentes peatonales que se cortan en el punto E. Teniendo en cuenta las medidas de la figura, encuentre la longitud del $\overline{AE}$.



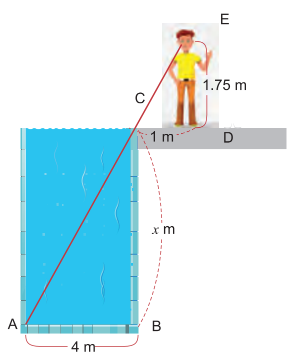
Ejercicio 1.16 Aplicando la semejanza de triángulos, resuelva los siguientes problemas:

a) Sobre dos avenidas paralelas se han construido dos puentes peatonales que se cortan en el punto E. Teniendo en cuenta las medidas de la figura, encuentre la longitud del $\overline{AE}$.





b) Un pozo tiene 4 m de ancho. Un hombre que tiene 1.75 m hasta la altura de sus ojos se sitúa a 1 m del borde y observa que la línea visual une el borde del pozo con la línea de fondo. ¿Qué profundidad tiene el pozo?



97

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

2. Resolver **Ejercicio 1.16**

(25 min)

Solución

a) $x : 10 = 20 : 25$

$25x = 10 \times 20$

$x = \frac{200}{25}$

$x = 8$

Respuesta: 8 m

b) $1 : 4 = 1.75 : x$

$x = 4 \times 1.75$

$x = 7$

Respuesta: 7 m

1 **Encontrar la longitud de un lado de un triángulo semejante otro.**

Solución

AB = 9 cm

2 **Identificar el criterio de semejanza utilizado**

Solución

a) LLL

b) AA

c) LAL

3 **Completar demostración aplicando criterio de semejanza de triángulos LAL.**

Solución

Hipótesis: AB = 9 y DB = 3
BC = 15 y BE = 5

Conclusión: ΔABC ~ ΔDBE

Entre ΔABC y ΔDBE,

Afirmaciones

1) AB : DB = 9 : 3 = 3 : 1

2) BC : BE = 15 : 5 = 3 : 1

3) AB : DB = BC : BE

4) ∠ABC ≅ ∠DBE

5) ΔABC ~ ΔDBE

Justificaciones

1) Por hipótesis y cálculo de razón simplificada

2) Por hipótesis y cálculo de razón simplificada

3) Por 1) y 2)

4) Por ser ángulos opuestos por el vértice

5) Por 3), 4) y criterio de semejanza LAL

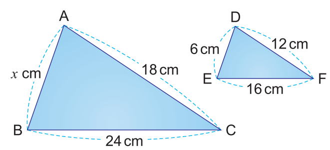
Unidad 4: Semejanza de triángulos

(1/2) Ejercicios de la unidad

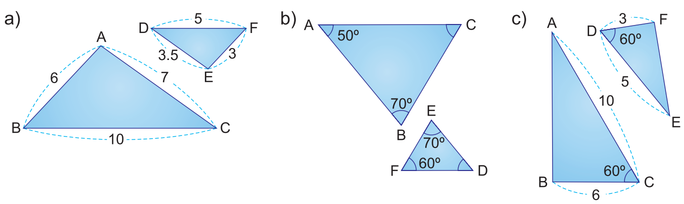
Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre semejanza de triángulos.

Ejercicios

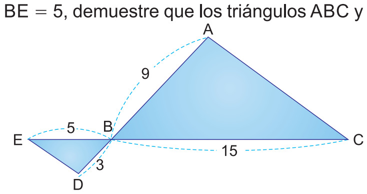
1 Dado que ΔABC y ΔDEF son semejantes, es decir, ΔABC ~ ΔDEF, encuentre la longitud del lado AB.



2 Identifique el criterio de semejanza de triángulos (LLL, LAL, AA) utilizado para indicar si los siguientes triángulos son semejantes. La decisión debe basarse en las medidas dadas y no en la forma de los triángulos.



3 Los segmentos AD y EC se cortan en el punto B como se muestra en la figura dada, si los lados correspondientes de los triángulos ABC y DBE tienen las siguientes medidas: AB = 9 y DB = 3, BC = 15 y BE = 5, demuestre que los triángulos ABC y DBE son semejantes.



Solución:

Hipótesis:

Conclusión: ΔABC ~ ΔDBE

Entre ΔABC y ,

Afirmaciones

1) AB : DB = 9 : 3 = :

2) BC : BE = : = 3 : 1

3) AB : DB = :

4) ≅ ∠DBE

5) ΔABC ~

Justificaciones

y cálculo de razón simplificada

Por y

Por ser ángulos

Por , y criterio de semejanza

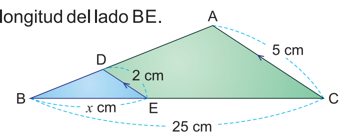
continúa en la siguiente página...

Unidad 4: Semejanza de triángulos

(2/2) Ejercicios de la unidad

Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre semejanza de triángulos.

4 En la figura dada, si $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$, encuentre la longitud del lado BE.

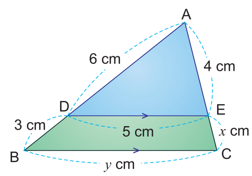


5 En la figura de la derecha, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, encuentre:

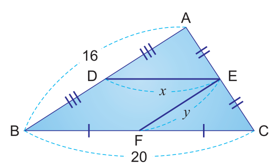
a) La razón de semejanza entre $\triangle ADE$ y $\triangle ABC$

b) La longitud del lado EC

c) La longitud del lado BC

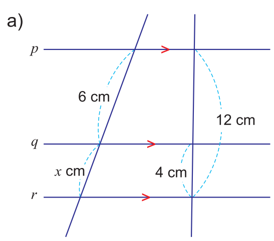


6 En la figura, D es el punto medio del $\overline{AB}$, F es el punto medio del $\overline{BC}$ y E es el punto medio del $\overline{AC}$. Encuentre el valor de x y y.

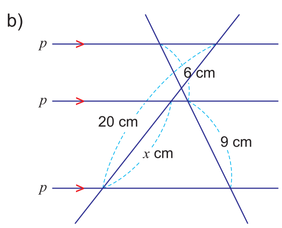


7 En cada una de las figuras de abajo, las rectas p, q y r son paralelas. Encuentre el valor de x.

a)



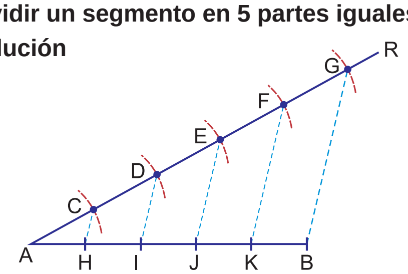
b)



8 Divida el segmento AB en cinco partes iguales usando compás, regla y escuadras.

8 **Dividir un segmento en 5 partes iguales aplicando el teorema de Thales.**

Solución



4 **Encontrar la medida de un lado aplicando semejanza de triángulos formados con rectas paralelas y proporciones.**

Solución

$x : 25 = 2 : 5$

$5x = 25 \times 2$

$x = \frac{50}{5}$

$x = 10$

Respuesta: BE = 10 cm

5 **Encontrar la razón de semejanza y la longitud de lados estableciendo la razón entre el triángulo y las proporciones.**

Solución

a) 2 : 3

b) EC = 2 cm

c) BC = 7.5 cm

6 **Aplicar el teorema del segmento medio para triángulos.**

Solución

$x = 10$

$y = 8$

[Hasta aquí Clase 1]

[Desde aquí Clase 2]

7 **Encontrar la longitud de un segmento aplicando el teorema de Thales.**

Solución

a) $6 : x = 8 : 4$

$8x = 6 \times 4$

$x = \frac{24}{8}$

$x = 3$

b) $x : 9 = 20 : 15$

$15x = 9 \times 20$

$x = \frac{180}{15}$

$x = 12$

continúa en la siguiente página...

9 **Aplicar la semejanza de triángulos para resolver situaciones donde es necesario encontrar determinadas alturas.**

Solución

$1.8 : 1 = x : 20$

$x = 1.8 \times 20$

$x = 36$

Respuesta: 36 m

10 **Aplicar la semejanza de triángulos para resolver situaciones donde es necesario encontrar distancias inaccesibles.**

Solución

$7 : 70 = 5 : x$

$7x = 70 \times 5$

$x = \frac{350}{7}$

$x = 50$

$50 + 5 = 55$ m

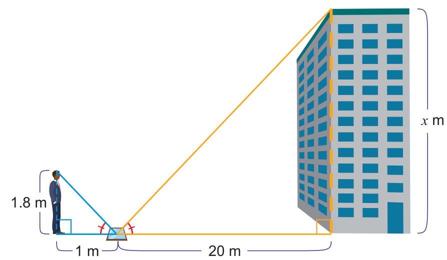
Respuesta: 55 m

Unidad 4: Semejanza de triángulos

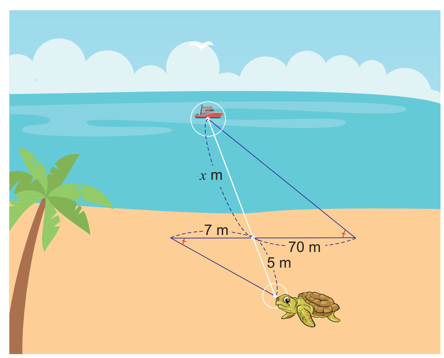
(2/2) Ejercicios de la unidad

Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre semejanza de triángulos.

9 Los ángulos que forma un rayo de luz al refractarse en un espejo plano son congruentes. Si un hombre de 1.8 m mira la parte más alta de un edificio en un espejo que está a 1 m de él y a 20 m de la base del edificio. Encuentre la altura del edificio.

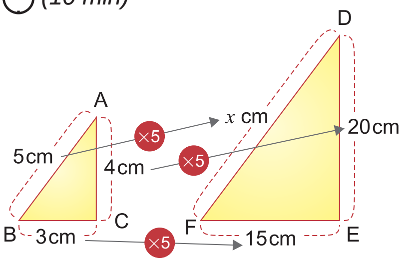


10 Para hallar la distancia desde una tortuga en la playa a un barco, se han tomado las medidas que se muestran en la figura.
Encuentre la distancia de la tortuga al barco.



Solución *Ejercicio* **1.4** (Página 101)

(10 min)



Solución

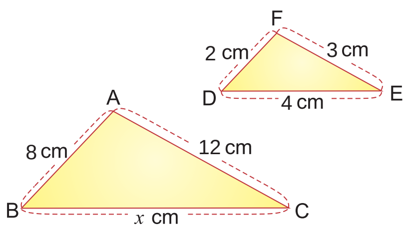
$x = 5 \times 5$

$x = 25$

Respuesta: DF = 25 cm

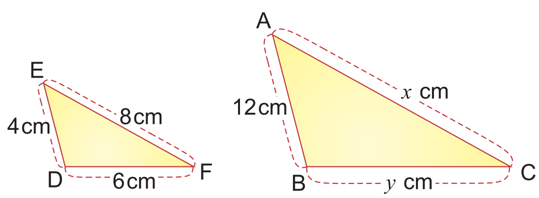
Ejercicios Adicionales (Página 101)

a) Encuentre la longitud del lado BC si las longitudes de los lados correspondientes de los triángulos semejantes ABC y FDE están a razón de 1 : 4



Respuesta: BC = 16 cm

b) Encuentre la longitud de los lados AC y BC si las longitudes de los lados correspondientes de los triángulos semejantes ABC y EDF están a razón de 3 : 1



Respuestas:

AC = 24 cm

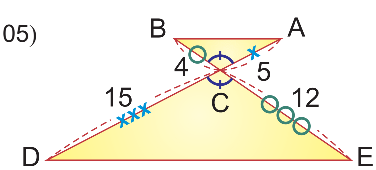
BC = 18 cm

Solución *Ejercicio* **1.8** (Página 105)

Hipótesis: AC = 5 y DC = 15

BC = 4 y EC = 12

Conclusión: ΔABC ~ ΔDEC



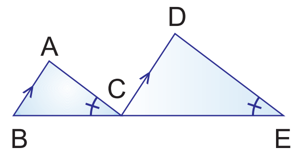
Entre ΔABC y ΔDEC,

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) AC : DC = 5 : 15 = 1 : 3	Por hipótesis y cálculo de razón simplificada
2) BC : EC = 4 : 12 = 1 : 3	Por hipótesis y cálculo de razón simplificada
3) AC : DC = BC : EC	Por 1) y 2)
4) ∠ACB ≅ ∠DCE	Por ser ángulos opuestos por el vértice
5) ΔABC ~ ΔDEC	Por 3), 4) y criterio de semejanza LAL

Ejercicios adicionales (Página 105)

a) Como se muestra en la siguiente figura, el $\overline{AB}$ es paralelo al $\overline{DC}$ y el $\angle ACB$ es congruente al $\angle DEC$. Demuestre que los triángulos ABC y DCE son semejantes.

Hipótesis: ______



Conclusión: $\Delta ABC \sim \Delta DCE$

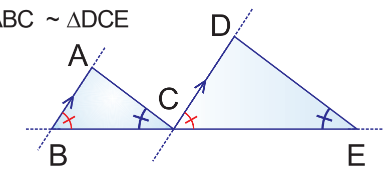
Entre ΔABC y ______

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) ______ $\cong \angle DEC$	Por hipótesis
2) $\angle ABC \cong$ ______	Por hipótesis y ______
3) $\Delta ABC \sim$ ______	Por 1), 2) y criterio de semejanza ______

Solución

Hipótesis: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\angle ACB \cong \angle DEC$

Conclusión: $\Delta ABC \sim \Delta DCE$

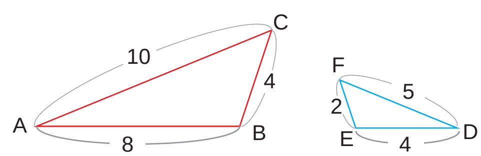


Entre ΔABC y ΔDCE

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $\angle ACB \cong \angle DEC$	Por hipótesis
2) $\angle ABC \cong \angle DCE$	Por hipótesis y congruencia de ángulos correspondientes
3) $\Delta ABC \sim \Delta DEC$	Por 1), 2) y criterio de semejanza AA

b) En la figura dada, si los lados correspondientes de los triángulos ABC y DEF tienen las siguientes medidas: AB = 8 y DE = 4, BC = 4 y EF = 2, AC = 10 y DF = 5, demuestre que los triángulos ABC y DEF son semejantes.

Hipótesis: ______



Conclusión: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Entre ______,

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) AB : DE = 8 : 4 = ___ : ___	Por ______ y cálculo de razón simplificada
2) BC : EF = ___ : ___ = 2 : 1	Por ______
3) AC : DF = ___ : ___ = ___ : ___	Por ______
4) AB : DE = ______ = AC : DF	Por ___, 2) y ___
5) ______ $\sim \Delta DEF$	Por ___ y criterio de semejanza ___

Solución

Hipótesis: AB = 8 y DE = 4, BC = 4 y EF = 2, AC = 10 y DF = 5

Conclusión: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Entre ΔABC y ΔDEF

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) AB : DE = 8 : 4 = 2 : 1	Por hipótesis y cálculo de razón simplificada
2) BC : EF = 4 : 2 = 2 : 1	Por hipótesis y cálculo de razón simplificada
3) AC : DF = 10 : 5 = 2 : 1	Por hipótesis y cálculo de razón simplificada
4) AB : DE = BC : EF = AC : DF	Por 1), 2) y 3)
5) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$	Por 4) y criterio de semejanza LLL

Unidad 5
Teorema de Pitágoras

Lección 1: Teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras

Unidad 5

(13 horas)

1 Expectativas de logro

- Usan las propiedades de triángulos y sus elementos para resolver problemas reales.
- Reconocen triángulos en situaciones reales.
- Construyen triángulos aplicando criterios o propiedades de congruencia o semejanza a otro dado.

2 Relación y desarrollo

Séptimo grado

Conjunto de puntos
- Puntos, rectas y planos
- Rayos y segmentos
- Longitud de un segmento
- Segmentos congruentes
- Distancia entre puntos
- Punto medio de un segmento
- Bisector de un segmento
- Puntos colineales

Ángulos
- Ángulo, medida y congruencia
- Clasificación de ángulos
- Construcción de la bisectriz
- Rectas perpendiculares y mediatriz de un segmento
- Construcción de la mediatriz
- Construcción de una perpendicular usando definición de mediatriz

Octavo grado

Paralelismo
- Rectas paralelas y transversales
- Ángulos formados por dos rectas paralelas y una transversal
- Congruencia de ángulos formados por dos rectas paralelas y una transversal
- Demostraciones sobre paralelismo
- Distancia entre rectas paralelas
- Construcción de rectas paralelas

Congruencia de triángulos
- Suma de las medidas de los ángulos de un triángulo
- Suma de las medidas de los ángulos de un polígono
- Congruencia de triángulos
- Triángulos isósceles y rectángulo

Cuadriláteros
- Elementos y clasificación de los cuadriláteros
- Paralelogramos
- Rectángulos, rombos y cuadrados
- Trapecios

Noveno grado

Semejanza de triángulos
- Figuras semejantes
- Triángulos semejantes
- Criterios de semejanza de triángulos
- Relación entre triángulos y proporción
- Relación entre paralelas y proporción
- Aplicación de la semejanza de triángulos

Teorema de Pitágoras
- Teorema de Pitágoras
- Recíproco del teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Polígonos regulares y el círculo
- Polígonos regulares
- Medida de los ángulos internos de un polígono regular
- Centro de un polígono regular
- Círculos
- Tangente a un círculo
- Área del círculo

Sólidos geométricos
- Áreas laterales de sólidos geométricos (cubos, prismas, pirámides, cilindros conos y esferas)
- Volumen de sólidos geométricos (pirámides, conos, cilindros y esferas)

3 Plan de estudio (13 horas)

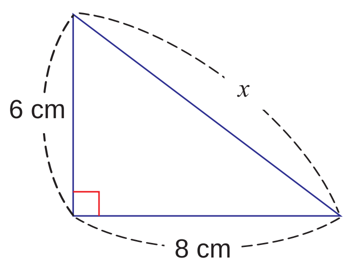
Lección	Distribución de horas	Contenidos
1. Teorema de Pitágoras (11 horas)	1~5/11	• Teorema de Pitágoras
	6~11/11	• Aplicación del teorema de Pitágoras
Ejercicios (2 horas)	1~2/2	

4 Puntos de lección

Análisis de las pruebas diagnósticas 2016 - 2017

Resolver ejercicios utilizando el teorema de Pitágoras es un cálculo mecánico, así que generalmente no es muy complicado. Vamos a ver los resultados.

[Pregunta] Aplique el teorema de Pitágoras para calcular la medida de la hipotenusa x del siguiente triángulo rectángulo.



Institutos: 0%   CEB: 0%   (2017)

Esta pregunta es una de las más sencillas entre las preguntas de teorema de Pitágoras, sin embargo los resultados son bajos.

Algunas de las razones son: 1) la mayoría de los centros educativos no enseñan esta unidad por factor tiempo, 2) es que hay deficiencia en los conocimientos de raíz cuadrada, 3) los estudiantes no pueden resolver una ecuación de segundo grado. En consecuencia, se obtienen estos resultados.

Los conocimientos de teorema de Pitágoras son importantes para aprender las matemáticas de la Educación Media (especialmente el tema de Trigonometría). Hay que llegar hasta esta unidad y enseñarla.

Lección 1: Teorema de Pitágoras

En esta lección se pretende que el estudiante pueda aprender el teorema de Pitágoras, cómo surge y cómo aplicarlo para resolver problemas aplicados a otras áreas del saber o a casos de la vida real. Se parte con un actividad donde se usa el concepto de áreas de cuadrados y triángulos para que se pueda establecer una relación entre estas figuras y que los estudiantes puedan comprender de donde surge la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$ donde a, b, c, son los lados de un triángulo rectángulo y a la vez los lados de los cuadrados que se dibujan sobre los lados del triángulo (ver Ejemplo 1.1) para luego poder concluir que el teorema de Pitágoras consiste: "En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de la longitud de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa"

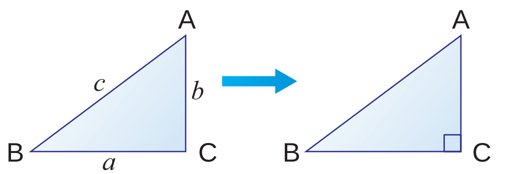
Existen muchas formas de demostrar el teorema de Pitágoras ya que es muy famoso y utilizado en diferentes campos, en este grado se aprenderá una forma, mediante un cuadrado compuesto por cuatro triángulos rectángulos congruentes y un cuadrado de tal manera que al encontrar el área del cuadrado grande se concluya en la fórmula. (ver Ejemplo 1.2)

El recíproco del teorema de Pitágoras también es importante estudiarlo por lo que los estudiantes podrán comprobar cuando un triángulo es rectángulo si este cumple la relación $a^2 + b^2 = c^2$.

A continuación se presenta la demostración del recíproco del teorema de Pitágoras.

Recíproco del teorema de Pitágoras

Si en el ΔABC se da que BC = a, CA = b, AB = c y también $a^2 + b^2 = c^2$, entonces $m \angle$ C = 90°, es decir el ΔABC es rectángulo.



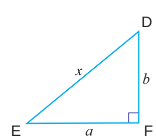
$a^2 + b^2 = c^2$ $\qquad$ $m\angle C = 90^0$

Demostración

En ΔABC se cumple $a^2 + b^2 = c^2$.

Entonces se desea saber si $m \angle$ C = 90°.

Se piensa en un triángulo rectángulo DEF donde: EF = a, DF = b, $m \angle$ F = 90°.



Sea DE = x, por el teorema de Pitágoras se tiene $a^2 + b^2 = x^2$.

En ΔABC, se cumple $a^2 + b^2 = c^2$.

Entonces

$x^2 = c^2$, como $x > 0$, $c > 0$

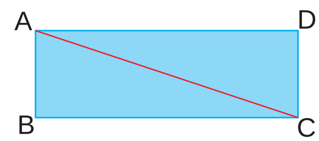
$x = c$.

Por criterio de congruencia de triángulo LLL ΔABC $\cong$ ΔDEF, se cumple $\angle$C $\cong$ $\angle$F. Por tanto $m \angle$ C = 90°. Entonces se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$. Se concluye que el ΔABC es un triángulo rectángulo.

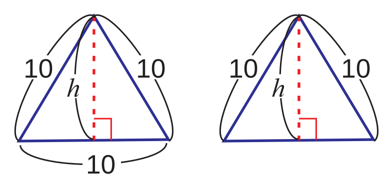
Esta demostración es un poco difícil de entender para los estudiantes por lo que se recomienda no estudiarla en clase, sin embargo es importante que los docentes analicen esta demostración y de manera intuitiva la expliquen a sus alumnos tal como lo indica el LE.

Este teorema tiene muchas aplicaciones, sin embargo en esta lección se estudiaran algunas como las siguientes:

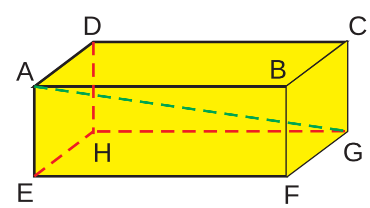
a) Encontrar la medida de la diagonal de un rectángulo y de un cuadrado.



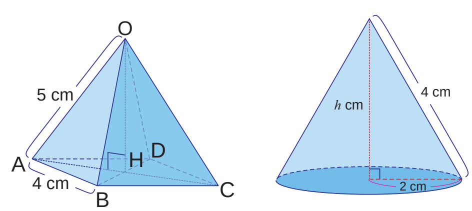
b) Encontrar la medida de la altura de un triángulo.



c) Encontrar la medida de la diagonal de un prisma rectangular



d) Encontrar la altura de una pirámide y un cono.

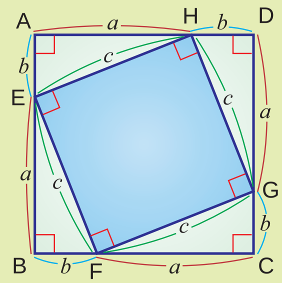


Tema: Teorema de Pitágoras 1

Ejemplo 1.2 2 Pág. 103 3

Demuestre que para todo triángulo rectángulo se cumple la ecuación establecida en el Ejemplo 1.1, es decir que $a^2 + b^2 = c^2$.

Solución 4



$$\left(\begin{array}{c}\text{Área del}\\ \text{cuadrado ABCD}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{Área del}\\ \text{cuadrado EFGH}\end{array}\right) + 4 \times \left(\begin{array}{c}\text{Área de triángulos}\\ \text{de medidas } a, b \text{ y } c\end{array}\right)$$

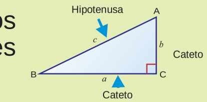
$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{1}{2}\, ab$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Respuesta: Para todo triángulo rectángulo se cumple que 4

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Teorema de Pitágoras:
En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa. 6

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Ejemplo 1.3 2 Pág. 103 3

Haciendo uso del teorema de Pitágoras, encuentre la medida desconocida del siguiente triángulo.

Solución 4

Del teorema de Pitágoras tenemos que:

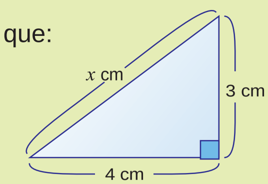
$4^2 + 3^2 = x^2$

$x^2 = 16 + 9$

$x^2 = 25$, como $x > 0$

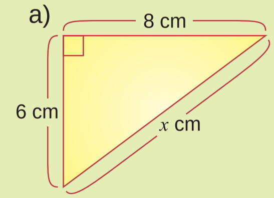
$x = \sqrt{25}$

$x = 5$



Ejercicio 1.2 2 **Pág.** 104 3

a)



Solución 4

$6^2 + 8^2 = x^2$

$x^2 = 36 + 64$

$x^2 = 100$, como $x > 0$

$x = \sqrt{100}$

$x = 10$

Respuesta: 10 cm 4 ✓

(Para seguir los incisos b) y c), se puede borrar la parte izquierda de la pizarra)

1 Al inicio de la clase escribir solo la palabra “**Tema**” y hasta el final de la clase (o en el desarrollo de la misma) escribir el contenido del tema.

2 Escribir el número del *Ejemplo* o *Ejercicio*.

3 Escribir el número de **Pág.** del LE para entender dónde se quedaron con respecto al tiempo.

4 Escribir la **Solución** y **Respuesta**.

5 En el problema planteado marcar los datos importantes para poder llegar a la respuesta.

6 Escribir la conclusión en un rectángulo de color rojo.

✓ Marcar en el *Ejercicio* cuando la solución o la respuesta sean correctas.

Nota: Los puntos aquí explicados no siempre aplican todos en un plan de pizarra.

Unidad 5: **Teorema de Pitágoras**

Lección 1: (1/11) Teorema de Pitágoras

Sección 1: Teorema de Pitágoras

Objetivo: Establecer la relación entre las áreas de los cuadrados contiguos a los catetos de un triángulo rectángulo y el cuadrado de la hipotenusa.

Indicador de logro

Con base en el Ejemplo 1.1, ¿cuál de las siguientes expresiones denota el significado de $a^2 + b^2 = c^2$?

a) En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las longitudes de los catetos elevada al cuadrado

b) En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos

1. Conocer un poco de historia sobre el teorema de Pitágoras

(20 min)

* Iniciar subrayando la importancia histórica que tuvo el teorema de Pitágoras en la civilización egipcia.

* Oriente en la interpretación de las figuras y las áreas de los cuadrados haciendo las siguientes preguntas (entre otras):

¿Qué se debe hacer para calcular el área P, Q y R?

Las áreas P y Q son fáciles de determinar, pero no el área R.

¿Cómo puede calcular ésta?

¿Qué relación existe entre las áreas P y Q con el área R?

* Concluir que P + Q = R

2. Expresar el teorema de Pitágoras como $a^2 + b^2 = c^2$

Ejemplo 1.1

(15 min)

* Hacer las siguientes preguntas (entre otras) a los estudiantes:

¿Áreas de qué figuras representan P, Q y R?

¿Cómo calcular el área de un cuadrado?

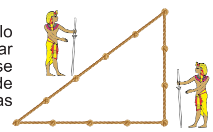
¿Cómo puede expresar P, Q y R si las medidas de los lados de los cuadrados que estas representan son a, b y c respectivamente?

Unidad 5 Teorema de Pitágoras

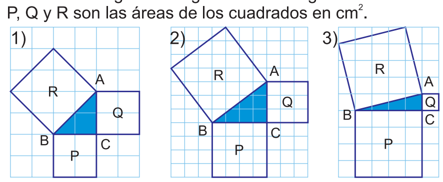
Lección 1: Teorema de Pitágoras

Sección 1: Teorema de Pitágoras

Los agrimensores egipcios usaban el llamado triángulo egipcio (triángulo rectángulo) a modo de escuadra para trazar líneas perpendiculares. Esta era una práctica habitual que se hacía con el objeto de recuperar las fronteras de los lindes de las tierras tras las periódicas inundaciones producidas por las crecidas del río Nilo.



Observe las siguientes figuras. Los triángulos en azul son triángulos rectángulos. P, Q y R son las áreas de los cuadrados en cm^2.



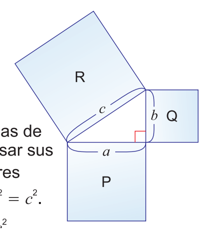
	P	Q	R
Fig. 1)	4	4	8
Fig. 2)	16	9	25
Fig. 3)	16	1	17

Observe que encontramos el área de P, Q y R contando cada cuadrado de la cuadrícula. Cada cuadrado equivale a 1 cm^2.

Para los tres triángulos de las figuras anteriores se cumple que P + Q = R. ¿Se cumplirá esto para todo triángulo rectángulo?

Ejemplo 1.1

Tome como referencia la figura de la derecha. Si el lado del cuadrado de área P mide a, el del cuadrado de área Q mide b y el del cuadrado de área R mide c, ¿de qué otra manera podría expresar las sumas de las áreas P + Q = R?



Solución:
Al ser P, Q y R las áreas de los cuadrados cuyas medidas de sus lados son a, b y c respectivamente, podemos expresar sus áreas como P = a^2, Q = b^2 y R = c^2. Al sustituir los valores anteriores en la expresión P + Q = R se obtiene $a^2 + b^2 = c^2$.

Respuesta: P + Q = R se puede expresar como $a^2 + b^2 = c^2$.

Ejercicio 1.1 Con base en el Ejemplo 1.1 y las figuras anteriores, ¿cuál de las siguientes expresiones denota el significado de la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$?

a) En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las longitudes de los catetos elevada al cuadrado.

b) En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

Concluir que P = a^2, Q = b^2, R = c^2 y se puede expresar P + Q = R como $a^2 + b^2 = c^2$

3. Ejercicio 1.1 *(10 min)*

Solución: b)

¡Cuidado! Tenga en cuenta la traducción algebraica para ambos incisos:

a) $c^2 = (a + b)^2$ b) $c^2 = a^2 + b^2$

Unidad 5: Teorema de Pitágoras

Lección 1: (2/11) Teorema de Pitágoras

Sección 1: Teorema de Pitágoras

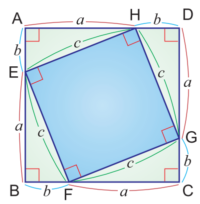
Objetivo: Definir el teorema de Pitágoras.

Ejemplo 1.2

Demuestre que para todo triángulo rectángulo se cumple la ecuación establecida en el Ejemplo 1.1, es decir, que $a^2 + b^2 = c^2$.

Solución:

Los lados del cuadrado ABCD miden $a + b$, por lo que su área es $(a + b)^2$. También se puede determinar el área del cuadrado ABCD a través de la relación entre las áreas de los triángulos y el cuadrado EFGH de la figura como se muestra a continuación:



(Área del cuadrado ABCD) = (Área del cuadrado EFGH) + 4(Área de los triángulos de medidas a, b y c)

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{1}{2} ab$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

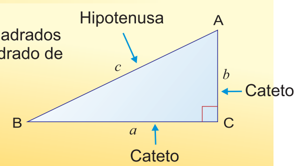
Los $\triangle$HAE $\triangle$EBF, $\triangle$FCG y $\triangle$GDH son rectángulos y congruentes por tanto tienen la misma área.

A la ecuación demostrada en el Ejemplo 1.2 se le conoce como "**Teorema de Pitágoras**".

Teorema de Pitágoras
En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.

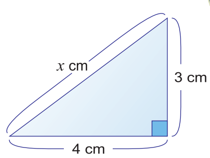
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Catetos Hipotenusa



Ejemplo 1.3

Haciendo uso del teorema de Pitágoras, encuentre la medida desconocida del siguiente triángulo.



Solución:

Del teorema de Pitágoras tenemos que:

$$4^2 + 3^2 = x^2$$
$$x^2 = 16 + 9$$
$$x^2 = 25, \text{ como } x > 0$$
$$x = \sqrt{25}$$
$$x = 5$$

Respuesta: 5 cm

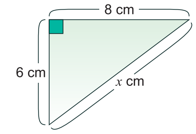
103

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

* Apuntar que la expresión $x > 0$ siempre debe escribirse al momento de calcular la raíz cuadrada, de lo contrario, x podría ser un número negativo y al calcular su raíz cuadrada, el resultado ya no sería un número real.

Indicador de logro

Encuentre la medida desconocida en el siguiente triángulo.



1. Demostrar el teorema de Pitágoras Ejemplo 1.2

(20 min)

* Hacer uso de la figura y realizar las siguientes preguntas:
  ¿Cuánto mide el lado del cuadrado ABCD?
  ¿Cómo se calcula el área de un cuadrado?
  ¿Qué relación existe entre el área del cuadrado EFGH y el área de los 4 triángulos cuyas medidas son a, b y c?
  ¿Cuál es el área del cuadrado EFGH?
  ¿Cuál es el área de los 4 triángulos?
* Haciendo uso de las áreas de los cuadrados y de los triángulos, ¿qué expresión se puede construir?
* Para una mejor comprensión de la figura y sus áreas dibuje el perímetro del cuadrado ABCD en rojo, el área del cuadrado EFGH en azul y el área de los 4 triángulos en verde.

2. Encontrar el lado de un triángulo rectángulo mediante el teorema de Pitágoras

(5 min)

3. Resolver Ejemplo 1.3

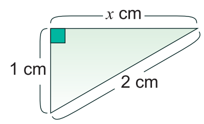
(10 min)

* Recordar a los estudiantes que en un triángulo rectángulo la hipotenusa es el lado de mayor longitud y es opuesta al ángulo recto.
* Aplicar la definición del teorema de Pitágoras.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Encuentre la medida desconocida en el siguiente triángulo.



4. Resolver *Ejercicio* **1.2**

(10 min)

Solución

a) x = 10 cm

b) x = 25 cm

c) x = 13 cm

[Hasta aquí Clase 2]

[Desde aquí Clase 3]

1. Encontrar la medida del lado de un triángulo rectángulo. *Ejemplo* **1.4**

(15 min)

* Advertir sobre la diferencia que hay entre los dos incisos de los ejemplos con respecto el valor de x.

* Puede hacer las siguientes preguntas para el inciso a):

¿Cuál es la hipotenusa?

¿Cuáles son los catetos?

¿La longitud de qué lado debemos encontrar?

* Puede hacer las siguientes preguntas para el inciso b):

¿Cuál es la hipotenusa?

¿Cuáles son los catetos?

¿La longitud de qué lado debemos encontrar?

¿Cómo aplicaría el teorema de Pitágoras en este caso?

¿Qué diferencia existe entre éste inciso y el anterior?

2. Resolver *Ejercicio* **1.3**

(30 min)

Solución

a) x = 5 cm   b) $x = \sqrt{3}$ cm

c) x = 6 cm   d) $x = \sqrt{2}$ cm

e) $x = \sqrt{181}$ cm

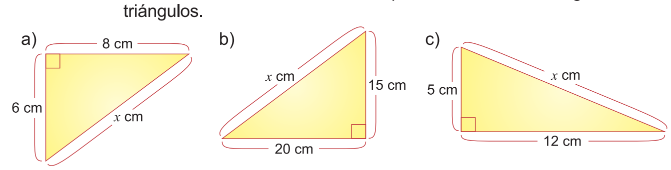
Unidad 5: **Teorema de Pitágoras**

Lección 1: (3/11) Teorema de Pitágoras

Sección 1: Teorema de Pitágoras

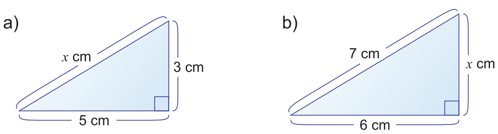
Objetivo: Encontrar la medida del lado que falta en un triángulo rectángulo aplicando el teorema de Pitágoras.

Ejercicio **1.2** Encuentre la medida desconocida para cada uno de los siguientes triángulos.



Ejemplo **1.4**

Encuentre la medida desconocida en los siguientes triángulos.



Solución:

Haciendo uso del teorema de Pitágoras tenemos:

a) $5^2 + 3^2 = x^2$

$x^2 = 25 + 9$

$x^2 = 34$, como $x > 0$

$x = \sqrt{34}$

Respuesta: $\sqrt{34}$ cm

b) $6^2 + x^2 = 7^2$

$36 + x^2 = 49$

$x^2 = 49 - 36$

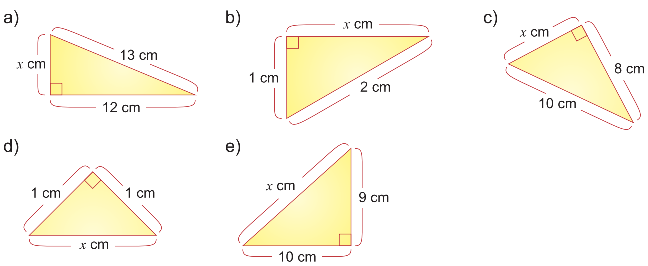
$x^2 = 13$, como $x > 0$

$x = \sqrt{13}$

Respuesta: $\sqrt{13}$ cm

¡Atención!
La hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto y es el lado de mayor longitud del triángulo.

Ejercicio **1.3** Encuentre la medida desconocida para cada uno de los siguientes triángulos.



104

Unidad 5 - Teorema de Pitágoras

Unidad 5: **Teorema de Pitágoras**

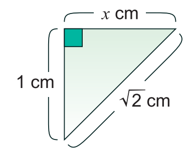
Lección 1: (4/11) Teorema de Pitágoras

Sección 1: Teorema de Pitágoras

Objetivo: Encontrar la medida del lado que falta en un triángulo rectángulo aplicando el teorema de Pitágoras.

Indicador de logro

Encuentre la medida desconocida en el siguiente triángulo



Ejemplo 1.5

Encuentre la medida desconocida en el siguiente triángulo.

Solución:

Del teorema de Pitágoras tenemos que:

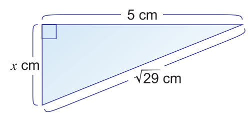
$x^2 + 5^2 = (\sqrt{29})^2$

$x^2 = 29 - 25$

$x^2 = 4$, como $x > 0$

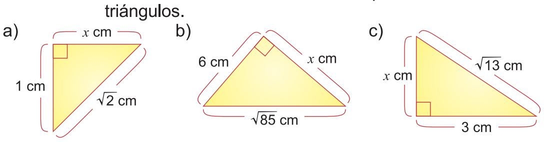
$x = \sqrt{4}$

$x = 2$



Respuesta: 2 cm

Ejercicio 1.4 Encuentre la medida desconocida para cada uno de los siguientes triángulos.

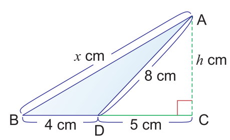


Ejemplo 1.6

Encuentre la medida de x del siguiente triángulo:

Solución:

Haciendo uso del teorema de Pitágoras, primero se debe encontrar la medida de h y luego la medida de x.



1) Para encontrar h, enfocarse en el ΔACD que es rectángulo. Por el teorema de Pitágoras:

$5^2 + h^2 = 8^2$

$25 + h^2 = 64$

$h^2 = 64 - 25$

$h^2 = 39$, como $h > 0$

$h = \sqrt{39}$

2) Para encontrar x, enfocarse en el ΔABC que es rectángulo. Como $h = \sqrt{39}$ y BC = 9, se tiene por el teorema de Pitágoras:

$9^2 + (\sqrt{39})^2 = x^2$

$x^2 = 81 + 39$

$x^2 = 120$, como $x > 0$

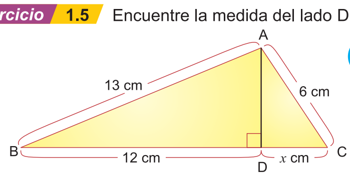
$x = \sqrt{120}$

$x = 2\sqrt{30}$

$120 = \sqrt{4 \times 30}$
$= \sqrt{4} \times \sqrt{30}$
$= 2\sqrt{30}$

Respuesta: $2\sqrt{30}$ cm

Ejercicio 1.5 Encuentre la medida del lado DC.



ΔABD y ΔACD son rectángulos.
Paso 1: Aplique el teorema de Pitágoras al ΔABD para encontrar AD.
Paso 2: Aplique de nuevo el teorema de Pitágoras, pero esta vez al ΔACD para encontrar la medida de x.

105

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

4. Resolver **Ejercicio 1.5** *(10 min)*

Solución

Para ΔABD:

$12^2 + AD^2 = 13^2$

$144 + AD^2 = 169$

$AD^2 = 169 - 144$

$AD^2 = 25$, como AD > 0

AD = $\sqrt{25}$

AD = 5 ... (**1**)

Para ΔACD y haciendo uso de (**1**):

$x^2 + 5^2 = 6^2$

$x^2 + 25 = 36$

$x^2 = 36 - 25$

$x^2 = 11$, como $x > 0$

$x = \sqrt{11}$

Respuesta: $x = \sqrt{11}$ (cm)

1. Encontrar la medida del lado de un triángulo rectángulo **Ejemplo 1.5**

(10 min)

* Dejar claro nuevamente, que la hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto.

¿Quién es la hipotenusa de este triángulo?

¿Por qué?

¿Qué ocurre cuando una raíz cuadrada es elevada al cuadrado?

* Realizar el ejemplo sin consultar el LE.

2. Resolver **Ejercicio 1.4**

(15 min)

Solución

a) x = 1 cm

b) x = 7 cm

c) x = 2 cm

3. Encuentre la medida del triángulo **Ejemplo 1.6**

(10 min)

* Hacer ver al estudiante que en la figura hay dos triángulos rectángulos (ΔACD y ΔABC).

* Aclarar a los estudiantes que primero se debe trabajar con el ΔACD porque en éste se encuentran dos medidas conocidas mientras que en el ΔABC sólo una.

¿Qué tipo de triángulo es ΔABD?

¿Cómo puede encontrarse AB?

¿Qué relación tiene la longitud del $\overline{AC}$ con el triángulo ABC?

¿Cómo puedo encontrar la medida de x?

Indicador de logro

Las siguientes son medidas de los tres lados de un triángulo. Determine si son triángulos rectángulos.

a) 6 cm, 8 cm, 10 cm

b) 4 cm, 5 cm, 6 cm

1. Determinar cuando un triángulo es rectángulo.

Ejemplo 1.7

(10 min)

* Orientar a los estudiantes a pensar en el teorema de Pitágoras como una condición para un triángulo rectángulo.
* Si se quiere determinar si este es un triángulo rectángulo, ¿cuál medida correspondería a la hipotenusa?

  ¿Qué medidas deben tener los catetos?

  ¿Qué condición deben cumplir las medidas de los lados de este triángulo para ser considerado un triángulo rectángulo?

  ¿Por qué el triángulo dado es rectángulo?

2. Definir del recíproco del teorema de Pitágoras

(5 min)

3. Aplicar el recíproco del teorema de Pitágoras

Ejemplo 1.8

(10 min)

* Pedir que identifiquen qué medida sería la de la hipotenusa y cuál la de los catetos.
* Sumar los cuadrados de las medidas de quienes serían los catetos por separado y luego elevar al cuadrado la medida de quien sería la hipotenusa.
* Comparar si esos resultados son iguales.
* Concluir que el proceso anterior es el que se debe seguir para comprobar si las medidas de un triángulo cualquiera determinan un triángulo rectángulo.

Unidad 5: Teorema de Pitágoras

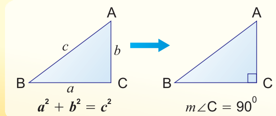
Lección 1: (5/11) Teorema de Pitágoras

Sección 1: Teorema de Pitágoras

Objetivo: Determinar cuándo un triángulo es rectángulo aplicando el recíproco del teorema de Pitágoras.

Se sabe que el recíproco del teorema de Pitágoras es verdadero.

Recíproco del teorema de Pitágoras
Si en el ΔABC se da que BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$ y también $a^2 + b^2 = c^2$, entonces $m\angle$C $= 90^0$ es decir, el ΔABC es rectángulo.



Ejemplo 1.7

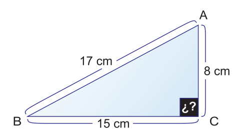
Si las medidas de los lados del ΔABC son 15, 8 y 17 cm, determine mediante el recíproco del teorema de Pitágoras si este es un triángulo rectángulo o no.

Solución:
Suponga que las medidas del triángulo están dispuestas como en la figura de la derecha. Como la hipotenusa es el lado de mayor longitud, se define:

$a = 15$ cm, $b = 8$ cm y c = 17 cm.

Se tiene: $a^2 + b^2 = 15^2 + 8^2$
$= 225 + 64$
$= 289$ ... (i)

Luego, observe que:
$c^2 = 17^2$
$c^2 = 289$ ... (ii)



De las ecuaciones (i) y (ii) se concluye que $a^2 + b^2 = c^2$, esto cumple con el teorema de Pitágoras definido solamente para triángulos rectángulos. Por lo tanto, el ΔABC es rectángulo.

Respuesta: ΔABC es un triángulo rectángulo.

Ejemplo 1.8

Haciendo uso del recíproco del teorema de Pitágoras, identifique si el triángulo cuyos lados miden 3 cm, 4 cm y 5 cm es rectángulo.

Solución:
Primero se debe identificar el lado que corresponde a la hipotenusa. Se sabe que la hipotenusa es el lado más largo, por lo que, en este caso, sería el lado de longitud 5 cm. Luego, sea $a = 3$, $b = 4$ y $c = 5$.

(i) $a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ (ii) $c^2 = 5^2 = 25$ De (i) y (ii) se concluye que $a^2 + b^2 = c^2$

Respuesta: El triángulo dado es rectángulo.

Ejercicio 1.6 Se dan las medidas de los 3 lados de varios triángulos. ¿Cuáles son triángulos rectángulos?

a) 6 cm, 8 cm, 10 cm b) 4 cm, 5 cm, 6 cm c) 1 cm, $\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{5}$ cm
d) 1 cm, 1 cm, $\sqrt{2}$ cm e) $\sqrt{3}$ cm, $\sqrt{4}$ cm, $\sqrt{5}$ cm f) 12 cm, 15 cm, 18 cm

106
Unidad 5 - Teorema de Pitágoras

4. Resolver Ejercicio 1.6

(20 min)

Solución

a) Sí es triángulo rectángulo b) No es triángulo rectángulo
c) No es triángulo rectángulo d) Sí es triángulo rectángulo
e) No es triángulo rectángulo f) No es triángulo rectángulo

Unidad 5: **Teorema de Pitágoras**

Lección 1: (6/11) Teorema de Pitágoras

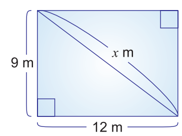
Sección 2: Aplicación del teorema de Pitágoras

Objetivo: Calcular la medida de la diagonal de un rectángulo y un cuadrado aplicando el teorema de Pitágoras.

Sección 2: Aplicación del teorema de Pitágoras

Ejemplo 1.9

Un hombre tiene un terreno rectangular cuyas medidas son 9 m de ancho y 12 m de largo. Él quiere dividir este terreno en dos terrenos de forma triangular de igual área. ¿Cuáles son las medidas de los terrenos triangulares?



Solución:

Al trazar la diagonal del rectángulo, se obtienen dos triángulos congruentes cuyas áreas son iguales, además dichos triángulos son rectángulos. Si x es la medida de la diagonal del rectángulo, por el teorema de Pitágoras se tiene:

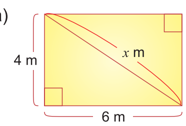
$$12^2 + 9^2 = x^2$$
$$x^2 = 144 + 81$$
$$x^2 = 225, \text{ como } x > 0$$
$$x = \sqrt{225}$$
$$x = 15$$

$$\sqrt{225} = \sqrt{9 \times 25} = \sqrt{9} \times \sqrt{25} = 3 \times 5 = 15$$

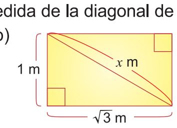
Respuesta: Las medidas de los terrenos triangulares son de 9 m, 12 m y 15 m.

Ejercicio 1.7 Encuentre la medida de la diagonal de los siguientes rectángulos:

a)



b)



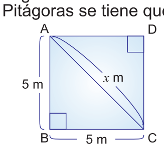
Ejemplo 1.10

Encuentre la medida de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 5 m.

Solución:

Sea x la medida en metros de la diagonal AC. El $\triangle$ABC es rectángulo. Por el teorema de Pitágoras se tiene que:

$$5^2 + 5^2 = x^2$$
$$x^2 = 25 + 25$$
$$x^2 = 50, \text{ como } x > 0$$
$$x = \sqrt{50}$$
$$x = 5\sqrt{2}$$

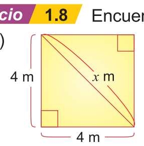


$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

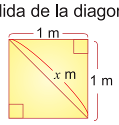
Respuesta: $5\sqrt{2}$ m

Ejercicio 1.8 Encuentre la medida de la diagonal de los siguientes cuadrados:

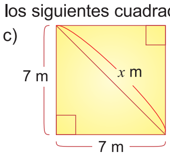
a)



b)



c)



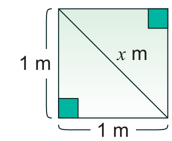
4. **Resolver Ejercicio 1.8** (15 min)

Solución

a) $x = 4\sqrt{2}$ m b) $x = \sqrt{2}$ m c) $x = 7\sqrt{2}$ m

Indicador de logro

Encuentre la medida de la diagonal



1. **Aplicar el teorema de Pitágoras Ejemplo 1.9** (10 min)

* Presentar en la pizarra la situación del ejemplo.

¿Qué tipo de cuadrilátero es la figura?

¿Qué es una diagonal?

¿Qué figuras obtengo al trazar la diagonal del rectángulo?

¿Por qué se puede afirmar que estos dos triángulos son congruentes?

¿Qué relación existe entre las áreas de triángulos congruentes?

¿Por qué estos triángulos son rectángulos?
En este caso, ¿qué es la diagonal del rectángulo?

¿Cuál de los dos triángulos usaremos para el cálculo?

¿Por qué?

2. **Resolver Ejercicio 1.7** (10 min)

Solución

a) $x = 2\sqrt{13}$ m b) $x = 2$ m

3. **Encontrar la medida de la diagonal de un cuadrado Ejemplo 1.10** (10 min)

* Indicar que x representa la longitud de la diagonal del cuadrado

En la figura:

¿Cuál sería la diagonal del cuadrado?

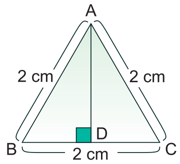
¿Por qué los triángulos son rectángulos?

¿Qué es la diagonal del cuadrado?

* Recordar el proceso de simplificación de raíces

Indicador de logro

Encuentre la medida de la altura del triángulo equilátero



Unidad 5: Teorema de Pitágoras

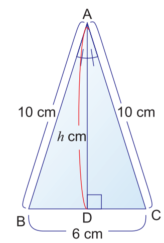
Lección 1: (7/11) Teorema de Pitágoras

Sección 2: Aplicación del teorema de Pitágoras

Objetivo: Calcular la medida de la altura de un triángulo equilátero aplicando el teorema de Pitágoras.

Ejemplo 1.11

Encuentre la medida de la altura AD del triángulo isósceles que se muestra a la derecha. ($\overline{AD}$ es la bisectriz del $\angle$A)



Solución:

$\overline{AD}$ es la altura del ΔABC respecto al lado BC. AB = AC.
Se sabe que la bisectriz del $\angle$A, que está comprendida entre los dos lados congruentes es la mediatriz del lado opuesto, es decir, del lado BC; por lo tanto BD = CD = 3 cm y el $\angle$D es recto.

Si se toma el ΔABD y se aplica el teorema de Pitágoras y AD = h, se tiene que:

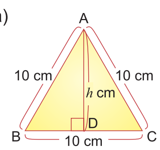
Se puede utilizar también el ΔACD

$$3^2 + h^2 = 10^2$$
$$9 + h^2 = 100$$
$$h^2 = 100 - 9$$
$$h^2 = 91, \text{ como } h > 0$$
$$h = \sqrt{91}$$

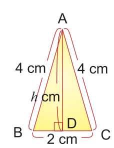
Respuesta: $\sqrt{91}$ cm

Ejercicio 1.9 Encuentre la medida de la altura h correspondiente al lado BC, para cada uno de los siguientes triángulos. Utilice la propiedad de los triángulos isósceles que dice: "La bisectriz del ángulo comprendido entre los dos lados congruentes es la mediatriz del lado opuesto".

a)

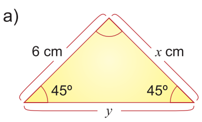


b)

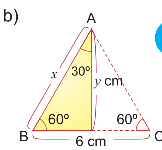


Ejercicio 1.10 Encuentre el valor de x e y en cada triángulo.

a)



b)



Lados opuestos a ángulos congruentes, son congruentes.

1. **Encontar la medida de la altura de un triángulo isósceles mediante el teorema de Pitágoras Ejemplo 1.11**
   (20 min)
   Presentar la situación y pemitir a los estudiantes que piensen como puede encontrar la longitud del $\overline{AD}$.
   Al ser $\overline{AD}$ altura, ¿cuál es la medida del $\angle$D?
   ¿Por qué $\overline{AD}$ es la bisectriz del $\angle$A?
   Hacer referencia al teorema anterior, el cual estudiaron en 8vo grado en la unidad de congruencia de triángulos.
   ¿Qué hace la mediatriz a unsegmento?
   ¿Qué segmento es dividido en dos segmentos congruentes?
   ¿Cuánto mide el segmento BD?
   ¿Por qué se puede aplicar el teorema de Pitágoras para encontrar la altura AD?
   ¿Quién es la hipotenusa del ΔABD?
2. **Resolver Ejercicio 1.9**
   (10 min)
   Solución
   a) AD = $5\sqrt{3}$ cm
   b) AD = $\sqrt{15}$ cm
3. **Ejercicio 1.10** *(15 min)*
   Solución
   a) La medida del ángulo desconocido es 90º porque 180º - (45º + 45º) = 90º, entonces este triángulo es rectángulo.
   x = 6 cm
   Por teorema de Pitágoras: $6^2 + 6^2 = y^2$, por tanto $y = 6\sqrt{2}$ cm
   b) x = 6 cm, pues el triángulo es equilátero (porque $m\angle$A = $m\angle$B = $m\angle$C = 60º). Observe que la altura y divide a $\overline{BC}$ en dos segmentos congruentes.
   Para encontrar el valor de y se aplica el teorema de Pitágoras:
   $3^2 + y^2 = 6^2$, por tanto:
   $y = 3\sqrt{3}$ cm

Unidad 5: Teorema de Pitágoras

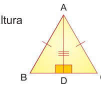
Lección 1: (8/11) Teorema de Pitágoras

Sección 2: Aplicación del teorema de Pitágoras

Objetivo: Demostrar que la altura de un triángulo equilátero divide a este en dos triángulos rectángulos congruentes.

Indicador de logro

Completar la siguiente demostración



Hipótesis: ΔABC es equilátero ($\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$). $\overline{AD}$ es la altura del ΔABC respecto al lado BC.

Conclusión: $\Delta ADB \cong \Delta ADC$

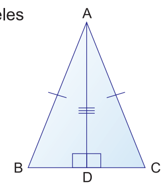
Entre ΔADB y ΔADC

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	Por
2) $m\angle ADB$ = ___ = 90°	Por hipótesis y definición de altura
3) $\overline{AD} \cong$ ___	Por congruencia del mismo segmento
4) $\Delta ADB \cong \Delta ADC$	Por 1), 2) 3) y criterio de congruencia ___ de triángulos rectángulos

Para aclarar los procedimientos utilizados en Ejemplo 1.11 y Ejercicio 1.9 se presentan los siguientes demostraciones.

Ejemplo 1.12

Demostrar que la altura respecto a la base de un triángulo isósceles divide a éste en dos triángulos rectángulos congruentes.



Solución:

Hipótesis: ΔABC es isósceles, donde $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. $\overline{AD}$ es la altura del ΔABC respecto al lado BC.

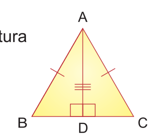
Conclusión: $\Delta ADB \cong \Delta ADC$

Entre los ΔADB y ΔADC,

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	Por hipótesis
2) $m\angle ADB = m\angle ADC = 90°$	Por hipótesis y definición de altura
3) $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	Por congruencia del mismo segmento
4) $\Delta ADB \cong \Delta ADC$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia hipotenusa - cateto de triángulos rectángulos.

La altura respecto a la base de un triángulo isósceles divide a éste en dos triángulos rectángulos congruentes.

Ejercicio 1.11 Complete la siguiente demostración para indicar que la altura de un triángulo equilátero divide a éste en dos triángulos rectángulos congruentes.



Hipótesis: ΔABC es equilátero ($\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$). $\overline{AD}$ es la altura del ΔABC respecto al lado BC.

Conclusión: $\Delta ADB \cong \Delta ADC$

Entre los ΔADB y ΔADC

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	___
2) $m\angle ADB$ = ___ = 90°	Por hipótesis y definición de altura
3) $\overline{AD} \cong$ ___	Por congruencia del mismo segmento
4) $\Delta ADB \cong \Delta ADC$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia ___ de triángulos rectángulos

109

Libro del Estudiante - Matemáticas 9° grado

1. **Realizar demostraciones aplicando teorema de Pitágoras Ejemplo 1.12**

   (15 min)

   * Indicar que piensen la manera de hacer la demostración.

   ¿Qué es la hipótesis de una demostración?

   ¿Cuál es la hipótesis para esta demostración?

   ¿Qué es lo que se pide demostrar?

   * Ordenar en la demostración las ideas planteadas.

   ¿Por qué se puede decir que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$?

   Ya que el $\overline{AD}$ es la altura del triángulo, ¿cuál es la medida del $\angle ADB$?

   ¿Qué tipo de triángulos son ΔADB y ΔADC?

   ¿Cuáles son las hipotenusas respectivas de estos triángulos?

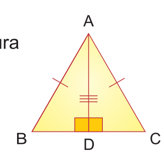
   ¿Por qué se puede afirmar que $\overline{AD} \cong \overline{AD}$?

   ¿Cuál es la razón que permite decir que $\Delta ADB \cong \Delta ADC$?

2. **Resolver Ejercicio 1.11**

   (20 min)

Solución Ejercicio 1.11



Hipótesis: ΔABC es equilátero ($\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$). $\overline{AD}$ es la altura del ΔABC respecto al lado BC.

Conclusión: $\Delta ADB \cong \Delta ADC$

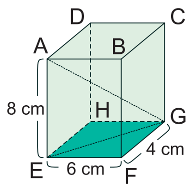
Entre ΔADB y ΔADC

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	Por hipótesis
2) $m\angle ADB$ = $m\angle ADC$ = 90°	Por hipótesis y definición de altura
3) $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	Por congruencia del mismo segmento
4) $\Delta ADB \cong \Delta ADC$	Por 1), 2) 3) y criterio de congruencia hipotenusa - cateto de triángulos rectángulos

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Encontrar la medida del $\overline{AG}$:



Unidad 5: Teorema de Pitágoras

Lección 1: (9/11) Teorema de Pitágoras

Sección 2: Aplicación del teorema de Pitágoras

Objetivo: Calcular la medida de la diagonal de un prisma aplicando el teorema de Pitágoras.

3. Analizar el problema planteado Ejemplo 1.13 *(10 min)*

¿Cuál es la altura de un triángulo?

* Después de trazar la altura CD, ¿se puede decir que los triángulos formados son congruentes?, ¿por qué?

¿Ocurrirá lo mismo si se traza la altura correspondiente a $\overline{AC}$?

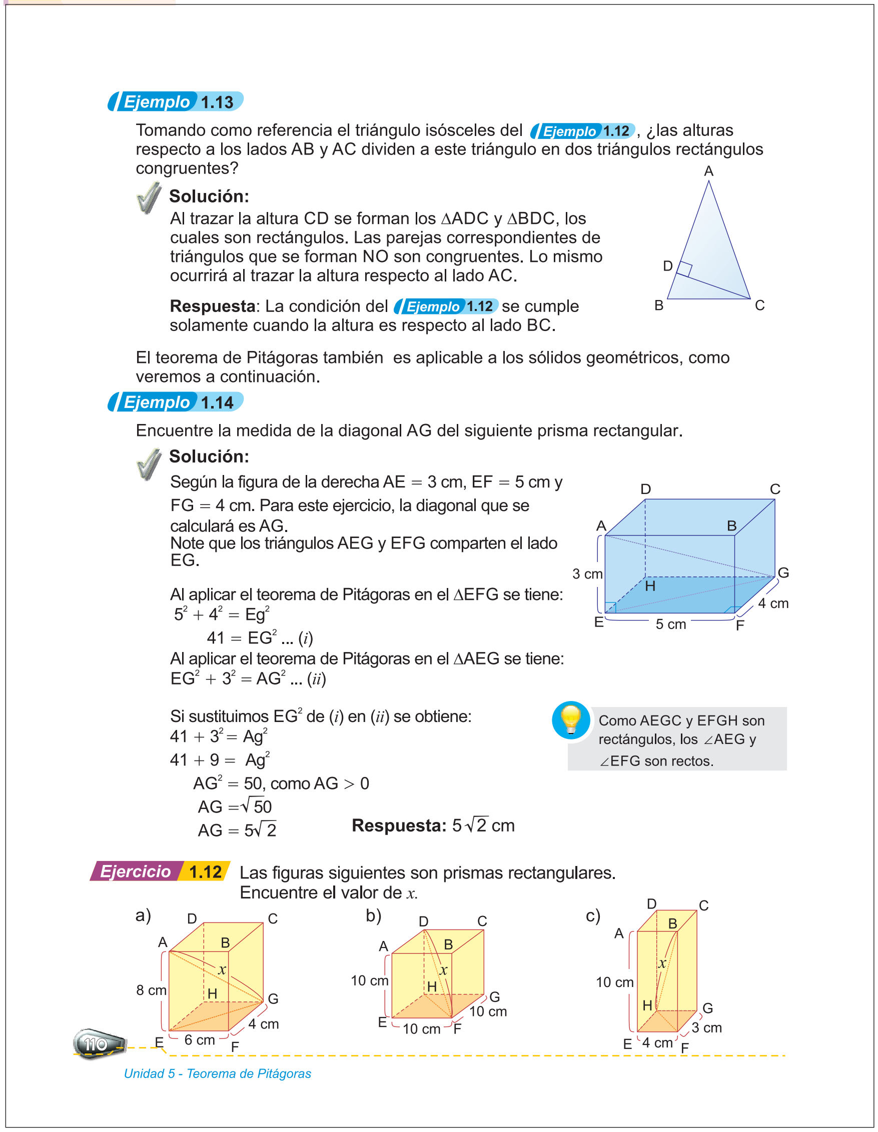
[Hasta aquí Clase 8]

[Desde aquí Clase 9]

1. Encontrar la medida de una diagonal en un prisma. Ejemplo 1.14 *(20 min)*

* Observe que al aplicar el teorema de Pitágoras en el ΔEFG se obtiene $EG^2 = 5^2 + 4^2$ y esta sólo se deja expresada. Lo anterior se hace con el objetivo de no trabajar con raíces y hacerlo sólo con potencias de enteros.

2. Resolver Ejercicio 1.12 *(25 min)*


Ejemplo 1.13

Tomando como referencia el triángulo isósceles del Ejemplo 1.12, ¿las alturas respecto a los lados AB y AC dividen a este triángulo en dos triángulos rectángulos congruentes?

Solución:

Al trazar la altura CD se forman los ΔADC y ΔBDC, los cuales son rectángulos. Las parejas correspondientes de triángulos que se forman NO son congruentes. Lo mismo ocurrirá al trazar la altura respecto al lado AC.

Respuesta: La condición del Ejemplo 1.12 se cumple solamente cuando la altura es respecto al lado BC.

El teorema de Pitágoras también es aplicable a los sólidos geométricos, como veremos a continuación.

Ejemplo 1.14

Encuentre la medida de la diagonal AG del siguiente prisma rectangular.

Solución:

Según la figura de la derecha AE = 3 cm, EF = 5 cm y FG = 4 cm. Para este ejercicio, la diagonal que se calculará es AG.

Note que los triángulos AEG y EFG comparten el lado EG.

Al aplicar el teorema de Pitágoras en el ΔEFG se tiene:

$5^2 + 4^2 = Eg^2$

$41 = EG^2$ ... (i)

Al aplicar el teorema de Pitágoras en el ΔAEG se tiene:

$EG^2 + 3^2 = AG^2$ ... (ii)

Si sustituimos EG^2 de (i) en (ii) se obtiene:

$41 + 3^2 = Ag^2$

$41 + 9 = Ag^2$

$AG^2 = 50$, como $AG > 0$

$AG = \sqrt{50}$

$AG = 5\sqrt{2}$

Respuesta: $5\sqrt{2}$ cm

Como AEGC y EFGH son rectángulos, los $\angle$AEG y $\angle$EFG son rectos.

Ejercicio 1.12 Las figuras siguientes son prismas rectangulares. Encuentre el valor de x.

a) 8 cm, 6 cm, 4 cm

b) 10 cm, 10 cm, 10 cm

c) 10 cm, 4 cm, 3 cm

110 Unidad 5 - Teorema de Pitágoras

Solución

a) En el ΔEFG

$6^2 + 4^2 = EG^2$

$EG = 2\sqrt{13}$

En el ΔAEG

$8^2 + (2\sqrt{3})^2 = x^2$

$x^2 = 116$

Respuesta: $x = 2\sqrt{29}$ cm.

b) En el ΔEFH

$10^2 + 10^2 = FH^2$

$FH = 10\sqrt{2}$

En el ΔDHF

$10^2 + (10\sqrt{2})^2 = x^2$

$x^2 = 300$

Respuesta: $x = 10\sqrt{3}$ cm.

c) En el ΔEFH

$4^2 + 3^2 = FH^2$

$FH = 5$

En el ΔBFH

$10^2 + 5^2 = x^2$

$x^2 = 125$

Respuesta: $x = 5\sqrt{5}$ cm.

Unidad 5: Teorema de Pitágoras

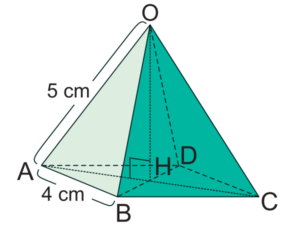
Lección 1: (10/11) Teorema de Pitágoras

Sección 2: Aplicación del teorema de Pitágoras

Objetivo: Calcular la medida de la altura de una pirámide de base cuadrada y rectangular.

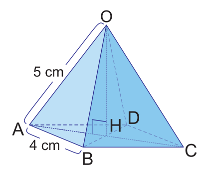
Indicador de logro

Encontrar la medida de la altura OH:



Ejemplo 1.15

El dibujo de la derecha muestra una pirámide de base cuadrada en la que OA = OB = OC = OD = 5 cm. Encuentre la medida de la altura de la pirámide.



Solución:

La altura de la pirámide es OH.
El ΔOAC es isósceles.
Los ΔABC y ΔOHA son rectángulos.
H es el punto medio de $\overline{AC}$.

Al aplicar el teorema de Pitágoras en el ΔABC se obtiene:

$4^2 + 4^2 = AC^2$

$AC^2 = 16 + 16$

$AC^2 = 32$, como $AC > 0$

$AC = \sqrt{32}$

$AC = 4\sqrt{2}$

$AH = CH = \frac{AC}{2}$, porque las diagonales de un cuadrado se cortan en el punto medio.

Como H es el punto medio de la diagonal AC entonces:

$AH = \frac{AC}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

Ahora, al aplicar el teorema de Pitágoras en el ΔOHA se obtiene:

$(2\sqrt{2})^2 + OH^2 = 5^2$

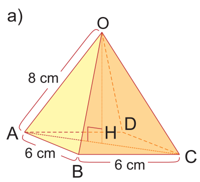
$8 + OH^2 = 25$

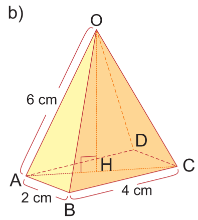
$OH^2 = 17$, como $OH > 0$

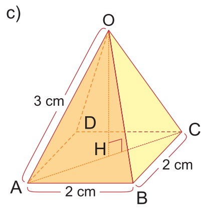
$OH = \sqrt{17}$

Respuesta: $\sqrt{17}$ cm

Ejercicio 1.13 Encuentre la medida de la altura OH de las siguientes pirámides de base rectangular. Para cada pirámide, OA = OB = OC = OD.

a) 

b) 

c) 

a) En el ΔABC
$6^2 + 6^2 = AC^2$
$AC = 6\sqrt{2}$

En el ΔOAH
$(\frac{6\sqrt{2}}{2})^2 + OH^2 = 8^2$
$OH^2 = 46$

Respuesta: $OH = \sqrt{46}$ cm

b) En el ΔABC
$4^2 + 2^2 = AC^2$
$AC = 2\sqrt{5}$

En el ΔOAH
$(\frac{2\sqrt{5}}{2})^2 + OH^2 = 6^2$
$OH^2 = 31$

Respuesta: $OH = \sqrt{31}$ cm

c) En el ΔABC
$2^2 + 2^2 = AC^2$
$AC = 2\sqrt{2}$

En el ΔOAH
$(\frac{2\sqrt{2}}{2})^2 + OH^2 = 3^2$
$OH^2 = 7$

Respuesta: $OH = \sqrt{7}$ cm

1. Encontrar la medida de la altura de una pirámide

Ejemplo 1.15

(15 min)

* Se debe recalcar que para estos ejercicios que se presentan en la lección es vital que se establezca que OA = OB = OC = OD

Para encontrar la diagonal AC ¿qué figura es la base de la pirámide?

¿Cuáles son las diagonales del cuadrado ABCD?

¿Cómo son el ΔABC y el ΔACD?, ¿por qué?

¿Cómo se puede calcular la medida de la diagonal AC?

Para encontrar la altura OH, ¿cómo son las medidas OA, OB, OC y OD?

Fíjese en el ΔOAC. ¿Qué tipo de triángulo es?

¿Qué comparten el cuadrado ABCD y el ΔOAC?

¿Qué hace la altura OH a la diagonal AC?, ¿por qué?

¿Cuánto miden los segmentos AH y CH?

¿Qué tipo de triángulo es el ΔOHA?, ¿por qué?

¿Cómo se puede calcular la medida de la altura OH?

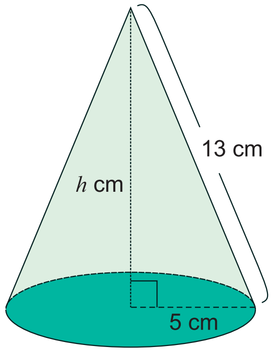
2. Resolver Ejercicio 1.13

(30 min)

Solución

Indicador de logro

Encontrar la medida de la altura del cono



1. **Calcular medida de la altura de un cono** *Ejemplo* **1.16**

   (15 min)

* Identificar la generatriz en el cono.

* Hacer ver a los estudiantes la importancia de las demostraciones realizadas en la clase 8 y que éstas, junto al teorema de Pitágoras, se aplican para calcular alturas de pirámides y conos.

¿Qué ángulo se forma entre el radio de la circunferencia y la altura h?, ¿por qué?

¿Cómo se puede calcular la medida de la altura h?

* Indicar que se forma un triángulo rectángulo.

¿Cómo se aplica el teorema de Pitágoras?

¿Quién es la hipotenusa del triángulo en cuestión?

2. **Resolver** *Ejercicio* **1.14**

   (30 min)

* Para el inciso b) tenga el cuidado de encontrar y trabajar con el radio del círculo de la base.

Solución

a) $h = 12$ cm

b) $h = 5\sqrt{3}$ cm

c) $h = \sqrt{5}$ cm

Unidad 5: **Teorema de Pitágoras**

Lección 1: (11/11) Teorema de Pitágoras

Sección 2: Aplicación del teorema de Pitágoras

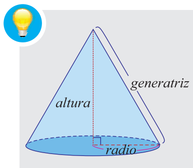
Objetivo: Calcular la medida de la altura de un cono aplicando el teorema de Pitágoras.

Ejemplo **1.16**

Calcule la medida de la altura del cono de la siguiente figura.

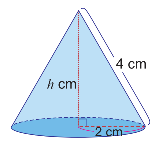
Solución:

Para encontrar la altura de un cono se necesita el radio del círculo de la base y su generatriz. La altura del cono y el radio de la base son perpendiculares.



Haciendo uso del teorema de Pitágoras se tiene que:

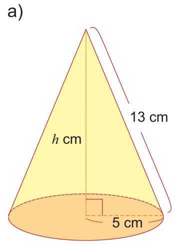
$$2^2 + h^2 = 4^2$$
$$4 + h^2 = 16$$
$$h^2 = 12, \text{ como } h > 0$$
$$h = \sqrt{12}$$
$$h = 2\sqrt{3}$$



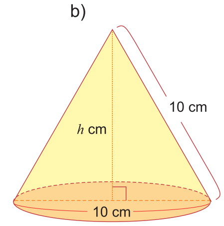
Respuesta: $2\sqrt{3}$ cm

Ejercicio **1.14** Encuentre la medida de la altura de los siguientes conos:

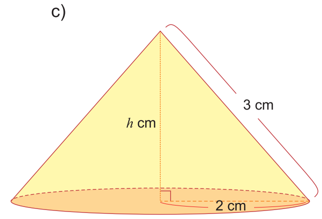
a)



b)



c)



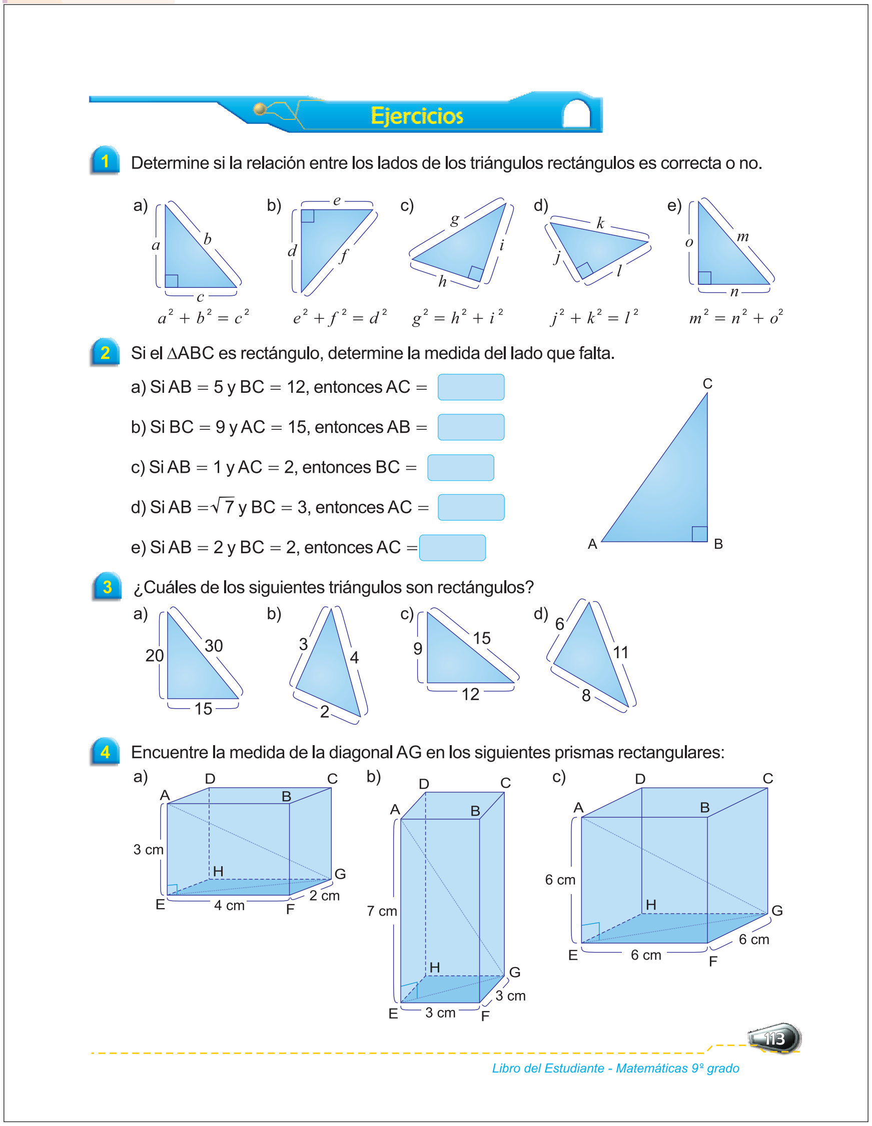
* Es muy probable que le sobre tiempo en esta clase, así que, si esto ocurre, proceda a resolver los ejercicios propuestos para esta lección (numeral 5 incisos b) y d) de la sección: ejercicios de la unidad)

Unidad 5: **Teorema de Pitágoras**

Lección 1: (1-2/2) Teorema de Pitágoras

Sección 3: Ejercicios de la unidad

Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre el teorema de Pitágoras.



Ejercicios

1 Determine si la relación entre los lados de los triángulos rectángulos es correcta o no.

a) $a^2 + b^2 = c^2$ b) $e^2 + f^2 = d^2$ c) $g^2 = h^2 + i^2$ d) $j^2 + k^2 = l^2$ e) $m^2 = n^2 + o^2$

2 Si el $\triangle ABC$ es rectángulo, determine la medida del lado que falta.

a) Si AB = 5 y BC = 12, entonces AC =

b) Si BC = 9 y AC = 15, entonces AB =

c) Si AB = 1 y AC = 2, entonces BC =

d) Si AB = $\sqrt{7}$ y BC = 3, entonces AC =

e) Si AB = 2 y BC = 2, entonces AC =

3 ¿Cuáles de los siguientes triángulos son rectángulos?

a) 20, 30, 15 b) 3, 4, 2 c) 9, 15, 12 d) 6, 11, 8

4 Encuentre la medida de la diagonal AG en los siguientes prismas rectangulares:

a) 3 cm, 4 cm, 2 cm b) 7 cm, 3 cm, 3 cm c) 6 cm, 6 cm, 6 cm

113

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

1 Determine si la relación entre los lados de los triángulos rectángulos siguientes es correcta o no.

Solución

a) NO

b) NO

c) SÍ

d) NO

e) SÍ

2 Si el $\triangle ABC$ es rectángulo, determine la medida del lado que falta:

Solución

a) AC= 13

b) AB = 12

c) BC = $\sqrt{3}$

d) AC = 4

e) AC = 2 $\sqrt{2}$

3 Determinar cuando un triángulo es rectángulo

Solución

a) NO ($15^2 + 20^2 \neq 30^2$)

b) NO ($1^2 + 1^2 \neq 2^2$)

c) SÍ ($9^2 + 12^2 = 15^2$)

d) NO ($6^2 + 8^2 \neq 11^2$)

4 Encuentre la medida de la diagonal AG en los siguientes prismas:

Solución

a) AG = $\sqrt{29}$ cm

b) AG = $\sqrt{67}$ cm

c) AG = $6\sqrt{3}$ cm

a) En el $\triangle EFG$

$4^2 + 2^2 = EG^2$

$EG = 2\sqrt{5}$

En el $\triangle AEG$

$3^2 + (2\sqrt{5})^2 = AG^2$

$AG^2 = 29$

Respuesta: AG = $\sqrt{29}$ cm

b) En el $\triangle EFG$

$3^2 + 3^2 = EG^2$

$EG = 3\sqrt{2}$

En el $\triangle AEG$

$7^2 + (3\sqrt{2})^2 = AG^2$

$AG^2 = 67$

Respuesta: AG = $\sqrt{67}$ cm

c) En el $\triangle EFG$

$6^2 + 6^2 = EG^2$

$EG = 6\sqrt{2}$

En el $\triangle AEG$

$6^2 + (6\sqrt{2})^2 = AG^2$

$AG^2 = 108$

Respuesta: AG = $6\sqrt{3}$ cm

5 **Encuentre la altura de sólidos**

Solución

a) $3^2 + h^2 = 9^2$

$h^2 = 72$, como $h > 0$

$h = \sqrt{72}$

Respuesta: $6\sqrt{2}$ cm

b) En el $\triangle ABC$

$6^2 + 2^2 = AC^2$

$AC = 2\sqrt{10}$

En el $\triangle OAH$

$(\frac{2\sqrt{10}}{2})^2 + OH^2 = 7^2$

$OH^2 = 39$, como $OH > 0$

$OH = \sqrt{39}$

Respuesta: $\sqrt{39}$ cm

c) $(\frac{6}{2})^2 + h^2 = 5^2$

$h^2 = 16$, como $h > 0$

$h = 4$

Respuesta: 4 cm

d) En el $\triangle ABC$

$3^2 + 4^2 = AC^2$

$AC = 5$

En el $\triangle OAH$

$(\frac{5}{2})^2 + OH^2 = 6^2$

$OH^2 = \frac{119}{4}$, como $OH > 0$

$OH = \frac{\sqrt{119}}{2}$

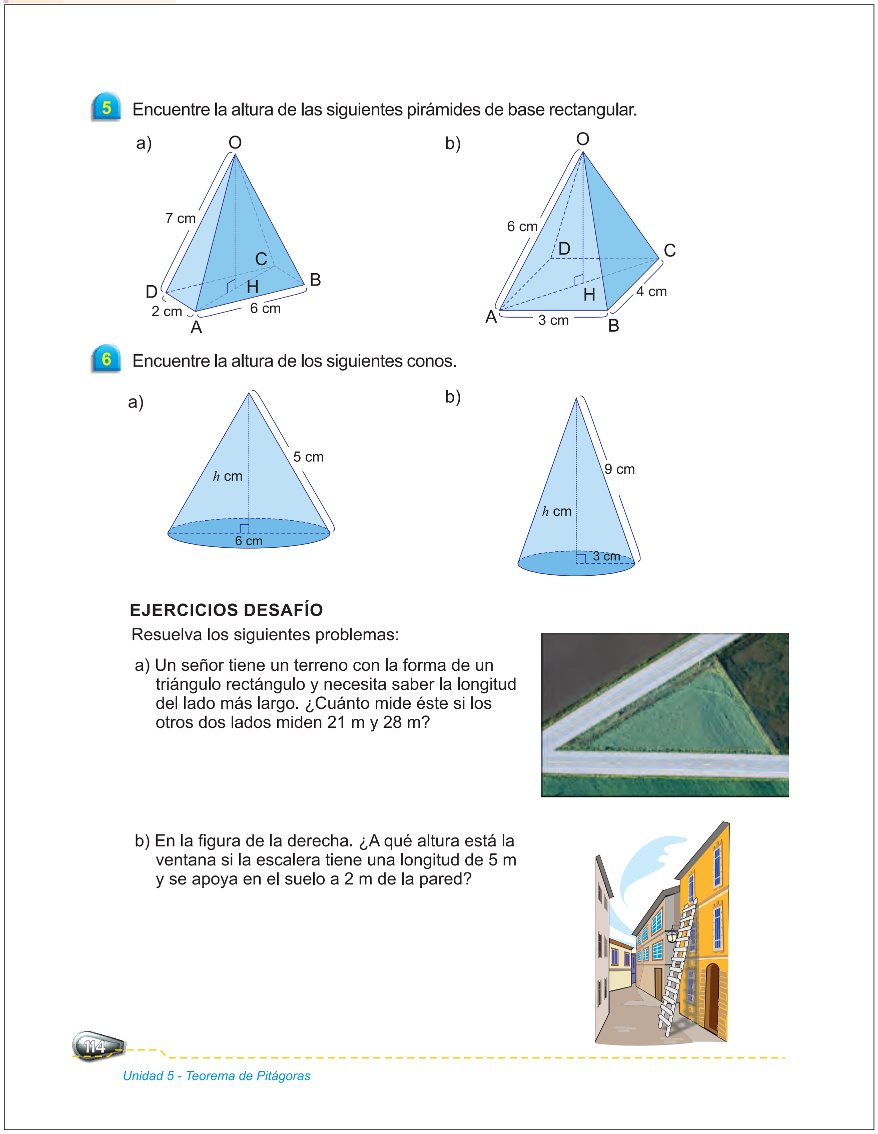
Respuesta: $\frac{\sqrt{119}}{2}$ cm

Unidad 5: **Teorema de Pitágoras**

Lección 1: (1-2/2) Teorema de Pitágoras

Sección 3: Ejercicios de la unidad

Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre el teorema de Pitágoras



5 Encuentre la altura de las siguientes pirámides de base rectangular.

6 Encuentre la altura de los siguientes conos.

EJERCICIOS DESAFÍO

Resuelva los siguientes problemas:

a) Un señor tiene un terreno con la forma de un triángulo rectángulo y necesita saber la longitud del lado más largo. ¿Cuánto mide éste si los otros dos lados miden 21 m y 28 m?

b) En la figura de la derecha. ¿A qué altura está la ventana si la escalera tiene una longitud de 5 m y se apoya en el suelo a 2 m de la pared?

114

Unidad 5 - Teorema de Pitágoras

Ejercicios desafío

Resuelva los siguientes problemas haciendo uso del teorema de Pitágoras

a) $x^2 = 21^2 + 28^2$

$x^2 = 441 + 784$

$x^2 = 1225$, como $x > 0$

$x = 35$

Respuesta: 35 m

b) $2^2 + x^2 = 5^2$

$x^2 = 21$, como $x > 0$

$x = \sqrt{21}$

Respuesta: $\sqrt{21}$ m

Unidad 6
Polígonos regulares y el círculo

Unidad 6

Polígonos regulares y el círculo

(16 horas)

1 Expectativas de logro

- Reconocen polígonos regulares y el círculo como formas importantes de la construcción de objetos de la vida real
- Construyen polígonos regulares y círculos.
- Reconocen los elementos del círculo.
- Resuelven problemas de la vida cotidiana que implican círculos y circunferencias.

2 Relación y desarrollo

Séptimo grado

Conjunto de puntos
- Puntos rectas y planos
- Rayos y segmentos
- Longitud de un segmento
- Segmentos congruentes
- Distancia entre puntos
- Punto medio de un segmento
- Bisector
- Puntos colineales

Ángulos
- Puntos rectas y planos
- Rayos y segmentos
- Longitud de un segmento
- Segmentos congruentes
- Distancia entre puntos
- Punto medio de un segmento
- Bisectriz
- Perpendicularidad
- Mediatriz

Octavo grado

Paralelismo
- Rectas paralelas y transversales
- Ángulos formados por dos rectas paralelas y una transversal
- Congruencia de ángulos formados por dos rectas paralelas y una transversal
- Demostraciones sobre paralelismo
- Distancia entre rectas paralelas
- Construcción de rectas paralelas

Congruencia de triángulos
- Suma de las medidas de los ángulos de un triángulo
- Suma de las medidas de los ángulos de polígonos
- Congruencia de triángulos
- Triángulos isósceles y rectángulos

Cuadriláteros
- Elementos y clasificación de los cuadriláteros.
- Paralelogramos
- Rectángulos, rombos y cuadrados
- Trapecios

Noveno grado

Semejanza de triángulos
- Figuras semejantes
- Triángulos semejantes
- Criterios de semejanza de triángulos
- Rectas paralelas y proporción
- Aplicación de la semejanza de triángulos

Teorema de Pitágoras
- Teorema de Pitágoras
- Recíproco del Teorema de Pitágoras
- Aplicación del Teorema de Pitágoras

Polígonos regulares y el círculo
- Polígonos regulares
- Medida de ángulos internos de un polígono regular
- Centro de un polígono regular
- Círculos
- Tangente un círculo
- Área del círculo

Sólidos geométricos
- Áreas laterales de sólidos geométricos (cubos, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas)
- Volumen de sólidos geométricos (pirámides, conos, cilindros y esferas)

3 Plan de estudio (16 horas)

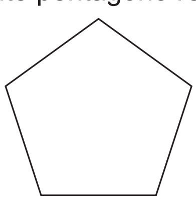
Lección	Distribución de horas	Contenidos
1. Polígonos regulares (7 horas)	1/7	• Polígonos regulares
		• Suma de ángulos internos de un polígono regular
	2~3/7	• Centro de un polígono regular
	4~7/7	• Polígonos regulares inscritos en un círculo
2. Círculos (7 horas)	1~2/7	• Elementos de un círculo
		• Construcción del centro de un círculo
	3~4/7	• Tangente a un círculo
	5/7	• Tangente a un círculo (Demostraciones)
	6~7/7	• Tangente a un círculo (Construcción) y área de un círculo
Ejercicios (2 horas)	1~2/2	

4 Puntos de lección

Análisis de las pruebas diagnósticas 2016 - 2017

Esta unidad se comienza a estudiar en el II Ciclo de Educación Básica y se profundiza en 9no grado, sin embargo los resultados reflejan un desconocimiento por parte de los estudiantes

[Pregunta] ¿Cuánto mide cada ángulo interno del siguiente pentágono regular?



Institutos: 3% CEB: 1% (2017)

La dificultad del contenido de esta unidad no es alta. (Es entendible también para los alumnos del II Ciclo de la Educación Básica). Además, para resolver esta pregunta, no hay mucha necesidad de comprender los contenidos de otras unidades del III Ciclo de la Educación Básica, entonces el problema es que no se les enseña esta unidad.

No es fácil aprender la segunda mitad de esta unidad (especialmente sobre "círculos") porque se necesita aplicar muchos conocimientos y pensar lógicamente, sin embargo, esperamos que al menos puedan comprendan los conocimientos básicos de Geometría que están en la primera mitad de esta unidad.

Lección 1: Polígonos regulares

En 5to grado los estudiantes aprendieron la definición de polígono, polígono regular y sus elementos. En esta lección se estudia como conocimiento nuevo la suma de los ángulos internos de un polígono regular, estableciendo una relación con el número de lados: $180°(n - 2)$

Sin embargo se pretende que los estudiantes no memoricen esta fórmula, ya que es mejor que comprendan de donde surge por lo que se utiliza la estrategia de dividir los polígonos regulares en triángulos usando el trazo de diagonales desde un mismo vértice.

En 6to grado se aprendió como calcular el área de un polígono regular dividiéndola en figuras conocidas como triángulos o trapecios y se dedujo la fórmula expresándola en términos de la medida del lado, la cantidad de lados y la apotema, por lo que en esta lección se hará la deducción de esta fórmula a través del área del triángulo.

Otro aspecto importante que se estudiará en esta lección es la construcción de polígonos inscritos en un círculo los cuales se construyen mediante dos estrategias: dividir en ángulos centrales el círculo ($360^{o} \div n$) donde n es el número de lados del polígono que se desea dibujar usando el transportador y utilizando el compás con procesos establecidos en la clase.

A través de las construcciones se aprovechará la introducción de cómo encontrar la longitud del lado de un polígono regular.

Lección 2: Círculos

En esta lección se hace un recordatorio de definiciones que se estudiaron en 6to grado acerca del círculo, el nuevo concepto es la tangente a un círculo. Se presenta la siguiente definición:

Definición: Una tangente a un círculo es la recta que tiene sólo un punto en común con el círculo.

Y se muestra la propiedad que cumple la tangente con respecto al radio del círculo: una tangente es la recta que es perpendicular a un radio que pasa por el punto común entre la recta y la circunferencia.

En este grado no se hará la demostración de esta propiedad, por lo que se hará una comprobación mediante la construcción de la tangente utilizando regla y compás. A partir de estas construcciones se comprueba de manera intuitiva que dado un círculo y un punto fuera de ella se pueden trazar dos rectas tangentes al círculo que pasen por el punto.

Se demuestran algunas proposiciones sencillas utilizando el concepto de tangencia, con el objeto de inducir al estudiante a construir un razonamiento abstracto, donde la idea es que ellos puedan rellenar con definiciones, proposiciones o teoremas en los espacios que faltan para completar una demostración.

Se deduce la fórmula del área de un círculo a través del área de un círculo inscrito en un polígono regular por lo que es importante que el estudiante pueda visualizar que entre más lados tiene un polígono más se aproxima al perímetro del círculo (circunferencia) por lo que se puede establecer una relación entre dichas figuras.

Área del polígono regular esta dada por:

$$A = \frac{nla}{2}$$

donde n: número de lados, l: longitud de lado y a: apotema.

Se da que el perímetro del círculo es $2\pi r$ y a medida que al polígono se le aumentan lados (ver página 133 del LE) el perímetro del polígono se acerca al perímetro del círculo inscrito. nl se acerca a $2\pi r$ y además la apotema del polígono mide lo mismo que el radio del círculo inscrito, es decir, $a = r$.

Por tanto sustituyendo lo anterior en la fórmula del área de un polígono se tiene que el área del círculo está dada por:

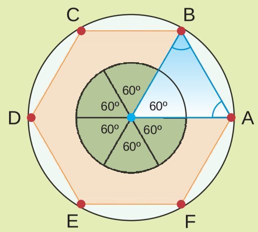
$$A = \frac{nla}{2} = \frac{(2\pi r)r}{2} = \pi r^2$$

Tema: Polígonos regulares y el círculo 1

Ejemplo 1.9 2 **Pág.** 122 3

Construya con compás, regla y transportador un hexágono regular inscrito en un círculo de radio 5 cm.

Solución 4



1) Dibujar el círculo de centro O y radio 5 cm. Dibujar un radio OA.

2) Dibujar un ángulo central a partir del radio OA y marcar el otro punto sobre la circunferencia con B.

Ángulo central: $\frac{360º}{6} = 60º$

3) Repetir el proceso anterior hasta completar los 360º y marcar los extremos de los radios con C, D, E y F.

4) Unir los puntos con segmentos.

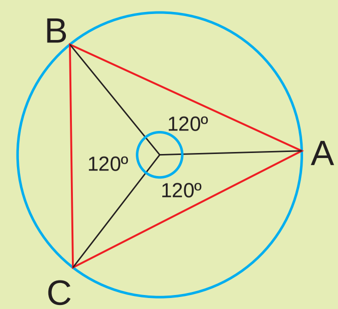
Ejercicio 1.6 2 **Pág.** 122 3

Construya con compás, regla y transportador los siguientes polígonos regulares inscritos en un círculo de radio 4 cm. (Se debe tener en cuenta la medida del ángulo central del polígono regular)

Solución 4

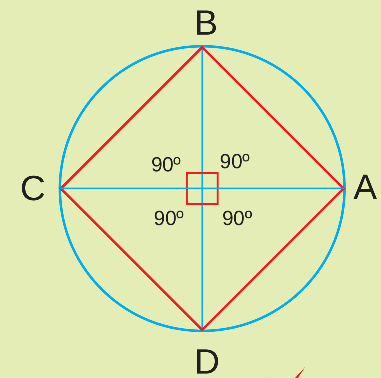
a) Triángulo equilátero

ángulo central $\frac{360º}{3} = 120º$



b) Cuadrado

ángulo central $\frac{360º}{4} = 90º$



1 Al inicio de la clase escribir solo la palabra “**Tema**” y hasta el final de la clase (o en el desarrollo de la misma) escribir el contenido del tema.

2 Escribir el número del *Ejemplo* o *Ejercicio* .

3 Escribir el número de **Pág.** del LE para entender dónde se quedaron con respecto al tiempo.

4 Escribir la **Solución** y **Respuesta**.

5 En el problema planteado marcar los datos importantes para poder llegar a la respuesta.

6 Escribir la conclusión en un rectángulo de color rojo.

Marcar en el *Ejercicio* cuando la solución o la respuesta sean correctas.

Nota: Los puntos aquí explicados no siempre aplican todos en un plan de pizarra.

Indicador de logro

Complete la siguiente tabla

Número de lados	Polígono Regular	Suma de los ángulos internos	Medida de cada ángulo interno
3			
4			
5			

1. Realizar un repaso de conceptos estudiados en 5to grado

⏱ *(7 min)*

¿Qué es un polígono?

* Explicar que es una figura formada por una línea poligonal cerrada.
* Pedirles que identifiquen las figuras que son polígonos.
* Recordar los elementos de un polígono.

2. Completa la tabla del Ejemplo 1.1

⏱ *(4 min)*

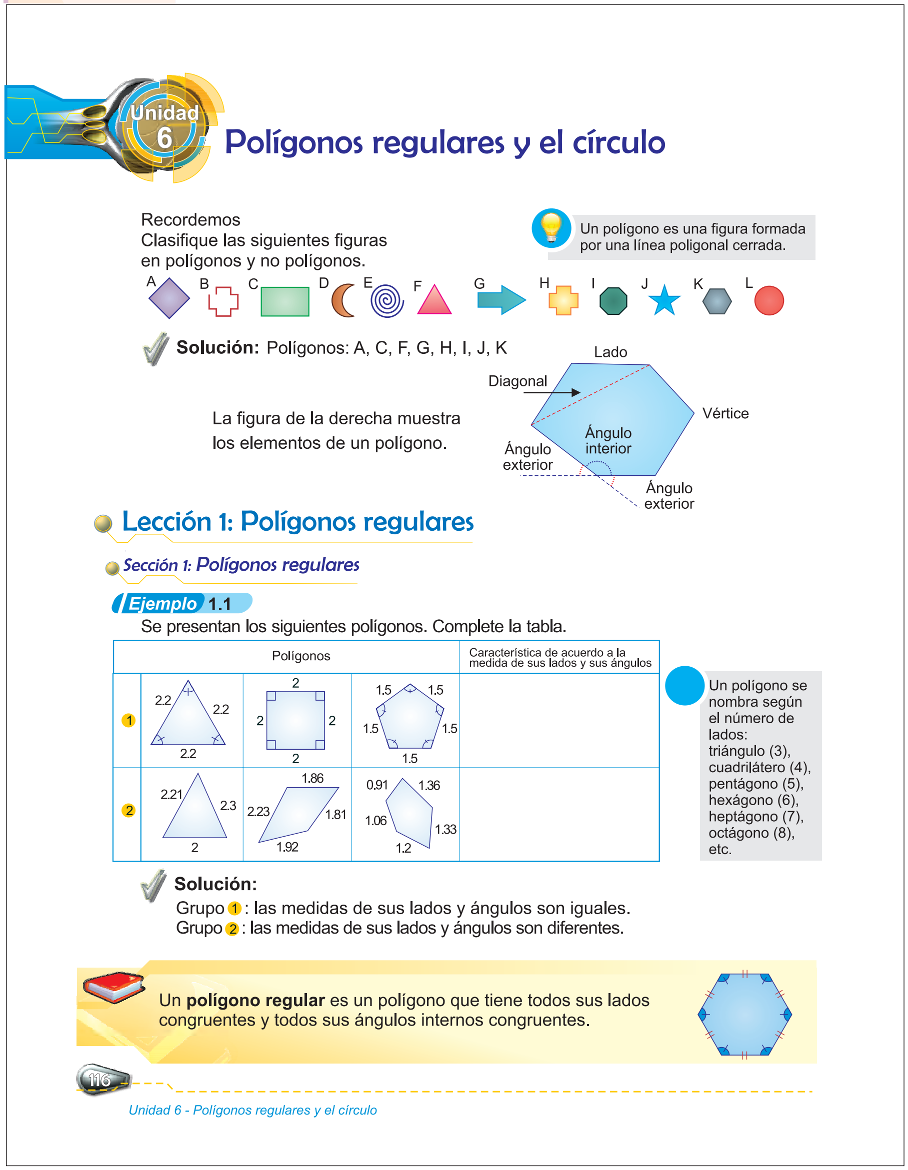
* ¿Que característica en común tienen los polígonos?
* Explicar que los polígonos regulares tienen sus lados y sus ángulos congruentes y los polígonos irregulares no.

Unidad 6: **Polígonos regulares y el círculo**

Lección 1: (1/7) Polígonos regulares

Sección 1: Polígonos regulares

Objetivos:
- Definir un polígono regular.
- Calcular la medida del ángulo interno de un polígono regular.



Unidad 6 Polígonos regulares y el círculo

Recordemos
Clasifique las siguientes figuras en polígonos y no polígonos.

Un polígono es una figura formada por una línea poligonal cerrada.

A B C D E F G H I J K L

Solución: Polígonos: A, C, F, G, H, I, J, K

La figura de la derecha muestra los elementos de un polígono.

Lección 1: Polígonos regulares

Sección 1: Polígonos regulares

Ejemplo 1.1

Se presentan los siguientes polígonos. Complete la tabla.

	Polígonos			Característica de acuerdo a la medida de sus lados y sus ángulos
1	2.2, 2.2, 2.2	2, 2, 2, 2	1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5	
2	2.21, 2.3, 2	1.86, 2.23, 1.81, 1.92	0.91, 1.36, 1.06, 1.33, 1.2	

Un polígono se nombra según el número de lados: triángulo (3), cuadrilátero (4), pentágono (5), hexágono (6), heptágono (7), octágono (8), etc.

Solución:
Grupo 1: las medidas de sus lados y ángulos son iguales.
Grupo 2: las medidas de sus lados y ángulos son diferentes.

Un **polígono regular** es un polígono que tiene todos sus lados congruentes y todos sus ángulos internos congruentes.

116 Unidad 6 - Polígonos regulares y el círculo

continúa en la siguiente página...

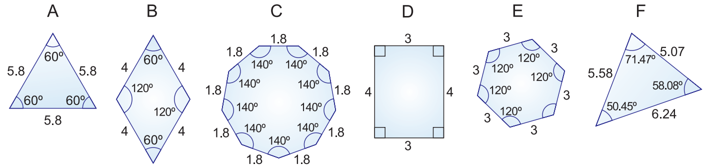
Unidad 6: **Polígonos regulares y el círculo**

Lección 1: (1/7) Polígonos regulares

Sección 1: Polígonos regulares

Objetivos:
- Definir un polígono regular.
- Calcular la medida del ángulo interno de un polígono regular.

Ejercicio 1.1 Diga cuáles de los siguientes polígonos son regulares:



Ejemplo 1.2

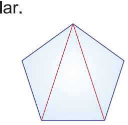
Calcule.

a) La suma de las medidas de los ángulos internos de un pentágono regular.

b) La medida de cada ángulo interno de un pentágono regular.

Solución:

a) Dos diagonales que parten de un mismo vértice dividen un pentágono regular en 3 triángulos



$\left(\text{La suma de las medidas de los ángulos internos del pentágono}\right) = \left(\text{La suma de las medidas de los ángulos internos de los triángulos}\right)$

$= 180° \times 3$

$= 540°$

La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

Respuesta: 540°

b) Como cada ángulo interno mide lo mismo y el pentágono tiene 5 ángulos internos se da que:

$540° \div 5 = 108°$

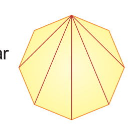
Respuesta: 108°

La suma total de los ángulos internos de un polígono que tiene n lados se calcula con la fórmula $180°(n-2)$.

Ejercicio 1.2 Utilizando la estrategia del **Ejemplo 1.2** calcule.

a) La suma de las medidas de los ángulos internos de un octágono regular

b) La medida de cada ángulo interno de un octágono regular



Ejercicio 1.3 Complete la siguiente tabla:

Número de lados	Polígono regular	Suma de los ángulos internos	Medida de cada ángulo interno
3	△		
4	□		
5	⬠	540°	108°
6	⬡		

6. Resolver Ejercicio 1.3 *(7 min)*

Solución

Número de lados	Polígono Regular	Suma de los ángulos internos	Medida de cada ángulo interno
3	△	180°	60°
4	□	360°	90°
5	⬠	540°	108°
6	⬡	720°	120°

Ejercicios adicionales

Encontrar la medida de los ángulos internos de un polígono de 9, 10, 12, y 20 lados.

Solución

140°,144°,150°,162°.

Indicador de logro

Complete la siguiente tabla

Número de lados	Polígono Regular	Suma de los ángulos internos	Medida de cada ángulo interno
3	△		
4	□		
5	⬠		

3. Resolver Ejercicio 1.1

(5 min)

Solución

A, C y E

4. Encontrar la medida de los ángulos internos de un polígono regular. Ejemplo 1.2

(15 min)

* Calcular la suma de los ángulos internos de un pentágono regular.

* Indicarles que dibujen un pentágono regular y dividirlo en triángulos trazados desde un mismo vértice.

¿Cuántos triángulos se obtuvieron?

* Explicar que la suma de los ángulos internos de un polígono se puede expresar como 180° × 3 = 540° porque se forman tres triángulos y la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

* Calcular la medida de los ángulos internos del pentágono regular.

* Explicar que el pentágono regular tiene 5 ángulos congruentes por lo tanto se puede expresar la medida de cada ángulo 540° ÷ 5 = 108°.

* Observe que la medida de los ángulos internos de un polígono se puede obtener mediante 180° (n - 2).

5. Resolver Ejercicio 1.2

(7 min)

Solución

a) 1080°

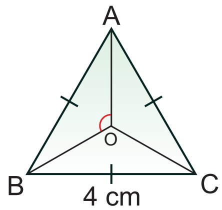
b) 135°

Indicador de logro

1) Utilizando compás y regla, trace un triángulo equilátero de 4 cm de lado y encuentra su centro O

2) Trace el círculo circunscrito al triángulo equilátero.

3) ¿Cuál es la medida del ∠AOB?
a) 30° b) 60° c) 120° d) 180°



1. Definir el centro de un polígono regular.

(7 min)

Sugerencia: presentar la figura elaborada previamente.

* Explicar que un polígono regular tiene un punto llamado centro y que éste equidista de los vértices de dicho polígono.

2. Encontrar el centro de un polígono regular. Ejemplo 1.3

(15 min)

* Construir en la pizarra el centro del polígono siguiendo los pasos indicados.

* Indicar que utilicen regla y compás para trazar un triángulo equilátero.

* Trazar las mediatrices de los lados del triángulo equilátero.

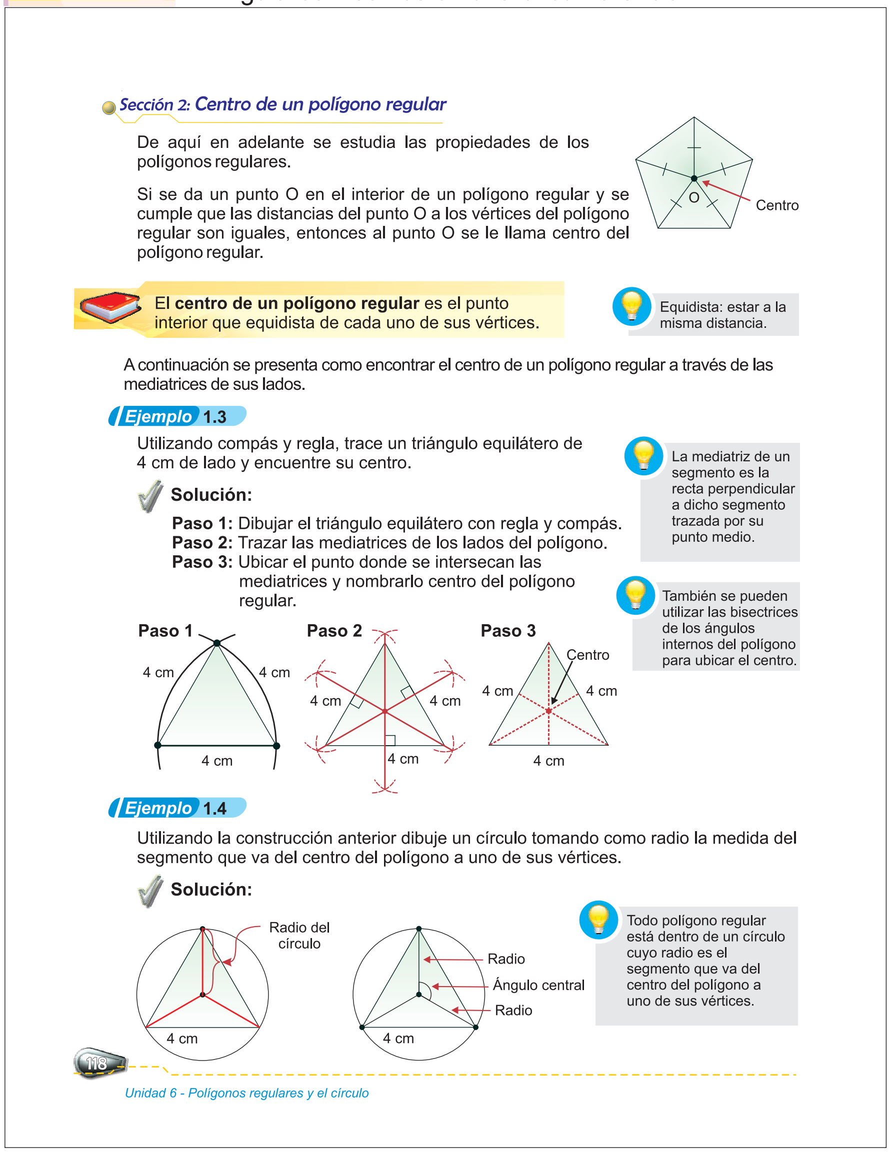
* Notan que las mediatrices coinciden en un punto dentro del polígono.
Explicar que es el centro del polígono y es el punto donde coinciden las mediatrices.

3. Trazar el círculo circunscrito a un triángulo equilátero. Ejemplo 1.4

(5 min)

* Utilizando la construcción anterior indicar que tracen un círculo con centro en O

Unidad 6: Polígonos regulares y el círculo
Lección 1: (2/7) Polígonos regulares
Sección 2: Centro de un polígono regular
Objetivos:
- Indicar que el centro de un polígono regular equidista de sus vértices.
- Definir y trazar un círculo circunscrito a un polígono regular.
- Calcular la medida de ángulos centrales de polígonos regulares inscritos en una circunferencia.


Sección 2: Centro de un polígono regular

De aquí en adelante se estudia las propiedades de los polígonos regulares.

Si se da un punto O en el interior de un polígono regular y se cumple que las distancias del punto O a los vértices del polígono regular son iguales, entonces al punto O se le llama centro del polígono regular.

O
Centro

El **centro de un polígono regular** es el punto interior que equidista de cada uno de sus vértices.

Equidista: estar a la misma distancia.

A continuación se presenta como encontrar el centro de un polígono regular a través de las mediatrices de sus lados.

Ejemplo 1.3

Utilizando compás y regla, trace un triángulo equilátero de 4 cm de lado y encuentre su centro.

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular a dicho segmento trazada por su punto medio.

Solución:

Paso 1: Dibujar el triángulo equilátero con regla y compás.
Paso 2: Trazar las mediatrices de los lados del polígono.
Paso 3: Ubicar el punto donde se intersecan las mediatrices y nombrarlo centro del polígono regular.

También se pueden utilizar las bisectrices de los ángulos internos del polígono para ubicar el centro.

Paso 1 — 4 cm, 4 cm, 4 cm
Paso 2 — 4 cm, 4 cm, 4 cm
Paso 3 — Centro, 4 cm, 4 cm, 4 cm

Ejemplo 1.4

Utilizando la construcción anterior dibuje un círculo tomando como radio la medida del segmento que va del centro del polígono a uno de sus vértices.

Solución:

Radio del círculo
4 cm
Radio
Ángulo central
Radio
4 cm

Todo polígono regular está dentro de un círculo cuyo radio es el segmento que va del centro del polígono a uno de sus vértices.

118
Unidad 6 - Polígonos regulares y el círculo

tomando como radio la distancia que hay del centro al vértice del triángulo.

* Observe que el círculo toca todos los vértices del triángulo.

* Explicar que un círculo circunscrito pasa por todos los vértices de un polígono regular.

continúa en la siguiente página...

Unidad 6: **Polígonos regulares y el círculo**

Lección 1: (2/7) Polígonos regulares

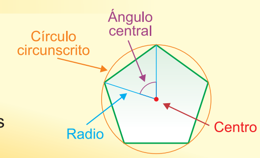
Sección 2: Centro de un polígono regular

Objetivos:

- Indicar que el centro de un polígono regular equidista de sus vértices.
- Definir y trazar un círculo circunscrito a un polígono regular.
- Calcular la medida de ángulos centrales de polígonos regulares inscritos en una circunferencia.

Círculo circunscrito es el círculo que pasa por los vértices de un polígono regular.

Ángulo central de un polígono regular es el ángulo formado por dos radios determinados por dos vértices consecutivos.



Ejemplo 1.5

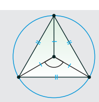
Calcule la medida del ángulo central en la construcción del Ejemplo 1.4 .

Solución:

Como los triángulos que se forman con los radios del círculo y los lados del polígono regular son congruentes por el criterio LLL entonces los ángulos centrales son congruentes entre sí por lo tanto la medida de cada uno de ellos es:

$360° \div 3 = 120°$

El ángulo central de un círculo es 360°.
En un polígono regular los ángulos centrales son congruentes.

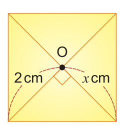


Respuesta: 120°

La medida de cada ángulo central de un polígono regular es $\frac{360°}{n}$, donde n es el número de lados del polígono.

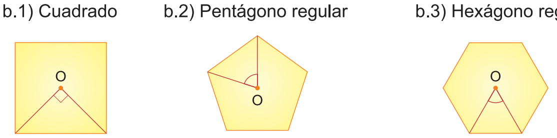
Ejercicio 1.4 Resuelva.

a) En el cuadrado de la derecha, O es el centro, determine el valor de x.



b) Determine la medida de los ángulos centrales de:

b.1) Cuadrado b.2) Pentágono regular b.3) Hexágono regular



4. Calcular la medida del ángulo central de un polígono regular. Ejemplo 1.5

(12 min)

* Indicar que tracen un ángulo cuyo vértice sea el centro del polígono y los lados dos radios determinados por dos vértices consecutivos.

* Concluir que los ángulos que se forman con dos radios determinados por dos vértices consecutivos se le llama ángulo central.

* Explicar que los triángulos que se forman por los radios en un triángulo equilátero son congruentes por el criterio LLL y por lo tanto sus ángulos son congruentes. ¿Cuántos ángulos centrales se forma en el triángulo equilátero? ¿Cómo son los ángulos?

¿Qué relación hay entre el número de lados del polígono y los ángulos?

* Concluir que los ángulos centrales son congruentes y se calculan dividiendo $\frac{360°}{3}$.

* Expresar la fórmula para calcular ángulos centrales de un polígono regular como $\frac{360°}{n}$.

5. Resolver Ejercicio 1.4

(6 min)

Solución

a) $x = 2$

b) b1) 90° b2) 72° b3) 60°

Ejercicios adicionales

a) Utilizando regla y compás trace un triángulo equilátero de 6 cm de lado y encuentre su centro, luego trace un círculo circunscrito.

b) Encuentre la medida del ángulo central en un polígono de 8, 9, 10,12 lados.

Solución

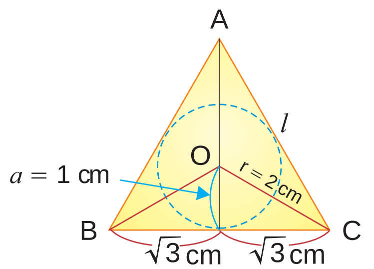
a) se omite solución

b) 45°, 40°,36°, 30°

Indicador de logro

1) Calcule el área del $\triangle BOC$

2) Calcule el área del $\triangle ABC$



1. Trazar un triángulo equilátero y ubicar su centro mediante las mediatrices de sus lados y comprobar que este equidista de sus vértices. Ejemplo 1.6

(10 min)

* Construir un triángulo equilátero con regla y compás.

* Ubicar el centro del triángulo equilátero mediante las mediatrices.
Indicar que con el compás midan la distancia que hay del centro hacia cada uno de los puntos de intersección de las mediatrices.
¿Qué observa?

* Concluir que el punto está a la misma distancia del punto medio de los lados del triángulo.
¿Qué propiedades cumplen las mediatrices?

* Recordar que las mediatrices son perpendiculares al lado

2. Definir que es la apotema.

(7 min)

* Explicar que los segmentos OF, OE y OD son congruentes y perpendiculares a los lados del $\triangle ABC$.

* Concluir que los segmentos OF, OE y OD se les llama apotemas del polígono.

Unidad 6: **Polígonos regulares y el círculo**

Lección 1:* *(3/7) Polígonos regulares

Sección 2: Centro de un polígono regular

Objetivos:
- Indicar que el centro de un polígono regular equidista de sus vértices.
- Definir y trazar un círculo inscrito a un polígono regular.
- Definir el área de un polígono regular en relación a su perímetro y su apotema.

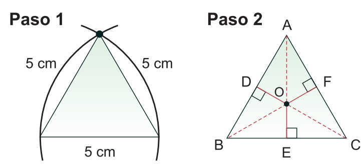
Ejemplo 1.6

Utilizando regla y compás construya un triángulo equilátero de 5 cm de lado y encuentra su centro trazando las mediatrices de sus lados.

Solución:

Paso 1: Construir el triángulo equilátero de lado 5 cm.

Paso 2: Nombrar los vértices con A, B y C, ubicar el centro trazando las mediatrices de sus lados, nombrar los puntos medios de los lados como D, E y F y el centro con O.



$\overline{OE}$, $\overline{OF}$, $\overline{OD}$ son perpendiculares a $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ respectivamente.

Tomando como referencia la construcción anterior utilice el compás para comparar la longitud de los segmentos OE, OF y OD.

A los segmentos OE, OF y OD se les llama **apotemas** y se simboliza con a. Las apotemas son congruentes.
La apotema es el segmento cuyos extremos son el centro del polígono regular y el punto medio de cualquiera de sus lados.

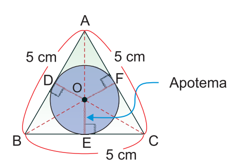
La apotema es perpendicular al lado del polígono regular.

Ejemplo 1.7

En el triángulo construido en el Ejemplo 1.6 dibuje un círculo cuyo radio sea igual a la longitud del segmento OE, tomando el punto O como centro.

Solución:

Con ayuda del compás tomar la medida de la apotema OE y luego trace el círculo.



Círculo inscrito es el círculo en el interior de un polígono regular cuyo radio es la apotema y su centro es el centro del polígono regular.

120 Unidad 6 - Polígonos regulares y el círculo

3. Trazar un círculo inscrito en un triángulo equilátero. Ejemplo 1.7

(6 min)

* Indicar que tracen un círculo en la construcción cuyo radio sea la medida de la apotema del triángulo. ¿Qué observa de la construcción?

* Explicar que el círculo obtenido queda dentro del polígono y que se le conoce como círculo inscrito.
¿Cuál es la característica de un círculo inscrito?

* Explicar que su radio es la apotema del polígono.

continúa en la siguiente página...

Unidad 6: Polígonos regulares y el círculo

Lección 1: (3/7) Polígonos regulares

Sección 2: Centro de un polígono regular

Objetivos:
- Indicar que el centro de un polígono regular equidista de sus vértices.
- Definir y trazar un círculo inscrito a un polígono regular.
- Deducir la fórmula para calcular el área de un polígono regular en relación a su perímetro y su apotema.

Ejemplo 1.8

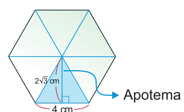
Encuentre el área de un hexágono regular cuyo lado mide 4 cm y la apotema mide $2\sqrt{3}$ cm y deduzca la fórmula para encontrar el área de cualquier polígono regular.

Solución:

Observe que el hexágono regular se divide en 6 triángulos congruentes, por lo tanto tienen la misma área.

El área A de cada triángulo cuya base mide 4 cm y la altura mide $2\sqrt{3}$ cm es:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \times (\textit{base}) \times (\textit{altura}) \\ &= \frac{1}{2} \times (\textit{lado del hexágono}) \times (\textit{apotema}) \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$



La apotema del hexágono es la altura del triángulo.

El área de cada triángulo es $4\sqrt{3}$ cm^2.

Como el hexágono está dividido en 6 triángulos congruentes se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Área del hexágono regular} &= 6 \text{ veces el área del triángulo} \\ &= 6 \times 4\sqrt{3} \\ &= 24\sqrt{3} \end{aligned}$$

Respuesta: $24\sqrt{3}$ cm^2

Un polígono regular de n lados se puede dividir en n triángulos congruentes.

El área A de un polígono regular que tiene n lados está dada por:

$$\begin{aligned} A &= n \text{ veces al área del triángulo congruente} \\ &= n \times \frac{1}{2} \times (\textit{lado del polígono}) \times (\textit{apotema}) \\ &= \frac{nla}{2} \end{aligned}$$

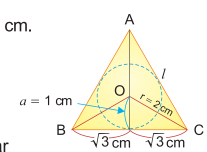
donde l es la longitud del lado del polígono y a es la longitud de la apotema del polígono.

En la fórmula del área note que nl es el perímetro P del polígono regular, por lo tanto el área se puede expresar como $A = \frac{nla}{2} = \frac{Pa}{2}$.

Ejercicio 1.5 Resuelva.

a) Encuentre el área de un hexágono regular cuyo lado mide 2 cm y la apotema mide $\sqrt{3}$ cm.

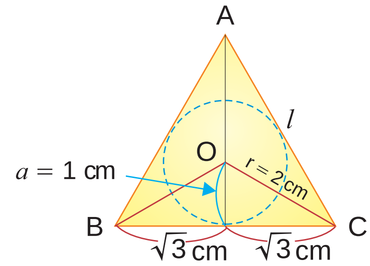
b) En la figura de la derecha encuentre:
b.1) El área del ΔBOC.
b.2) El área del ΔABC.



c) Encuentre el área de un pentágono regular cuyo lado mide 4 cm y la apotema mide 2.8 cm.

Indicador de logro

1) Calcule el área del ΔBOC
2) Calcule el área del ΔABC



4. Deducir el área de un polígono regular en relación a su perímetro y su apotema.

Ejemplo 1.8

(12 min)

- ¿Cuál es la fórmula para encontrar el área de un polígono regular?
- Recordar a los estudiantes que esta fórmula la aprendieron en 6to grado (lado × apotema ÷ 2 × número de lados).
- Dibujar un hexágono regular en la pizarra y dividir en 6 triángulos congruentes.
- Expresar el área del hexágono como la suma de las áreas de los 6 triángulos.
- Deducir que la fórmula del polígono a partir de la expresión obtenida en el **Ejemplo 1.8**
- ¿Qué representa el lado × el número de lados?
- Explicar que la fórmula de área se puede expresar en términos del perímetro y la apotema. $A = \frac{nla}{2}$.

5. Resolver Ejercicio 1.5

(10 min)

Solución

a) $6\sqrt{3}$ cm^2

b1) $\sqrt{3}$ cm^2

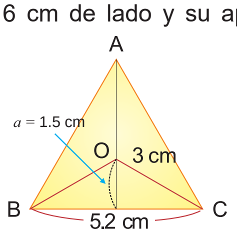
b2) $3\sqrt{3}$ cm^2

c) 28 cm^2

Ejercicios adicionales:

a) Calcula el área de un hexágono regular de 6 cm de lado y su apotema mide $3\sqrt{3}$ cm

b) Calcule el área del ΔABC



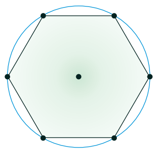
Solución

a) $54\sqrt{3}$ cm^2

b) Área = 11.7 cm^2

Indicador de logro

Inscribe un hexágono regular en un círculo haciendo uso del transportador.

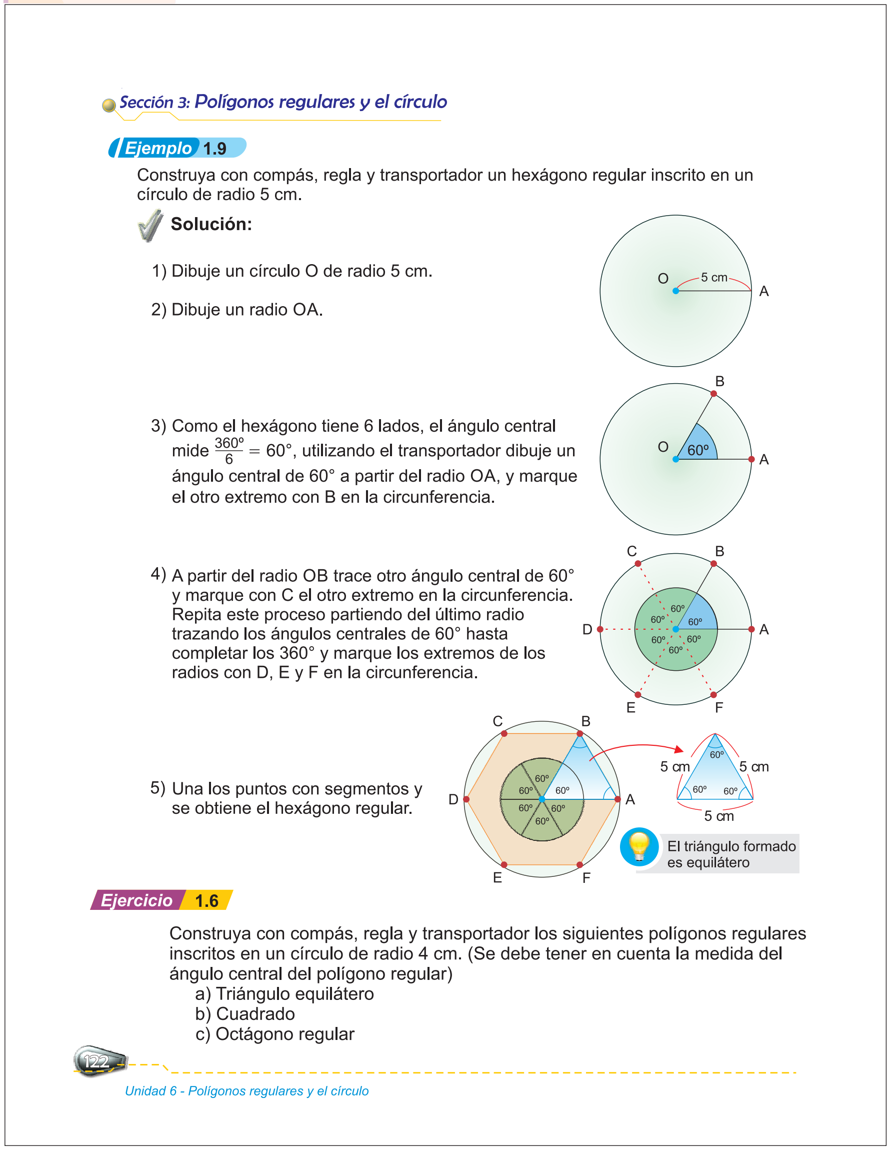


Unidad 6: **Polígonos regulares y el círculo**

Lección 1: (4/7) Polígonos regulares

Sección 3: Polígonos regulares y el círculo

Objetivo: Inscribir un polígono regular en un círculo haciendo uso del transportador.



Sección 3: Polígonos regulares y el círculo

Ejemplo 1.9

Construya con compás, regla y transportador un hexágono regular inscrito en un círculo de radio 5 cm.

Solución:

1) Dibuje un círculo O de radio 5 cm.

2) Dibuje un radio OA.

3) Como el hexágono tiene 6 lados, el ángulo central mide $\frac{360°}{6} = 60°$, utilizando el transportador dibuje un ángulo central de 60° a partir del radio OA, y marque el otro extremo con B en la circunferencia.

4) A partir del radio OB trace otro ángulo central de 60° y marque con C el otro extremo en la circunferencia. Repita este proceso partiendo del último radio trazando los ángulos centrales de 60° hasta completar los 360° y marque los extremos de los radios con D, E y F en la circunferencia.

5) Una los puntos con segmentos y se obtiene el hexágono regular.

Ejercicio 1.6

Construya con compás, regla y transportador los siguientes polígonos regulares inscritos en un círculo de radio 4 cm. (Se debe tener en cuenta la medida del ángulo central del polígono regular)

a) Triángulo equilátero
b) Cuadrado
c) Octágono regular

122 Unidad 6 - Polígonos regulares y el círculo

1. **Dibujar un hexágono regular inscrito en un círculo utilizando transportador.**

   Ejemplo 1.9

   (25 min)

* Indicar que dibujen un círculo de radio 5 cm.

* ¿Qué se debe hacer para construir un hexágono inscrito con ayuda del transportador?

* Pedir que propongan estrategias de como inscribir un hexágono en un círculo.

* Explicar que para trazar el hexágono se debe dividir la circunferencia en 6 partes iguales trazando ángulos de igual medida y cada ángulo mide 60°.

* Unir los puntos con segmentos.

* Hacer notar que se forman 6 triángulos equiláteros dentro del hexágono.

* Considerando el ΔOBA, OB = OA, porque son radios del mismo círculo, podemos decir, que el ΔOBA es isósceles. Entonces

$\angle OBA \cong \angle OAB$.

$m\angle OBA + m\angle OAB + m\angle AOB = 180°$

Como $m\angle AOB = 60°$,

$m\angle OBA + m\angle OAB = 120°$.

$m\angle OBA = m\angle OAB = 60°$.

En el ΔOBA los tres ángulos internos son iguales, entonces el ΔOBA es equilátero.

2. **Resolver** **Ejercicio 1.6**

   (20 min)

   Solución (Página 170)

   Se omite los pasos

Unidad 6: **Polígonos regulares y el círculo**

Lección 1: (5/7) Polígonos regulares

Sección 3: Polígonos regulares y el círculo

Objetivo: Construir con regla y compás polígonos regulares de 6, 4 y 3 lados inscritos en un círculo dado.

Indicador de logro

Construye con regla y compás los siguientes polígonos regulares inscritos en un círculo de 4cm de diámetro:

a) Triángulo equilátero

b) Cuadrado

c) Hexágono regular.

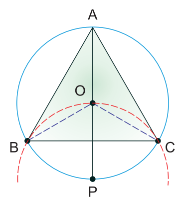
Ejemplo 1.10

Construya con regla y compás los siguientes polígonos regulares inscritos en un círculo de 4 cm de radio: (No usar transportador)

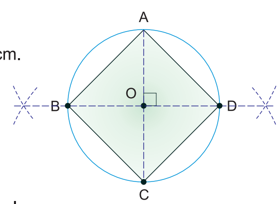
a) Triángulo equilátero b) Cuadrado c) Hexágono regular

Solución:

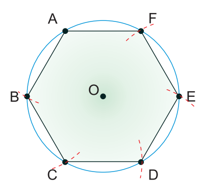
a) Para trazar un triángulo equilátero inscrito en un círculo realizamos los siguientes pasos:
1) Ubicar el centro O y trazar el círculo de radio 4 cm.
2) Trazar un diámetro, marcar los extremos del diámetro como A y P.
3) Trazar un arco con centro en P y el mismo radio del círculo dado y marcar los puntos que intersecan la circunferencia con B y C respectivamente.
4) Unir los puntos A, B y C.



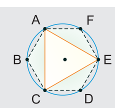
b) Para trazar un cuadrado inscrito en un círculo hacemos los siguientes pasos:
1) Ubicar el centro O y trazar el círculo de radio 4 cm.
2) Trazar un diámetro $\overline{AC}$.
3) Trazar la mediatriz del $\overline{AC}$.
4) Marcar los puntos que intersecan la circunferencia con B y D respectivamente.
5) Trazar los segmentos AB, BC, CD y DA.



c) Para trazar un hexágono regular inscrito en un círculo realizamos los siguientes pasos:
1) Ubicar el centro O y trazar el círculo de radio 4 cm.
2) Dividir la circunferencia utilizando el compás con una abertura igual al radio del círculo de la siguiente manera:
Colocar un punto en la circunferencia y nombrarlo A.
Trace un arco a partir de A, nombre con B la intersección de la circunferencia con el arco.
Repita el proceso hasta completar la circunferencia y nombre los puntos con C, D, E y F.
3) Una los extremos trazando los segmentos AB, BC, CD, DE, EF y FA.



El triángulo equilátero se puede trazar utilizando la construcción del hexágono regular, uniendo los vértices A, C y E.



Ejercicio 1.7 Construya las siguientes figuras con regla y compás inscritas en un círculo de radio 5 cm:

a) Triángulo equilátero b) Cuadrado c) Hexágono regular

123

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

1. **Construir con regla y compás un triángulo equilátero inscrito en un círculo.** Ejemplo 1.10

   (10 min)

* ¿Cómo se puede trazar un triángulo equilátero con regla y compás?

* Indicar que tracen un círculo de 4 cm de radio y ubicar el centro.
Indicar que tracen un diámetro y luego que tracen un arco con el mismo radio del círculo O con centro en P.

* La intersección del arco con el círculo le dará dos puntos B y C que son vértices del triángulo.
Al unir los puntos A, B y C se forma el triángulo equilátero.

2. **Construir con regla y compás un cuadrado inscrito en un círculo.**

   (10 min)

* Trace un círculo y construya un cuadrado inscrito en el círculo. ¿Qué se debe hacer para trazar el cuadrado inscrito en el círculo?

* Explicar que para trazar el cuadrado se trazan dos diámetros que sean perpendiculares entre sí y luego se unen sus extremos.

* Recordar que para trazar los diámetros perpendiculares deben hacer uso de mediatriz de un segmento.

3. **Construir con regla y compás un hexágono regular inscrito en un círculo.**

   (10 min)

* Trace un círculo y construya un hexágono inscrito en el círculo.
¿Qué se debe hacer para trazar el hexágono inscrito en el círculo?

* Explicar que en el caso del hexágono el radio del círculo mide lo mismo que el lado del hexágono.

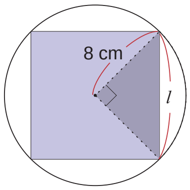
* Pedir que dividan el círculo en 6 partes iguales utilizado el compás con una abertura igual al radio y luego unir los puntos y resultara un hexágono regular.

4. **Resolver** Ejercicio 1.7 *(15 min)*

   Los pasos son los mismo que los del Ejemplo 1.10 .

Indicador de logro

Encuentre la longitud del lado del cuadrado en la figura.



1. **Calcular la longitud del lado de un hexágono regular.** *Ejemplo* **1.11**
   (10 min)
- Preparar las figuras con anticipación.

* Analizar la longitud del lado del hexágono en relación al radio del círculo.

* ¿Cuál es la longitud del lado del hexágono?

* Explicar que es la misma que la del radio, porque se utiliza la misma abertura con el compás, por tanto $s = r$

2. **Resolver** *Ejercicio* **1.8**
   (10 min)
   Solución
   a) l = 6 cm b) 9 cm

3. **Calcular la longitud del lado de un cuadrado inscrito en un círculo.** *Ejemplo* **1.12**
   (12 min)

* Pedir que se observe la construcción del cuadrado inscrito en un círculo de la clase anterior.
¿Hay algún tipo de triángulo?
¿Qué tipo de triangulo es?

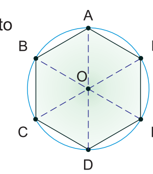
* Concluir que se forman cuatro triángulos rectángulos isósceles, a la vez que observen que el lado del cuadrado es la hipotenusa de los triángulos.
¿Qué se puede aplicar para encontrar la medida de sus lados?

* Explicar que se aplica el teorema de Pitágoras.

Unidad 6:	**Polígonos regulares y el círculo**
Lección 1: (6/7)	Polígonos regulares
Sección 3:	Polígonos regulares y el círculo
Objetivo:	Calcular la longitud de los lados de un polígono regular de 6, 4 y 3 lados.

Ejemplo **1.11**

Encuentre la longitud del lado de un hexágono regular inscrito en un círculo de 2 cm de radio.



Solución:
De la construcción del hexágono regular se sabe que $\overline{AB} \cong \overline{OA}$, es decir, que el radio tiene la misma longitud que el lado del hexágono regular inscrito en el círculo, por tanto:
AB = BC = CD = DE = EF = FA = 2 cm

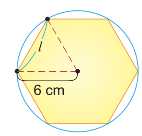
Respuesta: 2 cm

El lado l de un hexágono regular inscrito en un círculo de radio r es igual al radio ($l = r$).

Ejercicio **1.8** Resuelva.

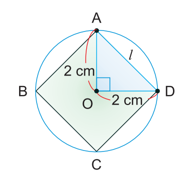
a) Encuentre la longitud del lado del hexágono regular de la derecha.

b) Un hexágono regular está inscrito en un círculo cuyo radio es 9 cm. Encuentre la longitud del lado del hexágono regular.



Ejemplo **1.12**

Encuentre la longitud del lado de un cuadrado inscrito en un círculo de 2 cm de radio.



Solución:
Para calcular la longitud del lado del cuadrado se usará el teorema de Pitágoras ya que el ΔAOD es isósceles rectángulo por lo tanto:

$2^2 + 2^2 = l^2$ ... l es la hipotenusa del ΔAOD

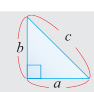
$l^2 = 8$, como $l > 0$

$l = \sqrt{8}$

$= 2\sqrt{2}$

Respuesta: $2\sqrt{2}$ cm

Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$



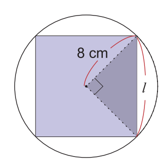
(solo para triángulos rectángulos)

El lado l de un cuadrado inscrito en un círculo de radio r está dado por $l = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}\,r$

Ejercicio **1.9** Resuelva.

a) Encuentre la longitud del lado del cuadrado en la figura de la derecha.

b) Encuentre la longitud del lado de un cuadrado inscrito en un círculo de radio 3 cm.



124 Unidad 6 - Polígonos regulares y el círculo

* Indicar que apliquen el teorema de Pitágoras y calculen la longitud del lado del cuadrado.

* Al aplicar la fórmula es importante identificar los catetos y la hipotenusa.

4. **Resolver** *Ejercicio* **1.9**
   (13 min)
   Solución
   a) $8\sqrt{2}$ cm b) $3\sqrt{2}$ cm

Unidad 6: **Polígonos regulares y el círculo**

Lección 1: (7/7) Polígonos regulares

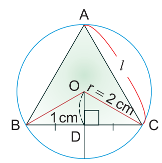
Sección 3: Polígonos regulares y el círculo

Objetivo: Calcular la longitud de los lados de un polígono regular de 6, 4 y 3 lados.

Ejemplo 1.13

En la figura los triángulos ODC y ODB son rectángulos y $\Delta ODC \cong \Delta ODB$, el ΔABC es equilátero, OD = 1 cm encuentre:

a) La longitud del lado DC
b) La longitud del lado del ΔABC



Solución:

a) Para calcular la longitud DC en el ΔODC se aplica el teorema de Pitágoras

$DC^2 + 1^2 = 2^2$

$DC^2 + 1 = 4$

$DC^2 = 3$, como $DC > 0$

$DC = \sqrt{3}$

Respuesta: $\sqrt{3}$ cm

b) Como los triángulos ODC y ODB son congruentes entonces se tiene que $\overline{BD} \cong \overline{CD}$, por lo tanto

$BC = BD + DC$

$= \sqrt{3} + \sqrt{3}$

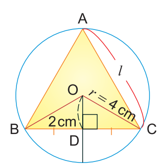
$= 2\sqrt{3}$

Respuesta: $2\sqrt{3}$ cm

Ejercicio 1.10 Resuelva.

a) En la figura de la derecha el ΔABC es equilátero, OC = 4 cm y OD = 2 cm. Encuentre la longitud del segmento DC y la longitud del lado del ΔABC.

b) Utilizado la figura del inciso a) encuentre OD si $r = 6$ cm y $l = 6\sqrt{3}$ cm.



Ejemplo 1.14 Encuentre el área del triángulo ABC del **Ejemplo 1.13**.

Solución:

Para encontrar el área del triángulo ABC se pueden utilizar tres formas:

a) Utilizando la fórmula del área de un polígono regular. Dado que el triángulo ABC es equilátero se tiene:

$A = \frac{nla}{2}$

$= \frac{(3)(2\sqrt{3})(1)}{2}$

$= 3\sqrt{3}$

b) Considerar que el ΔABC lo forman 3 triángulos congruentes: ΔABO, ΔBCO y ΔACO que tienen la misma área

Área ΔABC = 3 (área ΔBCO)

$= 3\left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1\right)$

$= 3(\sqrt{3})$

$= 3\sqrt{3}$

c) En el ΔABC la medida de su altura es 3 cm ya que el radio del círculo es 2 cm y la apotema del triángulo es 1 cm. Aplicando la fórmula del área de un triángulo se tiene:

Área $\Delta ABC = \frac{1}{2}(base)(altura)$

$= \frac{1}{2}(2\sqrt{3})(3)$

$= 3\sqrt{3}$

Respuesta: $3\sqrt{3}$ cm²

Ejercicio 1.11 Encuentre el área del triángulo ABC del **Ejercicio 1.10** inciso a). 125

Libro del Estudiante - Matemáticas 9° grado

4. Resolver Ejercicio 1.11 (5 min)

Solución $A = 3\left(\frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 2\right) = 12\sqrt{3}$ cm²

Ejercicios adicionales:

a) Calcule la longitud del lado de un cuadrado inscrito en un círculo de radio 3 cm

b) Calcule la longitud del lado de un hexágono inscrito en un círculo de radio 5 cm

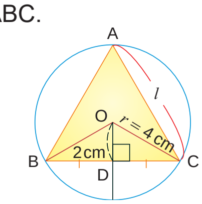
c) Calcule la longitud del radio del círculo si se tiene un cuadrado inscrito de lado 6 cm

d) En la figura el **Ejercicio 1.10** a) calcule r si OD = 5 cm, y $l = 10\sqrt{3}$ cm

Solución a) $3\sqrt{2}$ cm, b) 5 cm, c) $3\sqrt{2}$ cm d) r = 10 cm

Indicador de logro

En la siguiente figura el ΔABC es equilátero, OC = 4 cm y OD = 2 cm. Encuentre la longitud del segmento DC y la longitud del lado del ΔABC.



1. Calcular el lado de un triángulo equilátero.

Ejemplo 1.13

(15 min)

* Indicar que observen la figura del **Ejemplo 1.13** y que la dibujen utilizando regla y compás. ¿Qué datos se tienen?
¿Qué proceso se puede hacer para calcular la longitud DC a partir de lo que se tiene?

* Explicar que se aplica el teorema de Pitágoras utilizando ΔODC.

* Es importante que el estudiante identifique que se está pidiendo un cateto del triángulo rectángulo.

* Indicar que partiendo del resultado encontrado calculen el lado del triángulo equilátero sabiendo que l = BD + DC.

2. Resolver Ejercicio 1.10

(10 min)

Solución

a) DC = $2\sqrt{3}$ cm, $l = 4\sqrt{3}$ cm
b) OD = 3 cm

3. Encontrar el área de un triángulo equilátero.

Ejemplo 1.14

(15 min)

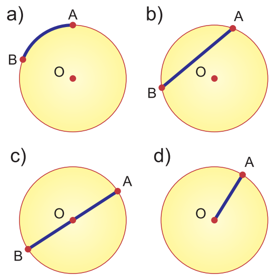
* Indicar que piensen las diferentes formas en que se puede encontrar el área del triángulo.

* Observar las formas presentadas en LE.

Indicador de logro

Indica en las siguientes figuras

a) una cuerda b) un diámetro
c) un arco d) un radio



1. Definir una circunferencia y un círculo.

(10 min)

* Leer el resumen dado en el LE sobre la circunferencia y el círculo.
* Concluir en la manera de nombrar un círculo.

2. Identificar los elementos de un círculo.

(15 min)

* Los estudiantes conocen los elementos del círculo ya que se estudiaron en 5to grado, sin embargo se introduce los términos nuevos en cuanto a los tipos de arcos.
* Indicar que tracen un círculo y dibujen sus elementos.
* Definir cada elemento del círculo planteado en el LE

3. Clasificar los arcos según su longitud.

(10 min)

* Presentar tres dibujos indicando tres arcos. ¿Cuál es la diferencia entre estos arcos?
* Indicar que comparen la longitud y explicar que depende de la longitud del arco para determinar el tipo.
* Concluir con el resumen del LE.

4. Definir una cuerda del círculo. *(5 min)*

* Indicar que tracen en el círculo dibujado al inicio de la clase un segmento que toque dos puntos de la circunferencia.

Unidad 6: **Polígonos regulares y el círculo**

Lección 2: (1/7) Círculos

Sección 1: Círculos

Objetivo: Identificar los elementos de un círculo.

Lección 2: Círculos

Sección 1: Círculos

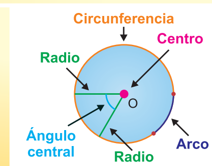
¿Cuál es la diferencia entre círculo y circunferencia?

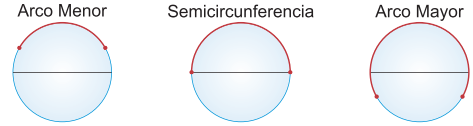
La **circunferencia** es el conjunto de puntos en un plano que están a la misma distancia de un punto llamado centro.
Un **círculo** es la unión de la circunferencia y su interior.

Un círculo se nombra normalmente por su centro, es decir, si el centro de un círculo es el punto O, se le llama "círculo O".

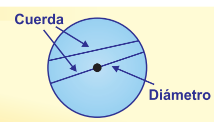
Aprenderemos los elementos del círculo.

Un **radio** de un círculo es el segmento que une el centro con algún punto de la circunferencia.
Un **ángulo central** de un círculo es el ángulo formado por dos radios.
Un **arco** de un círculo es una parte continua de la circunferencia.

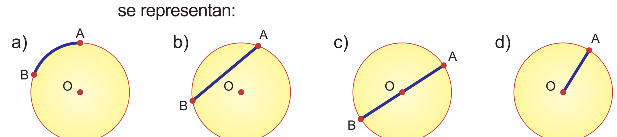




Una **cuerda** de un círculo es el segmento que une dos puntos de la circunferencia. A la cuerda que pasa por el centro del círculo se le llama **diámetro**.



Ejercicio 2.1 Identifica en las siguientes figuras que elementos del círculo se representan:



* Explicar que a ese segmento se le llama cuerda.
* Pedir a los estudiantes que tracen una cuerda que pase por el centro.
* Explicar que se llama diámetro y es la cuerda de mayor longitud.

5. Resolver Ejercicio 2.1

(5 min)

Solución

a) arco menor b) cuerda c) diámetro d) radio

Unidad 6: Polígonos regulares y el círculo

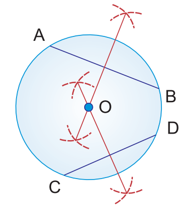
Lección 2: (2/7) Círculos

Sección 1: Círculos

Objetivo: Construir con regla y compás el centro de un círculo.

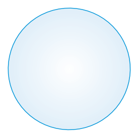
Indicador de logro

Construye con regla y compás el centro de un círculo.

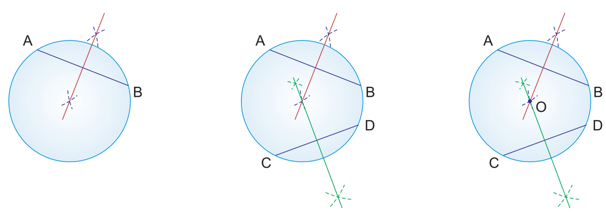


Ejemplo **2.1**

Construya con regla y compás el centro de un círculo.



Solución:

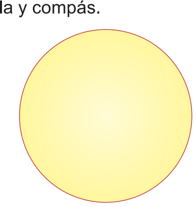


1. Tomar dos puntos A y B en la circunferencia, trazar la cuerda AB y su mediatriz.
2. Tomar dos puntos C y D en la circunferencia y trazar la cuerda CD que no sea paralela a la cuerda AB. Trazar la mediatriz de la cuerda.
3. El punto O que es la intersección de las dos mediatrices es el centro del círculo.

El punto de intersección de las mediatrices de dos o más cuerdas es el centro del círculo.

Ejercicio **2.2**

Utilice un objeto que tenga forma circular (puede ser tapón de jugo, termo, no muy grande, ni muy pequeño) y dibuje la circunferencia en su cuaderno, luego construya su centro con regla y compás.



127

Libro del Estudiante - Matemáticas 9° grado

2. Resolver *Ejercicio* **2.2**

(15 min)

Solución

Se omite la solución ya que esta dependerá del objeto que el estudiante utilice.
Se debe verificar que siga correctamente los pasos indicados en el LE.

1. Construir el centro del círculo. *Ejemplo* **2.1**

(30 min)

* Se recomienda dar un dibujo de un círculo sin el centro para que los estudiantes tengan el mismo dibujo, o se puede llevar un objeto (tapaderas) para que los estudiantes lo dibujen sin usar compás.
¿Cómo se puede encontrar el centro del círculo?

* Explicar la estrategia planteada en el LE.

* Indicar que tracen una cuerda cualquiera y su mediatriz. Es posible que algunos estudiantes no recuerden como se traza la mediatriz de un segmento, por lo que se debe recordar.

* ¿Se encuentra el centro del círculo en la mediatriz?

* Explicar que si pero no hay seguridad donde.

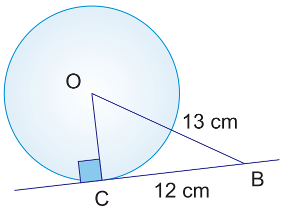
* Indicar que repitan el procedimiento anterior, es decir, que tracen otra cuerda y su mediatriz. ¿Qué observan?

* Concluir que las mediatrices se intersecan en un punto y que ese punto es el centro del círculo.

* Concluir que el centro de un círculo es la intersección de las mediatrices de dos o más cuerdas del círculo.

Indicador de logro

¿Cuál es la medida del radio del círculo O si OB = 13 cm y CB = 12 cm? La recta CB es tangente al círculo O en C.



1. Definir la tangente a un círculo.

(6 min)

* Presentar en la pizarra un dibujo indicando un círculo con una tangente.
* ¿Qué observan?
* Discutir las participaciones de los estudiantes y concluir que la recta es tangente a un círculo si toca la circunferencia en un solo punto.
* Explicar que en una circunferencia se pueden trazar infinitas rectas tangentes.

2. Explicar la propiedad de la recta tangente con respecto al radio del círculo.

(6 min)

* Presentar la figura de un círculo y su recta tangente perpendicular al radio.
* Hacer preguntas sobre lo que observaron.
* Concluir que si se traza una recta tangente al círculo cuyo punto de tangencia es el extremo del radio en la circunferencia, entonces esta será perpendicular al radio.

3. Explicar las afirmaciones que surgen de la propiedad anterior.

(10 min)

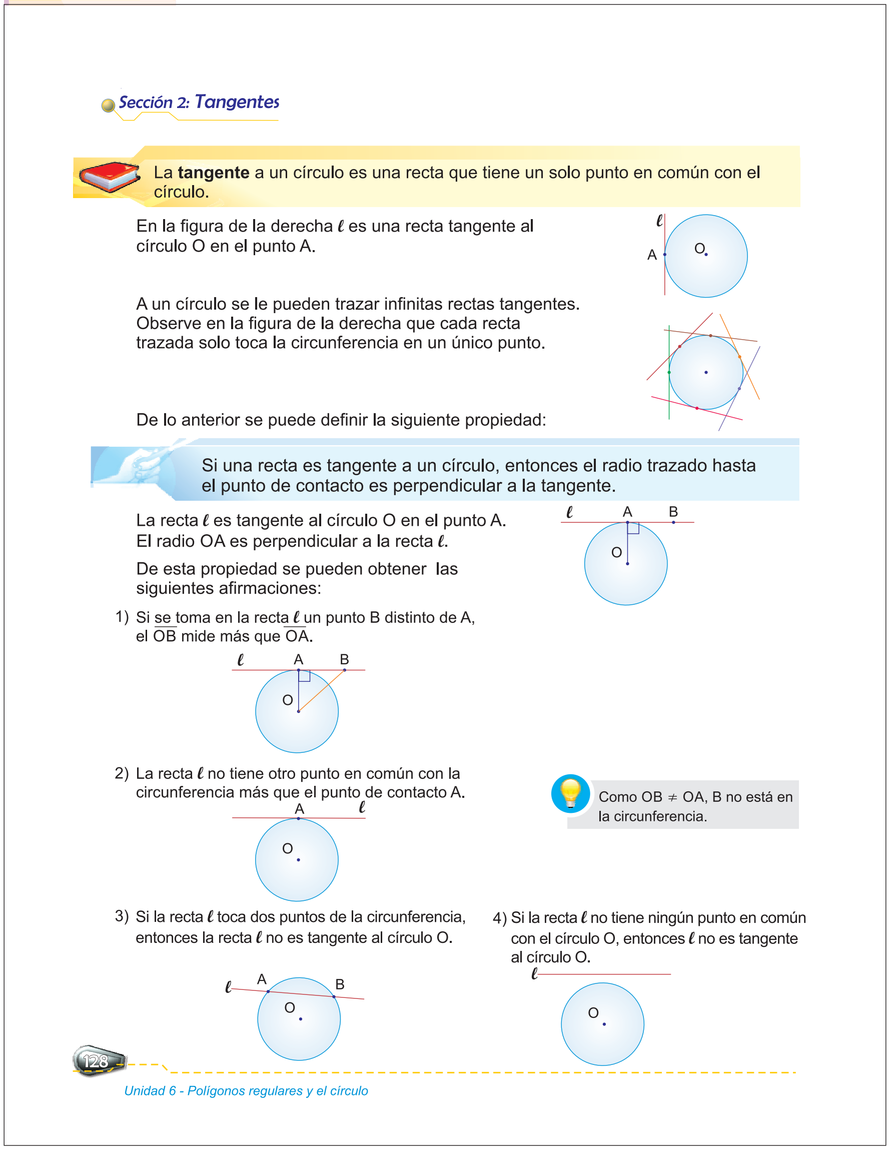
* Demostrar de manera intuitiva que cualquier segmento (excepto el radio) que se trace del centro a la recta tangente de un círculo será mayor que el radio. (afirmación 1)

Unidad 6: **Polígonos regulares y el círculo**

Lección 2: Círculos
(3/7)

Sección 2: Tangentes

Objetivos:
- Indicar que la tangente a un círculo toca a este en un único punto.
- Indicar que el radio definido por el punto de tangencia es perpendicular a la tangente.


Sección 2: Tangentes

La **tangente** a un círculo es una recta que tiene un solo punto en común con el círculo.

En la figura de la derecha ℓ es una recta tangente al círculo O en el punto A.

A un círculo se le pueden trazar infinitas rectas tangentes. Observe en la figura de la derecha que cada recta trazada solo toca la circunferencia en un único punto.

De lo anterior se puede definir la siguiente propiedad:

Si una recta es tangente a un círculo, entonces el radio trazado hasta el punto de contacto es perpendicular a la tangente.

La recta ℓ es tangente al círculo O en el punto A. El radio OA es perpendicular a la recta ℓ.

De esta propiedad se pueden obtener las siguientes afirmaciones:

1) Si se toma en la recta ℓ un punto B distinto de A, el $\overline{OB}$ mide más que $\overline{OA}$.

2) La recta ℓ no tiene otro punto en común con la circunferencia más que el punto de contacto A.

Como OB ≠ OA, B no está en la circunferencia.

3) Si la recta ℓ toca dos puntos de la circunferencia, entonces la recta ℓ no es tangente al círculo O.

4) Si la recta ℓ no tiene ningún punto en común con el círculo O, entonces ℓ no es tangente al círculo O.

128
Unidad 6 - Polígonos regulares y el círculo

* Explicar mediante el teorema de Pitágoras que al formar un triángulo rectángulo, el radio es un cateto y el segmento trazado a otro punto de la recta es la hipotenusa y la longitud de esta será siempre mayor a la longitud de sus catetos.
* Mediante la afirmación 2, 3 y 4 explicar cuando una recta no es tangente a una circunferencia.

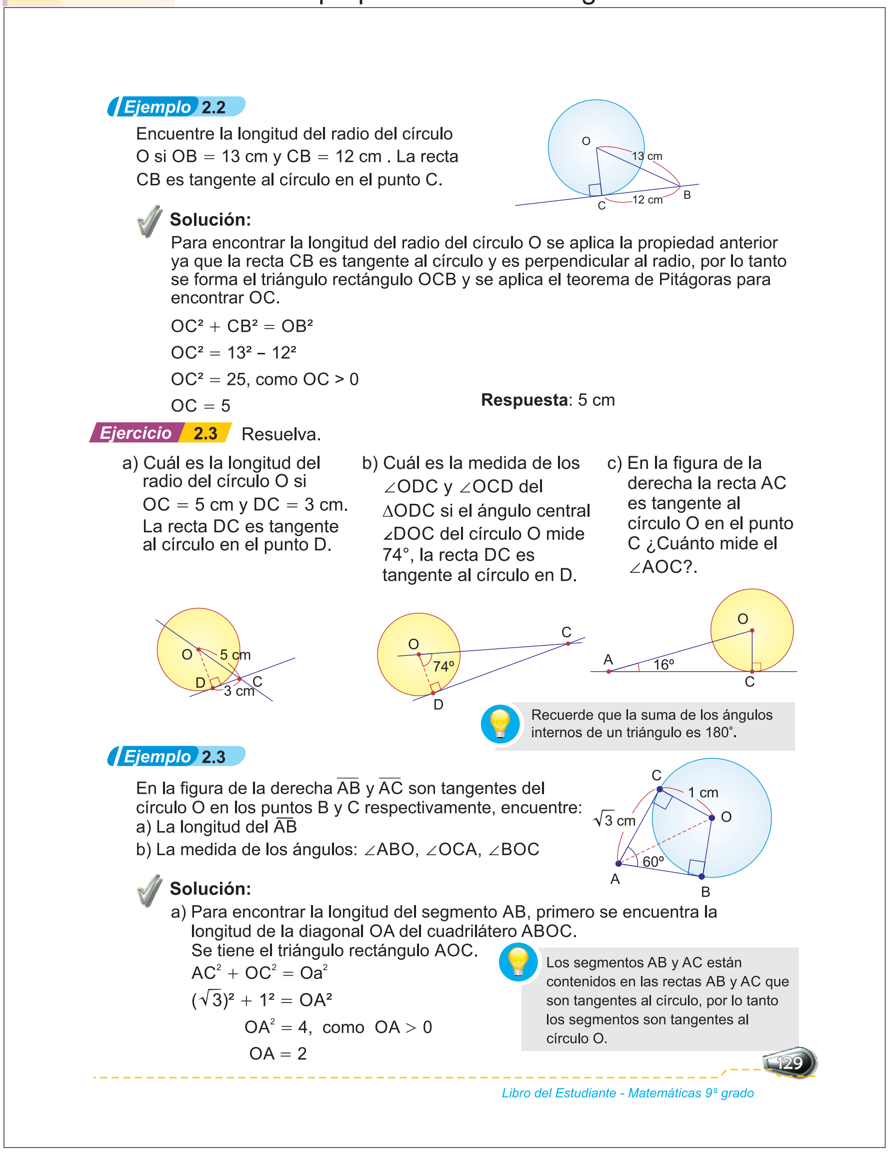
continúa en la siguiente página...

Unidad 6: **Polígonos regulares y el círculo**

Lección 2: (3/7) Círculos

Sección 2: Tangentes

Objetivos:
- Indicar que la tangente a un círculo toca a este en un único punto.
- Indicar que el radio definido por el punto de tangencia es perpendicular a la tangente.



Ejemplo 2.2

Encuentre la longitud del radio del círculo O si OB = 13 cm y CB = 12 cm . La recta CB es tangente al círculo en el punto C.

Solución:
Para encontrar la longitud del radio del círculo O se aplica la propiedad anterior ya que la recta CB es tangente al círculo y es perpendicular al radio, por lo tanto se forma el triángulo rectángulo OCB y se aplica el teorema de Pitágoras para encontrar OC.

$OC^2 + CB^2 = OB^2$

$OC^2 = 13^2 - 12^2$

$OC^2 = 25$, como $OC > 0$

$OC = 5$

Respuesta: 5 cm

Ejercicio 2.3 Resuelva.

a) Cuál es la longitud del radio del círculo O si OC = 5 cm y DC = 3 cm. La recta DC es tangente al círculo en el punto D.

b) Cuál es la medida de los $\angle ODC$ y $\angle OCD$ del ΔODC si el ángulo central $\angle DOC$ del círculo O mide 74°, la recta DC es tangente al círculo en D.

c) En la figura de la derecha la recta AC es tangente al círculo O en el punto C ¿Cuánto mide el $\angle AOC$?.

Recuerde que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

Ejemplo 2.3

En la figura de la derecha $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son tangentes del círculo O en los puntos B y C respectivamente, encuentre:
a) La longitud del $\overline{AB}$
b) La medida de los ángulos: $\angle ABO$, $\angle OCA$, $\angle BOC$

Solución:
a) Para encontrar la longitud del segmento AB, primero se encuentra la longitud de la diagonal OA del cuadrilátero ABOC.
Se tiene el triángulo rectángulo AOC.
$AC^2 + OC^2 = Oa^2$
$(\sqrt{3})^2 + 1^2 = OA^2$
$OA^2 = 4$, como $OA > 0$
$OA = 2$

Los segmentos AB y AC están contenidos en las rectas AB y AC que son tangentes al círculo, por lo tanto los segmentos son tangentes al círculo O.

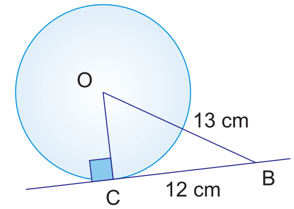
129

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

1. **Aplicar la propiedad de la tangente a un círculo.** Ejemplo 2.3
   (25 min)
   * Dada la figura del Ejemplo 2.3 indicar a los estudiantes que observen y que extraigan los datos.
   * ¿Qué se puede concluir de que las rectas AB y AC son tangentes al círculo O en B y C respectivamente?

Indicador de logro

¿Cuál es la medida del radio del círculo O si OB = 13 cm y CB = 12 cm? La recta CB es tangente al círculo O en C.



4. **Aplicar la propiedad de la tangente a un círculo.** Ejemplo 2.2
   (10 min)
   * Dada la figura del Ejemplo 2.2 pedir que la observen.
     ¿Cómo podemos encontrar el radio del círculo O?
   * Hacer que se den cuenta que la recta CB es tangente al círculo y que por lo tanto es perpendicular al radio OC.
     ¿Qué tipo de triángulo se forma?
   * Concluir que el triángulo OCB es rectángulo.
     ¿Qué se puede aplicar para encontrar la medida del radio?
   * Concluir que se aplica el teorema de Pitágoras.
   * Indicar que encuentren la medida del radio aplicando el Teorema de Pitágoras.

5. **Resolver** Ejercicio 2.3
   (13 min)
   Solución
   a) 4 cm
   b) $m\angle ODC = 90°$
   $m\angle OCD = 16°$
   c) $m\angle AOC = 74°$

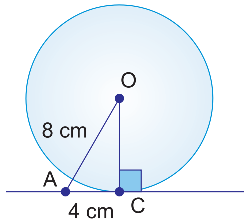
[Hasta aquí Clase 3]

[Desde aquí Clase 4]

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

La recta AC es tangente al círculo O en el punto C; AO = 8cm, AC = 4cm ¿Cuál es la longitud de $\overline{OC}$?



* Concluir que el radio OC y OB del círculo O es perpendicular al segmento AC y AB respectivamente.
* Indicar que se pueden trazar triángulos rectángulos al dibujar la diagonal OA del cuadrilátero y de esa manera aplicar el teorema de Pitágoras para encontrar las longitudes de los lados del triángulo OA y luego AB.
* Indicar que encuentren la medida de los ángulos del cuadrilátero ABOC.
¿Cómo se pueden encontrar las medidas de los ángulos del cuadrilátero ABOC?
* Concluir que la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360° y como los segmentos AB y AC son tangentes entonces

$m\angle ABO = 90°$; $m\angle OCA = 90°$;
$m\angle CAB = 60°$
$m\angle BOC = 360° - 90° - 90° - 60°$
$= 120°$.

2. Resolver Ejercicio 2.4

(20 min)

Solución

a) $4\sqrt{3}$ cm

b) $m\angle OCA = 90°$, $m\angle OBA = 90°$, $m\angle BAC = 88°$

Unidad 6: Polígonos regulares y el círculo

Lección 2: (4/7) Círculos

Sección 2: Tangentes

Objetivos: Aplicar la propiedad de la tangente de un círculo en la resolución de ejercicios.

Como OA = 2 cm y OB = 1 cm por ser radio del círculo O se tiene:

$AB^2 + OB^2 = OA^2$
$AB^2 + 1^2 = 2^2$
$AB^2 = 3$, como $AB > 0$
$AB = \sqrt{3}$

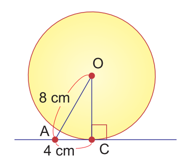
Respuesta: $\sqrt{3}$ cm

b) Como ABOC es un cuadrilátero entonces se sabe que la suma de sus ángulos internos es 360°, además los segmentos AB y AC son perpendiculares a los radios OB y OC respectivamente por ser tangentes del círculo O por lo tanto:
$m\angle ABO = 90°$; $m\angle OCA = 90°$; $m\angle CAB = 60°$
$m\angle BOC = 360° - 90° - 90° - 60° = 120°$.

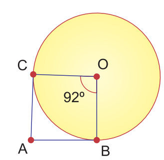
Respuesta: $m\angle ABO = 90°$
$m\angle OCA = 90°$
$m\angle BOC = 120°$

Ejercicio 2.4 Resuelva aplicando la propiedad de la tangente a un círculo.

a) La recta AC es tangente al círculo O en el punto C; AO = 8 cm, AC = 4 cm ¿Cuál es la longitud del $\overline{OC}$?



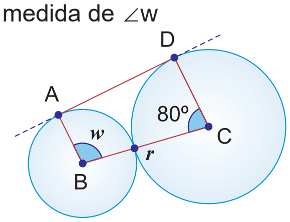
b) En la figura de la derecha $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ son tangentes al círculo O en los puntos C y B respectivamente, encuentre la medida de los ángulos $\angle OCA$, $\angle OBA$ y $\angle CAB$ del cuadrilátero ABOC si $m\angle COB = 92°$.



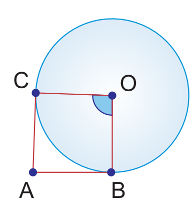
130 Unidad 6 - Polígonos regulares y el círculo

Ejercicios adicionales

a) En la figura la recta AD es tangente al círculo B como al círculo C. Encuentre la medida de $\angle w$



b) En la figura OC = 5 cm, CA = 12 cm encuentre la longitud del $\overline{AB}$. $\overline{CA}$ y $\overline{BA}$ son tangentes al círculo O.



Solución
a) 100º
b) 12 cm

Unidad 6: Polígonos regulares y el círculo

Lección 2: (5/7) Círculos

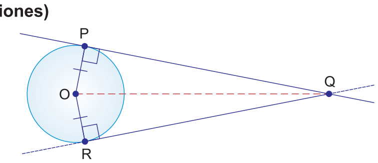
Sección 2: Tangentes

Objetivos: Demostrar proposiciones usando el concepto de tangencia.

Tangentes a un círculo (Demostraciones)

Ejemplo **2.4**

Las rectas PQ y RQ son tangentes al círculo O en P y R respectivamente.
Demuestre que: $\overline{QP} \cong \overline{QR}$.



Solución:

Hipótesis: Las rectas PQ y RQ son tangentes al círculo O en P y R respectivamente

Conclusión: $\overline{QP} \cong \overline{QR}$

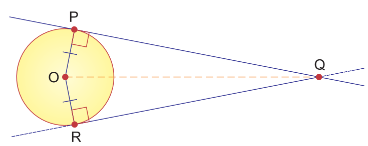
Entre los ΔPOQ y ΔROQ,

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $\overline{OP} \cong \overline{OR}$	Por ser radios del círculo O
2) $m\angle OPQ = m\angle ORQ = 90°$	Por hipótesis y propiedad de tangente
3) $\overline{OQ} \cong \overline{OQ}$	Por congruencia del mismo segmento
4) $\Delta POQ \cong \Delta ROQ$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia hipotenusa - cateto de triángulos rectángulos
5) $\overline{QP} \cong \overline{QR}$	Por 4) y lados correspondientes de triángulos congruentes

Ejercicio **2.5** Complete la siguiente demostración.

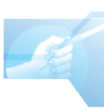
Hipótesis: Las rectas PQ y RQ son tangentes al círculo O en P y R respectivamente

Conclusión: $\angle PQO \cong \angle RQO$

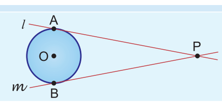


Entre los ΔPOQ y ΔROQ,

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $\overline{OP} \cong$ ____	Por ser ____ del círculo O
2) $m\angle OPQ =$ ____ $= 90°$	Por hipótesis y propiedad de tangente
3) $\overline{OQ} \cong$ ____	Por congruencia del mismo segmento
4) $\Delta POQ \cong \Delta ROQ$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia hipotenusa - cateto de triángulos rectángulos
5) $\angle PQO \cong \angle RQO$	Por 4) y ángulos correspondientes de triángulos congruentes



De un punto fuera de un círculo se pueden trazar solo dos rectas tangentes al círculo.
Además PA = PB.



Si los triángulos son congruentes que se puede concluir?

* Concluir que $\overline{PQ} \cong \overline{RQ}$ por ser partes correspondientes de triángulos congruentes.

2. Resolver *Ejercicio* **2.5**

(15 min)

Solución: 1) $\overline{OR}$, radios 2) $m\angle ORQ$ 3) $\overline{OQ}$

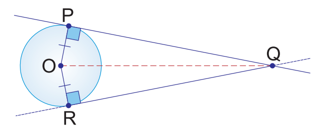
Concluir que de un punto fuera de un círculo se pueden trazar dos rectas tangentes al círculo.

Indicador de logro

Complete la siguiente demostración

Hipótesis: Las rectas PQ y RQ son tangentes al círculo O en P y R respectivamente

Conclusión: $\angle PQO \cong \angle RQO$



Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $\overline{PO} \cong$ ____	Por ser ____ del círculo O
2) ____ es tangente al círculo O	Por hipótesis
3) ____ es tangente al círculo O	Por hipótesis
4) $m\angle OPQ =$ ____ $= 90°$	Por ____ y ____
5) $\overline{OQ} \cong$ ____	Por congruencia del mismo segmento
6) $\Delta POQ \cong \Delta ROQ$	Por criterio ____ de triángulos rectángulos
7) $\angle PQO \cong \angle RQO$	Por ser ____ correspondientes de triángulos congruentes

1. Demostrar la proposición.

Ejemplo **2.4**

(30 min)

¿Cuál es la hipótesis que se da en esta proposición? ¿Cuál es la conclusión a la que se debe llegar?

* Concluir que la hipótesis es que las rectas PQ y RQ son tangentes al círculo O en P y R respectivamente y la conclusión es $\overline{QP} \cong \overline{QR}$

* ¿Qué estrategia se puede utilizar para demostrar que $\overline{QP} \cong \overline{QR}$?

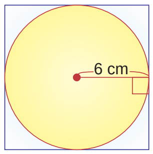
* Hacer que los estudiantes noten que se pueden formar dos triángulos congruentes utilizando como estrategia el trazado de la línea de OQ.

* Explicar que los ángulos $\angle$QPO y $\angle$QRO son rectos por ser las rectas tangentes al círculo O.
¿Qué se puede concluir de OP y OR?
Concluir que PO = OR por ser radios del círculo O
¿Qué pasa con el lado OQ?
Explicar que es el mismo en los dos triángulos.

* Utilizar el criterio de congruencia de triángulos rectángulos para concluir que $\Delta QPO \cong \Delta QRO$.

Indicador de logro

Encuentre el área del círculo inscrito en la siguiente figura:



1. Construir una tangente de un círculo que pase por un punto externo del mismo.

Ejemplo **2.5**

(10 min)

* Hacer la construcción siguiendo los pasos del LE.
* ¿Es la recta PA tangente al círculo O?
* ¿ Se podrá trazar otra recta tangente al círculo O desde el punto P?
* Concluir que la recta PA es tangente al círculo O porque solo lo toca en un punto y si se puede trazar otra recta tangente desde P al círculo O y sería la recta PB.
* En este grado no se demostrará que la rectas PA y PB son tangentes al círculo O sin embargo se pueden hacer preguntas orientadoras que lo conduzcan a visualizar de manera intuitiva la demostración.
* ¿Cómo podemos garantizar que la recta PA es tangente al círculo O?
  Concluir que $\angle PAO$ es recto.
* Se puede utilizar la estrategia de buscar la relación entre los ángulos que aparecen en la construcción para poder demostrar que el ángulo es recto, además de la relación entre los triángulos que se forman como $\triangle QPA$ y $\triangle QAO$.
* Hacer notar que son isósceles y por lo tanto tienen dos parejas ángulos congruentes y a partir de ello deducir que la medida del $\angle PAO$ es 90°.

Unidad 6: **Polígonos regulares y el círculo**

Lección 2: (6/7) Círculos

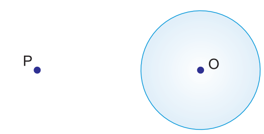
Sección 2: Tangentes

Objetivos:
- Construir una tangente a un círculo dado que pase por un punto externo del círculo.
- Deducir el área del círculo a partir de un polígono regular circunscrito a un círculo.

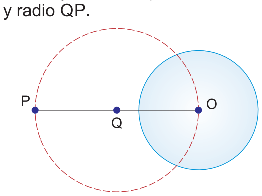
Ejemplo **2.5**

Vamos a construir una tangente a un círculo dado que pase por un punto en el exterior del círculo:

1) Trazar un círculo de centro O y un punto P en el exterior del círculo.

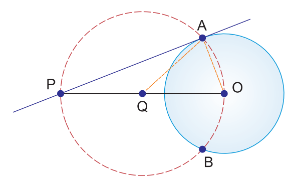


2) Trazar el segmento PO y ubicar su punto medio, nombrarlo Q, luego dibuje el círculo con centro en Q y radio QP.



Para encontrar el punto medio del $\overline{PO}$ trace su mediatriz.

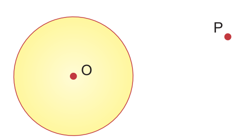
3) Ubicar los puntos A y B en la intersección de los círculos O y Q, y trazar la recta PA la cual es tangente al círculo O en A.



La recta PB también es tangente al círculo O.

Se puede trazar la recta PB tangente al círculo O en el punto B.

Ejercicio **2.6** Dibuje un círculo de radio 4 cm y construya la recta tangente que pase por un punto exterior a él.



132 *Unidad 6 - Polígonos regulares y el círculo*

2. Resolver *Ejercicio* **2.6**

(10 min)

Solución

Se omite la solución, en este caso deben seguir los mismos pasos del LE es decir repetir el proceso del *Ejemplo* **2.5**.

continúa en la siguiente página...

Unidad 6: Polígonos regulares y el círculo

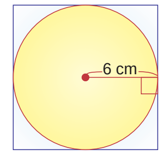
Lección 2: (6/7) Círculos

Sección 2: Tangentes

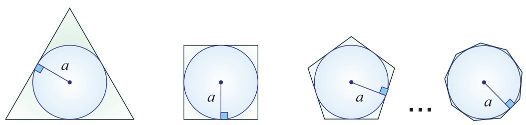
Objetivos:
- Construir una tangente a un círculo dado que pase por un punto externo del círculo.
- Deducir el área del círculo a partir de un polígono regular circunscrito a un círculo.

Indicador de logro

Encuentre el área del círculo inscrito en la siguiente figura:



El área de un círculo se puede aproximar empleando el concepto de área del polígono regular en el que está inscrito.
Observa que entre más lados tiene el polígono regular más se acerca al círculo.



Si las variables n, l y a representan, n: número de lados de un polígono regular; l: longitud del lado del polígono regular; a: apotema del polígono regular. El área del polígono está dada por $\frac{nla}{2}$.
Si se aumenta la cantidad de lados del polígono regular, el perímetro del polígono (nl) se acerca al perímetro del círculo ($2\pi r$), por lo tanto nl se acerca a $2\pi r$. Por otra parte el apotema a es igual al radio r, $a = r$.
Se establece la siguiente relación:

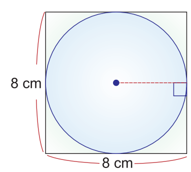
$$\frac{nla}{2} = \frac{(2\pi r)r}{2} = \pi r^2$$

En 5to grado se estudió el perímetro de la circunferencia: C = $2\pi r$ donde r es el radio del círculo y π es un número irracional.
$\pi = 3.1415926535...$

El área A de un círculo de radio r es: A = πr^2.

Ejemplo 2.6

Encuentre el área A del círculo inscrito en un cuadrado de 8 cm de lado.



Solución:
La longitud del diámetro del círculo es igual a la longitud del lado del cuadrado por lo tanto el radio del círculo es 4 cm.

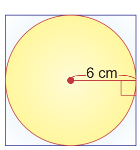
A = πr^2
= $\pi(4)^2$
= 16π

Respuesta: 16π cm^2

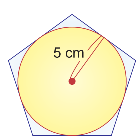
Note que la apotema a del cuadrado es el radio r del círculo inscrito
$a = r$

Ejercicio 2.7 Encuentre el área del círculo inscrito en las siguientes figuras:

a)



b)



133

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

---

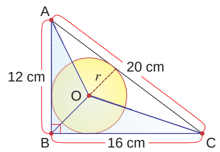
3. Deducir el área del círculo.
(10 min)
- * Presentar a los estudiantes las figuras de círculo inscrito en diferentes polígonos. ¿Qué observan en cuanto a la superficie del círculo?
- * Concluir que entre más lados tiene el polígono más se aproxima a la superficie del círculo.
¿Cuál es la fórmula para calcular el área de un polígono regular?
- * Esta fórmula la estudiaron en la lección anterior
$$A = \frac{nla}{2} = \frac{Pa}{2}$$
- * Se sabe que nl es el perímetro del polígono, ¿qué sucede con el perímetro y la apotema si el número de lados crece infinitamente?
- * Concluir que el perímetro se aproxima a la circunferencia, la apotema mide igual que el radio.
¿Cuál es la fórmula para encontrar la longitud de la circunferencia?
- * Concluir que C = $2\pi r$ y al hacer las sustituciones se tiene
$$A = \frac{nla}{2} = \frac{Pa}{2} = \frac{2\pi r(r)}{2} = \pi r^2$$

4. Aplicar la fórmula del área del círculo. Ejemplo 2.6
(8 min)
¿Cómo se puede calcular el área del círculo inscrito en el cuadrado?
- * Indicar que piensen en la manera de resolver el ejemplo sin consultar el LE y luego la comparen con el libro.
- * Discutir sus ideas.

5. Resolver Ejercicio 2.7
(7 min)
Solución
Círculo inscrito en el cuadrado: 36π cm^2
Círculo inscrito en el pentágono: 25π cm^2

Indicador de logro

Encuentre el radio del círculo O inscrito en el ΔABC.



1. Identificar la altura de los triángulos que se forman en el triángulo ABC.

Ejemplo 2.7

(15 min)

* Indicar que observen la figura del Ejemplo 2.7
¿Qué pueden decir acerca de ΔABC?
Concluir que ΔABC es un triángulo rectángulo y que está dividido en tres triángulos ΔBOC, ΔAOB, ΔAOC.
¿Cómo son los lados del ΔABC con respecto al círculo O?

* Concluir que son tangentes al círculo O.
¿Qué representa el radio del círculo con respecto a los triángulos que se forman en el ΔABC?

* Concluir que el radio del círculo O es la altura de los triángulos ΔBOC, ΔAOB, ΔAOC porque es perpendicular a los lados AB, BC y AC que son las bases de los triángulos formados.

2. Calcular el radio del círculo inscrito en un triángulo no regular.

(20 min)

¿Cómo podemos calcular el radio del círculo O?

Unidad 6: Polígonos regulares y el círculo

Lección 2: (7/7) Círculos

Sección 2: Tangentes

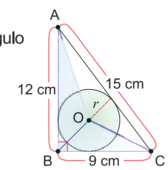
Objetivo: Calcular el área de un círculo inscrito en un polígono no regular.

En general se puede inscribir un círculo en un triángulo no regular, es decir, en un triángulo que no sea equilátero, en el siguiente ejemplo estudiamos un triángulo escaleno donde los lados son tangentes al círculo O.

Ejemplo 2.7

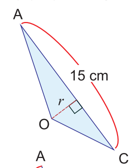
En la figura de la derecha, r es el radio del círculo inscrito en el triángulo rectángulo ABC.

a) ¿Cuál es la altura del ΔAOC? si su base es el lado AC.
b) ¿Cuál es la altura del ΔAOB? si su base es el lado AB.
c) Encuentre el radio del círculo O inscrito en el ΔABC.



Solución:

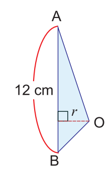
a) Una base del ΔAOC es $\overline{AC}$ por lo tanto su altura es el radio del círculo O, es decir r.



Se sabe que r es perpendicular al $\overline{AC}$ porque $\overline{AC}$ es tangente al círculo O.

Respuesta: r

b) Una base del ΔAOB es $\overline{AB}$ por lo tanto su altura es el radio del círculo O, es decir r.



Se sabe que r es perpendicular al $\overline{AB}$ porque $\overline{AB}$ es tangente al círculo O.

Respuesta: r

c) Para encontrar r se calcula el área de los triángulos ΔAOC, ΔAOB, ΔBOC y ΔABC.

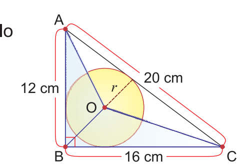
$$\frac{1}{2}(9)(12) = \frac{1}{2}(15)(r) + \frac{1}{2}(12)(r) + \frac{1}{2}(9)(r)$$
$$54 = \frac{15}{2}r + 6r + \frac{9}{2}r$$
$$54 = 18r$$
$$\frac{54}{18} = r$$
$$r = 3$$

La altura del ΔBOC también es r al igual que las alturas de los ΔAOC y ΔAOB.

El área A de un triángulo está dada por $A = \frac{1}{2}bh$ donde b: base h: altura.

Respuesta: 3 cm

Ejercicio 2.8 Encuentre el radio del círculo O inscrito en el ΔABC.



134 Unidad 6 - Polígonos regulares y el círculo

* Para ello se utiliza la estrategia de encontrar el área de cada triangulo, sabiendo que las alturas son el radio del círculo.

* Inducir al estudiante a encontrar las áreas ΔBOC, ΔAOB, ΔAOC y que la igualen al área del ΔABC y despejar para el radio.

3. Resolver Ejercicio 2.8 (10 min)

Solución El radio del círculo es r = 4 cm

$$\frac{1}{2}(16)(12) = \frac{1}{2}(20)(r) + \frac{1}{2}(12)(r) + \frac{1}{2}(16)(r)$$

Unidad 6: **Polígonos regulares y el círculo**

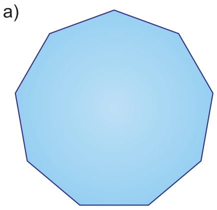
(1/2) Ejercicios de la unidad

Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre los polígonos regulares y el círculo.

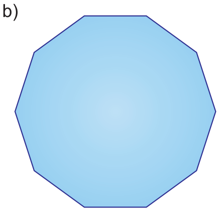
Ejercicios

1 Dados los siguientes polígonos regulares encuentre la medida de los ángulos internos:

a)



b)

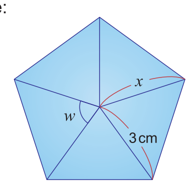


2 Utilizando regla y compás construya un triángulo equilátero de 5 cm de lado y ubique su centro.

3 En el pentágono regular de la derecha encuentre:

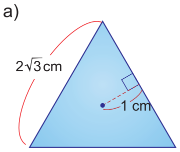
a) La medida de x

b) La medida del ángulo w

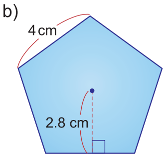


4 Encuentre el área de los siguientes polígonos regulares:

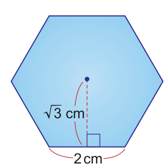
a)



b)



c)



1 Calcular la medida de los ángulos internos de un polígono regular.

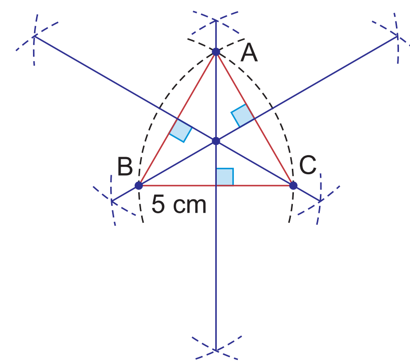
Solución

a) 140°

b) 144°

2 Construir polígonos regulares con regla y compás.

Solución



3 Encontrar la medida del ángulo central de un polígono regular.

Solución

a) 3 cm

b) 72°

4 Calcular el área de polígonos regulares.

Solución

a) $3\sqrt{3}$ cm^2

b) 28 cm^2

c) $6\sqrt{3}$ cm^2

5 **Calcular la longitud del apotema de un polígono regular y su área.**

Solución

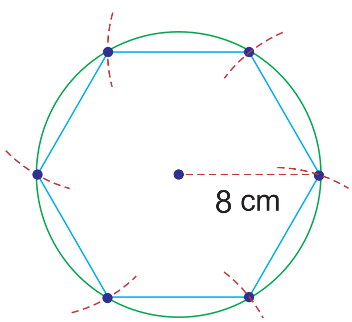
a) a = 3 cm

b) $l = 6\sqrt{3}$ cm

c) A = $27\sqrt{3}$ cm²

6 **Construir un polígono regular utilizando regla y compás.**

Solución



7 **Calcular la longitud del lado de un polígono regular.**

Solución

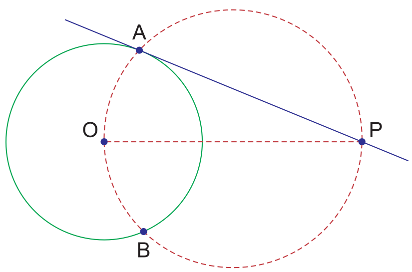
a) $6\sqrt{3}$ cm

b) $4\sqrt{2}$ cm

c) 8 cm

8 **Construir una recta tangente a un círculo que pase por un punto externo a él.**

Solución

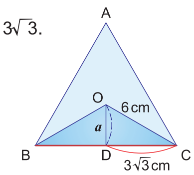


Unidad 6: Polígonos regulares y el círculo

(2/2) Ejercicios de la unidad

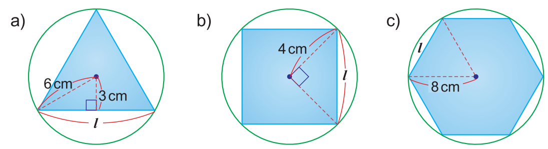
Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre los polígonos regulares y el círculo.

5 El $\triangle$ABC es equilátero, OC = 6 cm y CD = $3\sqrt{3}$.
Encuentre:
a) La longitud de la apotema a
b) La longitud del lado del triángulo ABC
c) El área del triángulo ABC

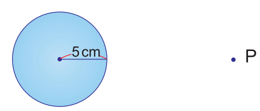


6 Construya con regla y compás un hexágono regular inscrito en un círculo de 8 cm de diámetro.

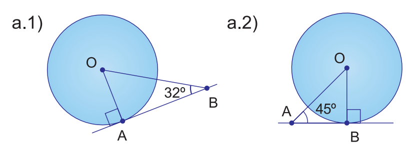
7 Calcule la longitud del lado de los siguientes polígonos regulares:



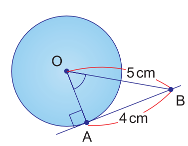
8 Construya un círculo de 5 cm de radio y un punto P fuera de él, luego trace una tangente al círculo que pase por P.



9 Resuelva aplicando la propiedad de la tangente de un círculo.
a) En las figuras a.1) y a.2), el $\overline{AB}$ es tangente al círculo O. Encuentra la medida de los ángulos del $\triangle$AOB.



b) En la figura el $\overline{AB}$ es tangente al círculo O. Encuentre la medida del $\overline{OA}$.



136 Unidad 6 - Polígonos regulares y el círculo

9 **Aplicar la propiedad de la recta tangente a un círculo.**

Solución

a) a1) m$\angle$AOB = 58°, m$\angle$OAB = 90°, m$\angle$ABO = 32°

a2) m$\angle$AOB = 45°, m$\angle$OBA = 90°, m$\angle$BAO = 45°

b) OA = 3 cm

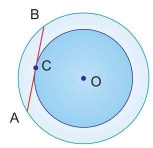
Unidad 6: Polígonos regulares y el círculo

(2/2) Ejercicios de la unidad

Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre los polígonos regulares y el círculo.

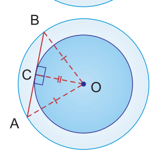
10 Complete la siguiente demostración:

Proposición: En la figura de la derecha ambos círculos tienen el mismo centro O. Si la cuerda AB del círculo mayor es tangente en el punto C al círculo menor, demuestre que $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.



Hipótesis: La cuerda AB del círculo mayor es tangente en el punto C al círculo menor.

Conclusión: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$



Sugerencia: trazar los segmentos OA, OB, OC y formar los ΔACO y ΔBCO

Entre los ΔACO y ΔBCO

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{OA} \cong \overline{OB}$	Por ser ______ del círculo mayor
2) $m\angle ACO =$ ______ $= 90°$	Por hipótesis y la propiedad de tangente
3) $\overline{OC} \cong$ ______	Por congruencia del mismo segmento
4) $\Delta ACO \cong \Delta BCO$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia ______ de triángulos rectángulos
5) $\overline{AC} \cong \overline{BC}$	Por 4) y ______ correspondientes de triángulos congruentes

137

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

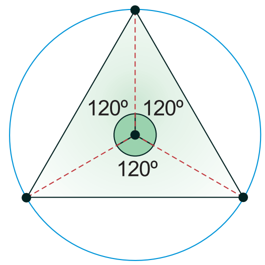
10 **Demostrar proposiciones aplicando la propiedad de la recta tangente a un círculo.**

Solución

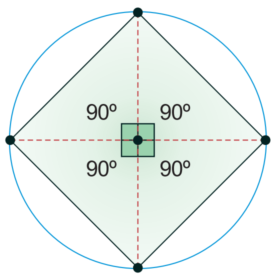
Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{OA} \cong \overline{OB}$	Por ser radios del círculo mayor
2) $m\angle ACO = m\angle BCO = 90°$	Por hipótesis y la propiedad de tangente
3) $\overline{OC} \cong \overline{OC}$	Por congruencia del mismo segmento
4) $\Delta ACO \cong \Delta BCO$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia hipotenusa - cateto de triángulos rectángulos
5) $\overline{AC} \cong \overline{BC}$	Por 4) y lados correspondientes de triángulos congruentes

Ejercicio 1.6 (Página 154)

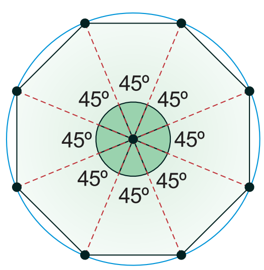
a)

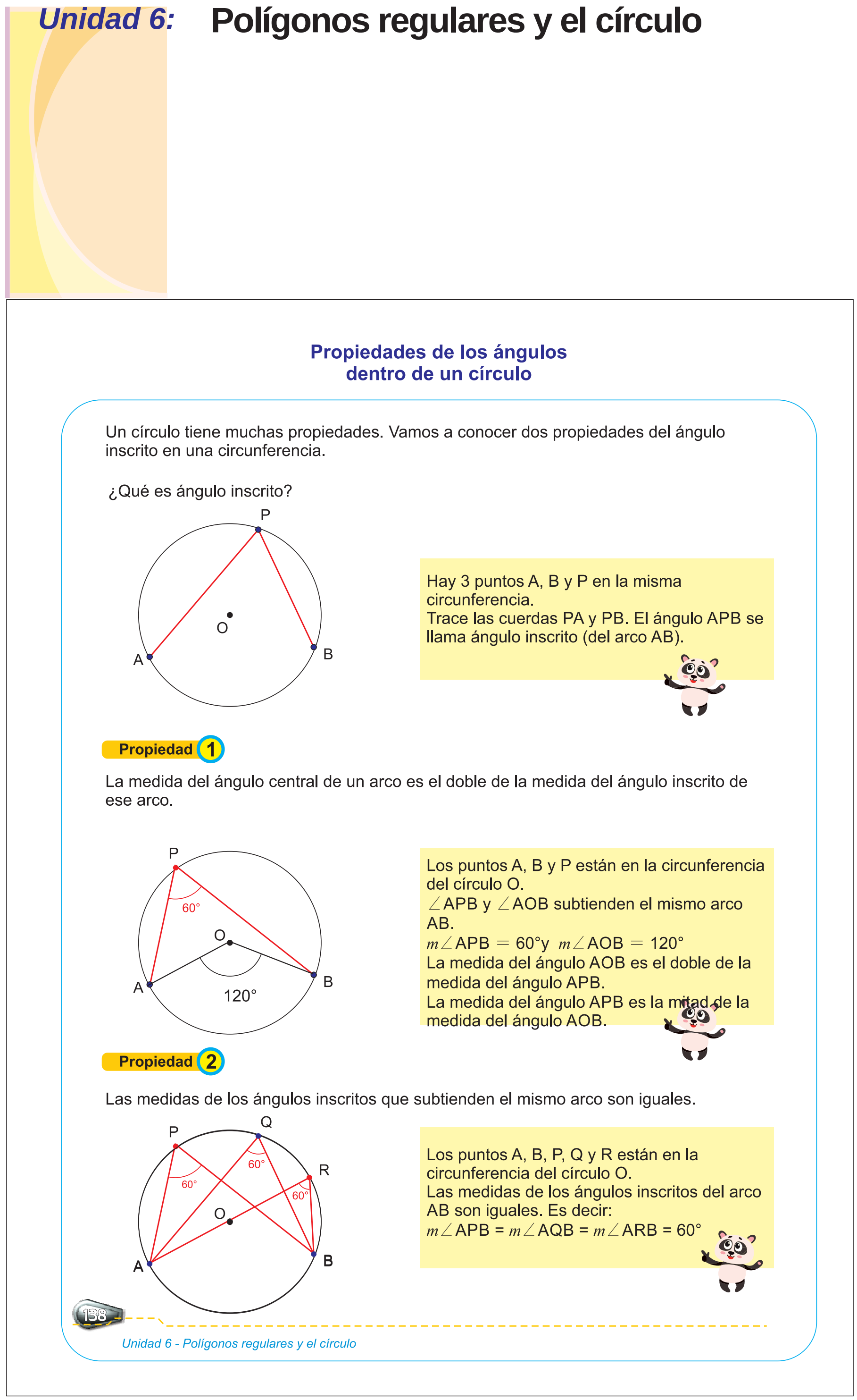


b)



c)





Unidad 6: Polígonos regulares y el círculo

Propiedades de los ángulos dentro de un círculo

Un círculo tiene muchas propiedades. Vamos a conocer dos propiedades del ángulo inscrito en una circunferencia.

¿Qué es ángulo inscrito?

Hay 3 puntos A, B y P en la misma circunferencia.
Trace las cuerdas PA y PB. El ángulo APB se llama ángulo inscrito (del arco AB).

Propiedad 1

La medida del ángulo central de un arco es el doble de la medida del ángulo inscrito de ese arco.

Los puntos A, B y P están en la circunferencia del círculo O.
$\angle$APB y $\angle$AOB subtienden el mismo arco AB.
$m\angle$APB = 60° y $m\angle$AOB = 120°
La medida del ángulo AOB es el doble de la medida del ángulo APB.
La medida del ángulo APB es la mitad de la medida del ángulo AOB.

Propiedad 2

Las medidas de los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco son iguales.

Los puntos A, B, P, Q y R están en la circunferencia del círculo O.
Las medidas de los ángulos inscritos del arco AB son iguales. Es decir:
$m\angle$APB = $m\angle$AQB = $m\angle$ARB = 60°

138 Unidad 6 - Polígonos regulares y el círculo

Unidad 7
Sólidos geométricos

Lección 1: Áreas laterales y volumen de sólidos geométricos

Unidad 7

Sólidos geómetricos

(11 horas)

1 Expectativas de logro

- Calculan el área lateral y el volumen de poliedros, cilindros y esferas.

2 Relación y desarrollo

Séptimo grado

Conjunto de puntos
- Puntos, rectas y planos
- Rayos y segmentos
- Longitud de un segmento
- Segmentos congruentes
- Distancia entre puntos
- Punto medio de un segmento
- Bisector de un segmento
- Puntos colineales

Ángulos
- Ángulo, medida y congruencia
- Clasificación de ángulos
- Construcción de la bisectriz
- Rectas perpendiculares y mediatriz de un segmento
- Construcción de la mediatriz
- Construcción de una perpendicular usando definición de mediatriz

Octavo grado

Paralelismo
- Rectas paralelas y transversales
- Ángulos formados por dos rectas paralelas y una transversal
- Congruencia de ángulos formados por dos rectas paralelas y una transversal
- Demostraciones sobre paralelismo
- Distancia entre rectas paralelas
- Construcción de rectas paralelas

Congruencia de triángulos
- Suma de las medidas de los ángulos de un triángulo
- Suma de las medidas de los ángulos de un polígono
- Congruencia de triángulos
- Triángulos isósceles y rectángulo

Cuadriláteros
- Elementos y clasificación de los cuadriláteros
- Paralelogramos
- Rectángulos, rombos y cuadrados
- Trapecios

Noveno grado

Semejanza de triángulos
- Figuras semejantes
- Triángulos semejantes
- Criterios de semejanza de triángulos
- Relación entre triángulos y proporción
- Relación entre paralelas y proporción
- Aplicación de la semejanza de triángulos

Teorema de Pitágoras
- Teorema de Pitágoras
- Recíproco del teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Polígonos regulares y el círculo
- Polígonos regulares
- Medida de los ángulos internos de un polígono regular
- Centro de un polígono regular
- Círculos
- Tangente a un círculo
- Área del círculo

Sólidos geométricos
- Áreas laterales de sólidos geométricos (cubos, prismas, pirámides, cilindros conos y esferas)
- Volumen de sólidos geométricos (pirámides, conos, cilindros y esferas)

3 Plan de estudio (11 horas)

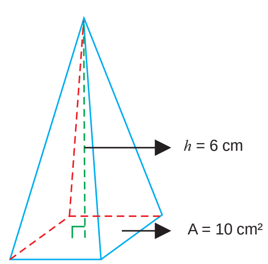
Lección	Distribución de horas	Contenidos
1. Áreas laterales y volumen de sólidos (9 horas)	1/9	• Construcción de sólidos geométricos
	2/9	• Áreas total (superficies laterales y bases) de cubos y prismas
	3/9	• Área de superficies laterales de pirámides y cilindros
	4~5/9	• Área de la superficie lateral del cono y la esfera
	6~7/9	• Volumen de cilindros y pirámides
	8~9/9	• Volumen de conos y esferas
Ejercicios (2 horas)	1~2/2	

4 Puntos de lección

Análisis de las pruebas diagnósticas 2016 - 2017

Esta unidad se comienza a estudiar en el II Ciclo de Educación Básica y se profundiza en 9no grado, sin embargo los resultados reflejan un desconocimiento por parte de los estudiantes.

[Pregunta] Encuentre el volumen de una pirámide cuya base tiene 10 cm^2 de área y 6 cm de altura.



Institutos: 1% CEB: 0% (2017)

Hay dos puntos necesarios para responder esta pregunta, uno es si sabe la fórmula del volumen de la pirámide y otro es si puede hacer los cálculos. Cabe mencionar que los resultados bajos corresponden al primer punto.

A veces resulta un poco complicado comprender la Geometría, sin embargo, cuando se quiere tener los conocimientos básicos de esta, no hay necesidad de profundizar en otros temas para aprender a pensar lógicamente. Entonces, es importante enseñar utilizando ejemplos sencillos.

Lección 1: Áreas laterales y volumen de sólidos

Durante los primeros seis años de la educación básica se estudian los sólidos geométricos como ser prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas, se aprendió a construirlos utilizando desarrollos y se estudió sus elementos. Partiendo de estos conocimientos previos, esta lección trata el tema áreas laterales y volúmenes de los sólidos antes mencionados, sin embargo se retoma la construcción de algunos sólidos con el objeto de que el estudiante pueda manipular su desarrollo y de aquí deducir la manera como obtener el área lateral sin necesidad de tener que aprenderse una fórmula.

La estrategia que se implementa está basada en identificar las figuras planas que forman el desarrollo del sólido, luego obtener el área de cada figura por separado y sumarlas.

En cuanto al volumen de los sólidos se incluye el de la pirámide, el cono y la esfera ya que estos no se estudiaron en el II ciclo de educación básica. Para la deducción de la fórmula del volumen de la pirámide se hace un experimento con dos figuras una pirámide y un prisma cuadrangular que tengan la misma base y la misma altura.

Se llena la pirámide con arroz o arena (o cualquier otro material) y se deposita en el prisma, este proceso se hace tres veces de tal manera que el estudiante pueda verificar que el volumen del prisma es tres veces el volumen de la pirámide.

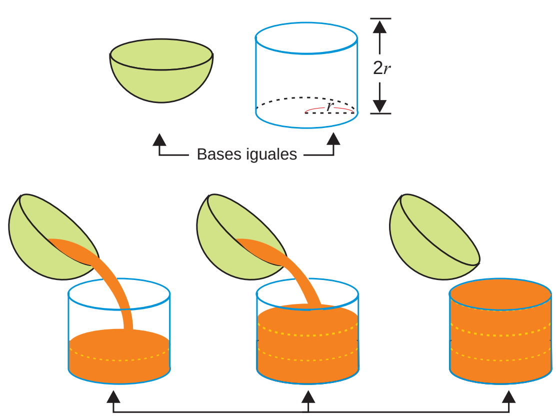
Se utiliza la misma estrategia para deducir la fórmula del volumen del cono en este caso se utiliza un cilindro y un cono con la misma base y la misma altura.

De manera similar se puede deducir la fórmula del volumen de la esfera pero en este grado solo se aprenderá la fórmula.

A continuación se muestra como se deduce el volumen de la esfera:

Hay dos recipientes: una semiesfera con radio r y un cilindro cuyo radio de la base es igual al radio de la semiesfera, es decir, r su altura es h que es igual $2r$.

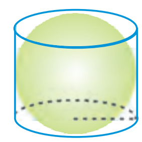
Si se llena la semiesfera con agua y se deposita en el cilindro ¿Cuántas veces se debe hacer este proceso para llenar el cilindro?



Al hacer el experimento se puede visualizar que se necesita llenar 3 veces la semiesfera y depositarla en el cilindro para que este se llene.

Por lo tanto se puede concluir que el volumen de la semiesfera es $\frac{1}{3}$ del volumen del cilindro.

Por lo tanto el volumen de la esfera es $\frac{2}{3}$ del volumen del cilindro.



$$\text{Volumen de la esfera} = \frac{2}{3} \times (\text{volumen del cilindro})$$

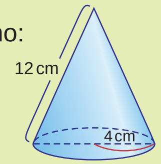
$$= \frac{2}{3} \times (\pi r^2 \times 2r)$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$

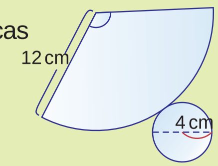
Tema: Área de la superficie lateral del cono. 1

Ejemplo 1.9 2 **Pág.** 149 3

Dada la figura de un cono:



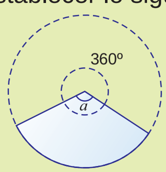
a) Observe su desarrollo.
¿Qué figuras geométricas se forman?



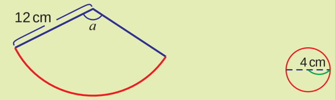
b) Encuentre el área de la superficie lateral del cono.

Solución 4

a) Un sector circular de radio 12 cm y un círculo de radio 4 cm.
b) Se puede establecer lo siguiente:



6
$$a : 360° = \left(\begin{array}{c}\text{longitud del arco}\\ \text{de la circunferencia}\\ \text{de radio 12 cm}\end{array}\right) : \left(\begin{array}{c}\text{longitud de la}\\ \text{circunferencia}\\ \text{de radio 12 cm}\end{array}\right)$$



Longitud del arco de la circunferencia de radio 12 cm = Longitud de la circunferencia de radio 12 cm

6
$$a : 360° = \left(\begin{array}{c}\text{longitud del arco}\\ \text{de la circunferencia}\\ \text{de radio 4 cm}\end{array}\right) : \left(\begin{array}{c}\text{longitud de la}\\ \text{circunferencia}\\ \text{de radio 12 cm}\end{array}\right)$$

$a : 360° = (2 \times 4 \times \pi) : (2 \times 12 \times \pi)$
$a : 360° = 4 : 12$
$12a = 360° \times 4$
$a = 360° \times \frac{4}{12}$
$= 360° \times \frac{1}{3}$
$= 120°$

El ángulo del sector circular es 120°

El área A de la superficie lateral del cono:

$A = 12^2 \times \pi \times \frac{120°}{360°}$
$= 144 \times \pi \times \frac{1}{3}$
$= 48\pi$

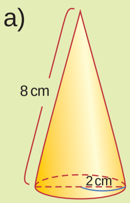
Respuesta: 48π cm² 4

Ejercicio 1.8 2 **Pág.** 150 3

Encuentre el área de la superficie lateral de los siguientes conos.

Solución 4

a)



$a : 360° = (2 \times 2 \times \pi) : (2 \times 8 \times \pi)$
$a : 360° = 2 : 8$
$8a = 360° \times 2$
$a = 360° \times \frac{2}{8}$
$= 360° \times \frac{1}{4}$
$= 90°$

Respuesta: 90° 4 ✓

$A = 8^2 \times \pi \times \frac{90°}{360°}$
$= 64 \times \pi \times \frac{1}{4}$
$= 16\pi$

Respuesta: 16π cm² 4 ✓

(Para seguir con el inciso b), se puede borrar la parte izquierda de pizarra.)

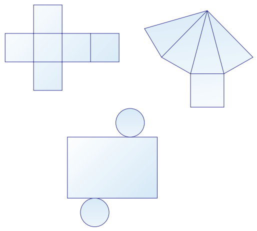
1. Al inicio de la clase escribir solo la palabra "**Tema**" y hasta el final de la clase (o en el desarrollo de la misma) escribir el contenido del tema.
2. Escribir el número del Ejemplo o Ejercicio.
3. Escribir el número de **Pág.** del LE para entender dónde se quedaron con respecto al tiempo.
4. Escribir la **Solución** y **Respuesta**.
5. En el problema planteado marcar los datos importantes para poder llegar a la respuesta.
6. Escribir la conclusión en un rectángulo de color rojo.

✓ Marcar en el Ejercicio cuando la solución o la respuesta sean correctas.

Nota: Los puntos aquí explicados no siempre aplican todos en un plan de pizarra.

Indicador de logro

Construye los siguientes sólidos utilizando los desarrollos:



1. Construir un cubo mediante el desarrollo dado en el LE *Ejemplo* **1.1**

(17 min)

Es recomendable que el docente lleve el desarrollo en cartulina para presentárselos a sus estudiantes y así ahorrar tiempo al momento de calcarlo y además el sólido ya elaborado.

* Calcan el desarrollo en una página en blanco, lo recortan y lo calcan de nuevo en una cartulina de colores hacen los dobleces siguiendo el modelo presentado en el LE.
* Arman y pegan el cubo.
* Manipular el sólido y repasar sus elementos los cuales fueron estudiados en 4to grado.

  ¿Cuántas caras tiene el cubo?

  ¿Que forma tienen las caras del cubo?

  ¿Cuántas aristas tiene el cubo?

  ¿Cuántos vértices tiene el cubo?
* Pedirles que señalen las caras laterales del cubo y sus bases.
* Explicar que el cubo tiene 11 desarrollos diferentes.

Unidad 7: **Sólidos geométricos**

Lección 1: (1/9) Áreas laterales y volumen de sólidos

Sección 1: Construcción de sólidos

Objetivo: Construir y manipular sólidos geométricos utilizando desarrollos.

Unidad 7 Sólidos geométricos

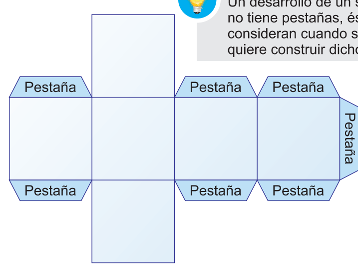
Lección 1: Áreas laterales y volumen de sólidos geométricos

Sección 1: Construcción de sólidos geométricos

Vamos a construir sólidos geométricos dados varios desarrollos.

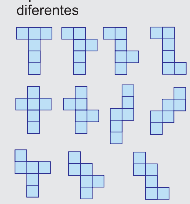
Ejemplo **1.1**

Dado el siguiente desarrollo de un cubo, cálquelo en cartulina, luego recórtelo y arme el cubo.



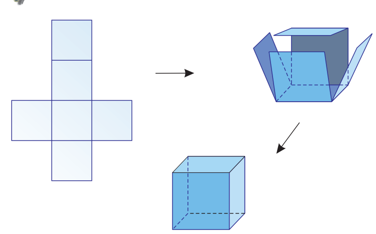
Un desarrollo de un sólido no tiene pestañas, éstas se consideran cuando se quiere construir dicho sólido.

Un cubo se puede construir a partir de 11 desarrollos diferentes

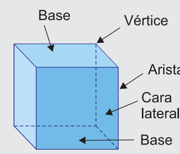


(Ver desarrollo para calcar en la página 162)

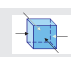
Solución:



Elementos de un cubo
Un cubo tiene:
6 caras cuadradas,
12 aristas y
8 vértices.



El cubo tiene 4 caras laterales



Ejercicio **1.1** Elija uno de los desarrollos presentados en el recuadro del *Ejemplo* **1.1** y construya un cubo cuya arista mida 6 cm.

* Se sugiere que el docente tenga los desarrollos del cubo dibujados y recortados en cartulina para mostrárselas a los estudiantes. (consultar LE de 5to grado)

2. Resolver *Ejercicio* **1.1**

* Indicar que seleccionen un desarrollo del cubo diferente al dado en clase y que lo dibujen en casa con las medidas indicadas y armen el cubo.

continúa en la siguiente página...

Unidad 7: Sólidos geométricos

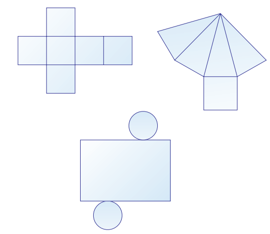
Lección 1: (1/9) Áreas laterales y volumen de sólidos

Sección 1: Construcción de sólidos

Objetivo: Construir y manipular sólidos geométricos utilizando desarrollos.

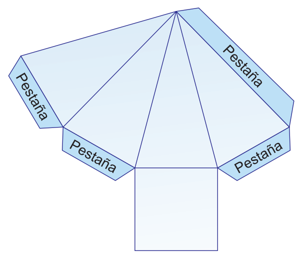
Indicador de logro

Construye los siguientes sólidos utilizando los desarrollos:



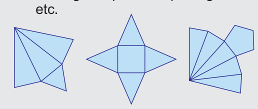
Ejemplo 1.2

Dado el siguiente desarrollo de una pirámide cuadrangular, cálquelo en cartulina, luego recórtelo y arme la pirámide.

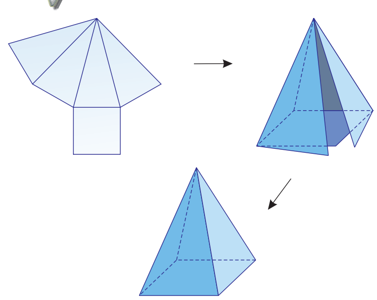


(Ver desarrollo para calcar en la página 163)

Una pirámide se nombra de acuerdo a la forma del polígono de su base, es decir, si la base es un:
Triángulo: pirámide triangular.
Cuadrado: pirámide cuadrangular.
Rectángulo: pirámide rectangular.
Pentágono: pirámide pentagonal, etc.

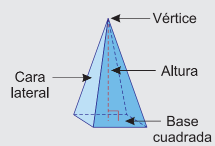


Solución:



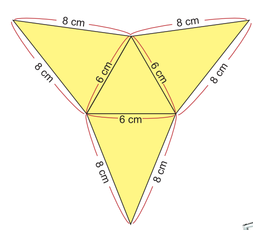
Elementos de una pirámide cuadrangular

En 4to grado aprendimos los elementos de una pirámide:



Una pirámide tiene tantas caras laterales como lados tenga el polígono de la base, éstas siempre serán triangulares, por ejemplo, la pirámide triangular tienen 3 caras laterales, la pirámide pentagonal tiene 5 caras laterales, etc.

Ejercicio 1.2 Construya una pirámide triangular cuyo lado de la base mide 6 cm y los lados de los triángulos isósceles de las caras laterales miden 8 cm, 6 cm y 8 cm.



141

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

* Se sugiere que el docente tenga los desarrollos de pirámides con diferente base y mostrárselas a los estudiantes.(consultar LE de 5to grado)
* Pedir a los estudiantes que identifiquen cuál es la altura de la pirámide.
* Mostrarle al estudiante la altura de una pirámide y la altura de una de las caras laterales y explicar que son diferentes.

4. Resolver Ejercicio 1.2 tarea para la casa.

* Indicar que construyan la pirámide triangular con las medidas dadas.

continúa en la siguiente página...

3. Construir una pirámide cuadrangular mediante el desarrollo dado en el LE Ejemplo 1.2

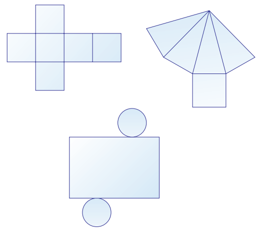
(17 min)

Es recomendable que el docente lleve el desarrollo en cartulina y el sólido elaborado para presentárselos a sus estudiantes y así ahorrar tiempo al momento de calcarlo.

* Calcan el desarrollo en una página en blanco, lo recortan y lo calcan de nuevo en una cartulina de colores.
* Hacen los dobleces siguiendo el modelo presentado en el LE.
* Arman y pegan la pirámide.
* Manipulan el sólido y repasan sus elementos los cuales fueron estudiados en 4to grado. ¿Cuántas caras laterales tiene la pirámide? ¿Qué forma tienen las caras laterales de la pirámide? ¿Qué forma tiene la cara de la base de la pirámide? Señale el vértice de la pirámide.
* Pedirles que señalen las caras laterales de la pirámide y su base.
* Concluir que la pirámide puede tener como base cualquier polígono y que de eso dependerá la manera de nombrarla.

Indicador de logro

Construye los siguientes sólidos utilizando los desarrollos:



Unidad 7: **Sólidos geométricos**

Lección 1: Áreas laterales y volumen de sólidos
(1/9)

Sección 1: Construcción de sólidos

Objetivo: Construir y manipular sólidos geométricos utilizando desarrollos.

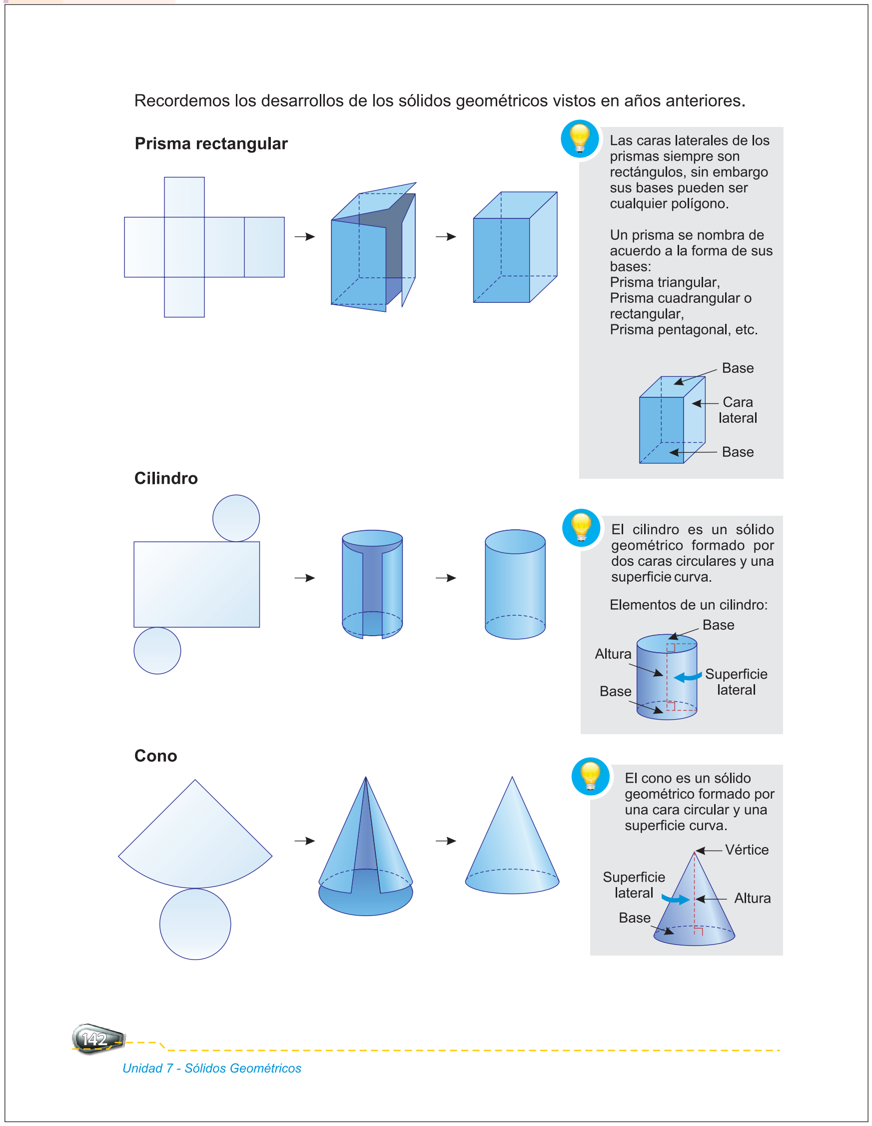
5. Presentar los desarrollos del prisma rectangular, el cilindro y el cono dados en el LE.

(11 min)

* Antes de observar los desarrollos presentados en el libro pedirle a los estudiantes que imaginen como sería el desarrollo de un cilindro, de un prisma rectangular y de un cono.

* Es recomendable que el docente tenga los desarrollos del LE recortados en cartulina para que el alumno logre visualizar como surge el desarrollo y como se forma el sólido.

* Reconocer las características y los elementos de prismas rectangulares, cilindros y conos, ya estudiados en años anteriores 4to a 6to (base, altura, superficie lateral etc.), se sugiere que el docente tenga el sólido ya construido para identificar los elementos en conjunto con los estudiantes.



Recordemos los desarrollos de los sólidos geométricos vistos en años anteriores.

Prisma rectangular

Las caras laterales de los prismas siempre son rectángulos, sin embargo sus bases pueden ser cualquier polígono.

Un prisma se nombra de acuerdo a la forma de sus bases:
Prisma triangular,
Prisma cuadrangular o rectangular,
Prisma pentagonal, etc.

Cilindro

El cilindro es un sólido geométrico formado por dos caras circulares y una superficie curva.

Elementos de un cilindro:

Cono

El cono es un sólido geométrico formado por una cara circular y una superficie curva.

142

Unidad 7 - Sólidos Geométricos

Unidad 7: Sólidos geométricos

Lección 1: Áreas laterales y volumen de sólidos
(2/9)

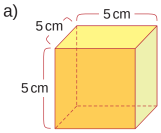
Sección 2: Áreas laterales

Objetivos:
- Determinar la forma que tienen las superficies laterales de los prismas y de las pirámides.
- Calcular el área total (laterales y bases) de un prisma.

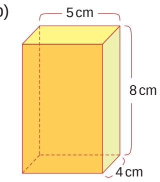
Indicador de logro

Calcule el área total de las superficies (laterales y bases) de las siguientes sólidos:

a)



b)



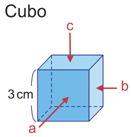
Sección 2: Áreas laterales

Observemos las caras laterales o superficies laterales de los siguientes sólidos:

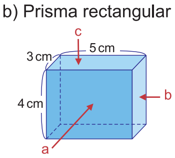
Ejemplo 1.3

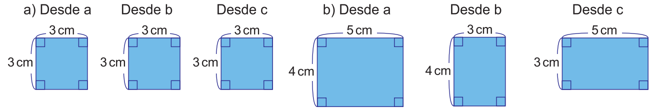
Dibuje en su cuaderno cada uno de los lados vistos desde la dirección indicada por las flechas a, b y c de cada uno de los siguientes sólidos.

a) Cubo



b) Prisma rectangular

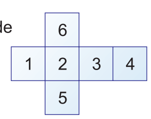




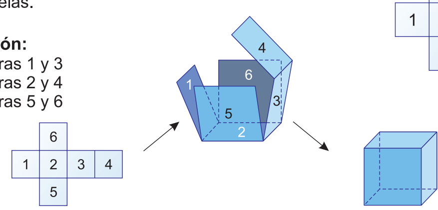
Observe que en el cubo hay tres pares de caras paralelas que son cuadrados congruentes.
En el prisma rectangular hay tres pares de caras paralelas las cuales son rectángulos.
Cada pareja de rectángulos son congruentes entre sí.

Ejemplo 1.4

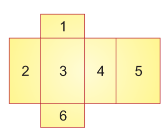
Dado el siguiente desarrollo de un cubo señale los tres pares de caras paralelas.



Solución:
Las caras 1 y 3
Las caras 2 y 4
Las caras 5 y 6



Ejercicio 1.3 Dado el siguiente desarrollo de un prisma señale los tres pares de caras paralelas.



1. **Dibujar las caras de un cubo y de un prisma rectangular desde diferentes puntos de vista.**
   Ejemplo 1.3
   (7 min)

* Pedir que observen el sólido dado en el LE (si es posible se puede presentar un cubo elaborado de cartulina).

¿Qué forma tiene esta cara?(señalar una de sus caras que indica el LE).

¿Qué dimensiones tiene?

* Indicar que dibujen las caras del cubo en su cuaderno.

* Concluir que se llaman superficies laterales (a y b) y base (c).

¿Cuántos pares de caras paralelas opuestas hay en el cubo?

* Concluir que el cubo tiene tres pares de caras paralelas que son cuadrados congruentes.

* Desarrollar en forma similar lo referente al prisma rectangular.

2. **Identificar los pares de caras paralelas en el desarrollo de un cubo**
   Ejemplo 1.4
   (5 min)

* Pedir a los estudiantes que imaginen a través del desarrollo de un cubo cuales serían las parejas de caras paralelas.

* Presentar un desarrollo de un cubo como está en el LE y pedir que identifiquen las caras paralelas.

3. **Resolver Ejercicio 1.3** *(3 min)*

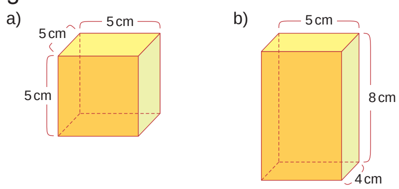
Solución
La cara 1 y 6
La cara 2 y 4
La cara 3 y 5

* Hacer que los estudiantes noten que en el prisma rectangular las caras paralelas son congruentes.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Calcule el área total de las superficies (laterales y bases) de las siguientes sólidos:



4. Encontrar el área total de las superficies (laterales y bases) de un prisma.

(10 min)

Ejemplo 1.5 a)

* Mostrar el dibujo de un cubo y su desarrollo como se presenta en el LE dadas sus dimensiones.

* Indicar a los estudiantes que piensen una manera cómo se puede obtener el área total de las superficies.

¿Cómo se puede encontrar el área total del cubo?

¿Cómo se encuentra el área de un cuadrado?

* Concluye que para encontrar el área total de las superficies se debe encontrar el área de una cara y luego multiplicarlo por 6.

* Indicar que hagan el cálculo del área total de la superficie (laterales y base).

* Concluir en el resumen del LE.

Ejemplo 1.5 b)

(10 min)

* Desarrollar en forma similar que en el cubo lo referente al prisma rectángular.

* Es recomendable que además del sólido observen su desarrollo tal y como está en el LE ya que facilita el cálculo del área total de la superficie.

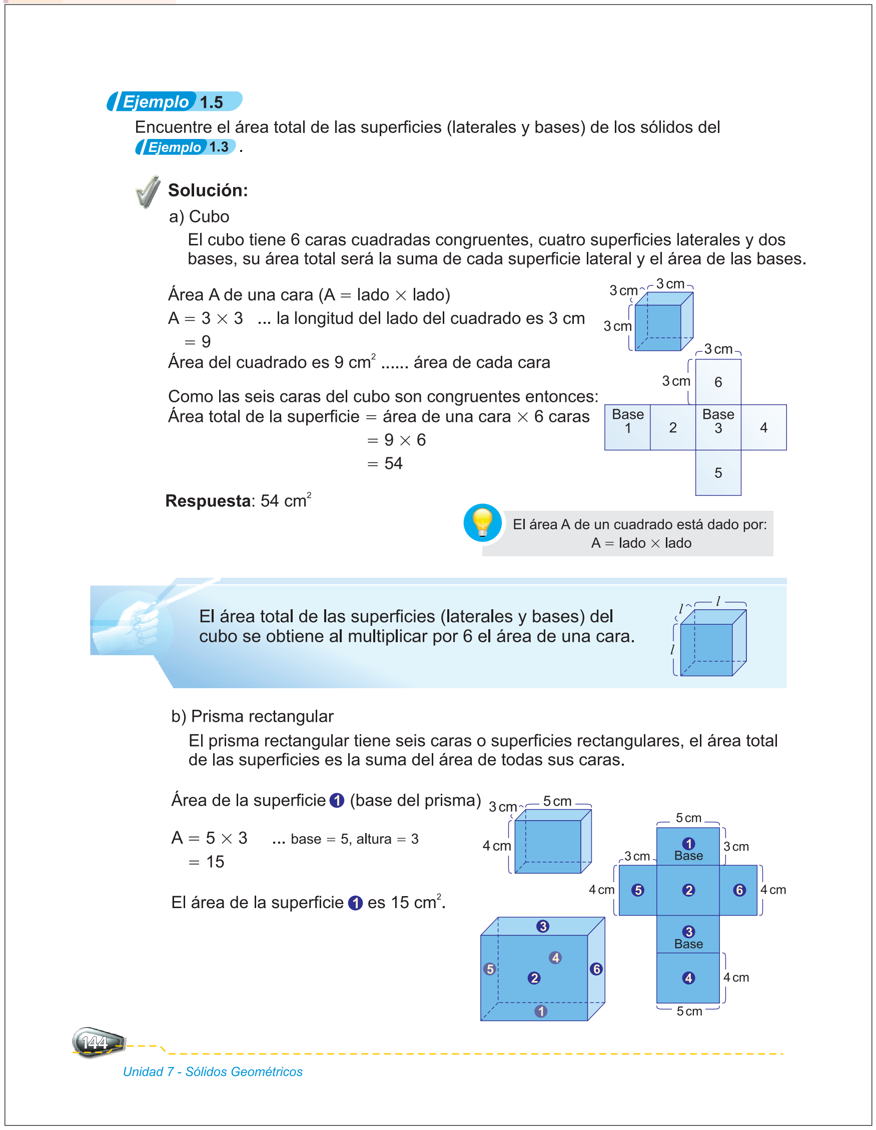
Unidad 7: Sólidos geométricos

Lección 1: (2/9) Áreas laterales y volumen de sólidos

Sección 2: Áreas laterales

Objetivos:

- Determinar la forma que tienen las superficies laterales de los prismas y de las pirámides.
- Calcular el área total (laterales y bases) de un prisma.



Ejemplo 1.5

Encuentre el área total de las superficies (laterales y bases) de los sólidos del **Ejemplo 1.3**.

Solución:

a) Cubo

El cubo tiene 6 caras cuadradas congruentes, cuatro superficies laterales y dos bases, su área total será la suma de cada superficie lateral y el área de las bases.

Área A de una cara (A = lado × lado)

A = 3 × 3 ... la longitud del lado del cuadrado es 3 cm

= 9

Área del cuadrado es 9 cm^2 ...... área de cada cara

Como las seis caras del cubo son congruentes entonces:

Área total de la superficie = área de una cara × 6 caras

= 9 × 6

= 54

Respuesta: 54 cm^2

El área A de un cuadrado está dado por: A = lado × lado

El área total de las superficies (laterales y bases) del cubo se obtiene al multiplicar por 6 el área de una cara.

b) Prisma rectangular

El prisma rectangular tiene seis caras o superficies rectangulares, el área total de las superficies es la suma del área de todas sus caras.

Área de la superficie ❶ (base del prisma)

A = 5 × 3 ... base = 5, altura = 3

= 15

El área de la superficie ❶ es 15 cm^2.

continúa en la siguiente página...

Unidad 7: Sólidos geométricos

Lección 1: (2/9) Áreas laterales y volumen de sólidos

Sección 2: Áreas laterales

Objetivos:
- Determinar la forma que tienen las superficies laterales de los prismas y de las pirámides.
- Calcular el área total (laterales y bases) de un prisma.

Área de la superficie 2 (cara lateral)

A = 5 × 4 ... base = 5, altura = 4
= 20

El área de la superficie 2 es 20 cm².

El área A de un rectángulo está dado por $A = bh$ donde b es la base y h es la altura del rectángulo.

Área de la superficie 5 (cara lateral)

A = 3 × 4 ... base = 3, altura = 4
= 12

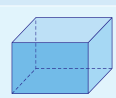
El área de la superficie 5 es 12 cm².

Como las superficies 1 y 3, 2 y 4, 5 y 6 son congruentes entonces el área total de las superficies está dada por:

Área total de la superficie = (área superficie 1) × 2 + (área superficie 2) × 2 + (área de la superficie 5) × 2
= 2 (área superficie 1 + área superficie 2 + área superficie 5)
= 2 (15 + 20 + 12)
= 94

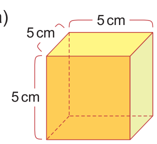
Respuesta: 94 cm²

El área total de las superficies (laterales y bases) de un prisma rectangular se obtiene al sumar el área de las tres superficies distintas y luego multiplicar esta suma por 2.

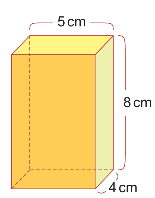


Ejercicio **1.4** Encuentre el área total superficial (laterales y bases) de los siguientes sólidos.

a)



b)

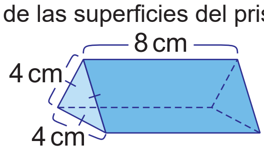


El área total de un prisma rectangular también se puede obtener sumando el área de todas sus caras.

Ejercicios adicionales

a) Encuentre el área total de las superficies de un cubo cuyo lado es 6 cm.

b) Encuentre el área total de las superficies del prisma triangular



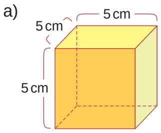
Solución

a) 216 cm² b) $3(8 \times 4) + 2[\frac{1}{2}(4 \times 2\sqrt{3})] = 96 + 8\sqrt{3}$ cm²

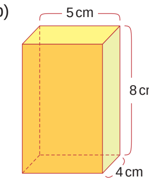
Indicador de logro

Calcule el área total de las superficies (laterales y bases) de las siguientes sólidos:

a)



b)



¿Cuál es la diferencia entre el cubo y el prisma rectangular?

¿Cuántas caras diferentes tiene el prisma rectangular?

¿De qué forma podemos encontrar el área total de las superficies?

* Concluir que la diferencia es que el cubo tiene sus seis caras congruentes y el prisma tiene 3 pares de caras congruentes entre sí.
* Indicar que calculen el área de las tres caras diferentes y luego sumen esas áreas y multipliquen la suma por dos
* Concluir en el resumen de LE.

5. Resolver *Ejercicio* **1.4**

(10 min)

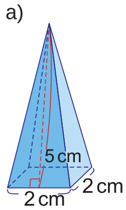
Solución

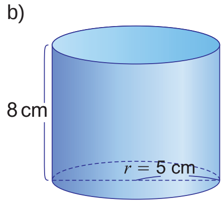
a) 150 cm²

b) 184 cm²

Indicador de logro

Encuentre el área total de las superficies laterales de las siguientes figuras:

a) 

b) 

Unidad 7: Sólidos geométricos

Lección 1: (3/9) Áreas laterales y volumen de sólidos

Sección 2: Áreas laterales

Objetivo: Encontrar el área total de las superficies laterales de las pirámides y de los cilindros.

1. Determinar la forma que tienen las caras laterales de una pirámide. *Ejemplo* **1.6**

(7 min)

* Mostrar el sólido de una pirámide triangular.

¿Qué forma tienen sus caras laterales?

* Dibujar las caras laterales de la pirámide triangular desde diferentes perspectivas.

Concluir que las caras laterales de la pirámide son triángulos.

* Hacer lo mismo para la pirámide cuadrangular.

* Explicar que la pirámide se nombra de acuerdo al polígono de la base.

2. Resolver *Ejercicio* **1.5**

(5 min)

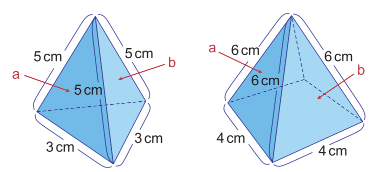
Solución

a) Superficies laterales: 2, 3, 4 y 5. Es pirámide cuadrangular

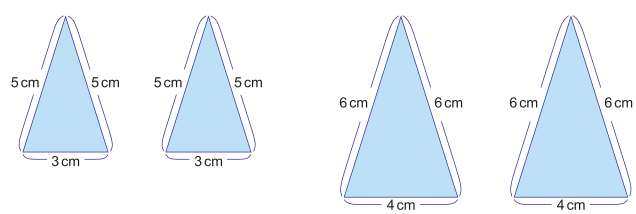
b) Superficies laterales: 2, 3 y 4. Es pirámide triangular.

Ejemplo **1.6**

Dibuje en su cuaderno el lado visto desde la dirección indicada por las flechas a y b de cada uno de los siguientes sólidos.
¿Qué forma tienen las superficies laterales de una pirámide triangular y de una pirámide cuadrangular?



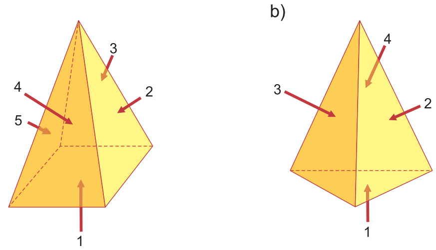
Solución:



Las superficies laterales de las pirámides triangulares y las pirámides cuadrangulares son triángulos.

Ejercicio **1.5** En las siguientes pirámides indique si los números señalan una base o una superficie lateral.
Identifique qué tipo de pirámide es.

a) b)



146 *Unidad 7 - Sólidos Geométricos*

continúa en la siguiente página...

Lección 1: (3/9) Áreas laterales y volumen de sólidos

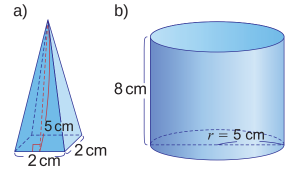
Sección 2: Áreas laterales

Objetivo: Encontrar el área total de las superficies laterales de las pirámides regulares y de los cilindros.

Indicador de logro

Encuentre el área total de las superficies laterales de las siguientes figuras:

a) b)

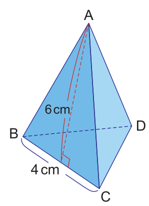


Ejemplo 1.7

Encuentre el área de cada superficie lateral de la pirámide cuya base es un triángulo equilátero y luego encuentre el área total de las superficies laterales (todas las caras laterales de la pirámide son congruentes).

Solución:

En la pirámide, los triángulos ABC, ACD y ABD son congruentes por lo tanto tienen la misma área, entonces:

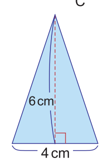


El área del ΔABC $= \frac{1}{2}$ (base $\times$ altura)

$= \frac{1}{2}$ (4×6) ... base = 4, altura = 6

$= 12$

El área de cada superficie lateral es 12 cm^2.



Luego para encontrar el área total de las superficies laterales de la pirámide se debe considerar que hay tres triángulos congruentes, por lo tanto el área total es:

Área total de las superficies laterales = (área de cada superficie lateral) $\times$ 3 caras laterales

$= 12 \times 3$

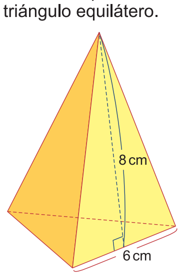
$= 36$

El área A de un triángulo está dada por: $A = \frac{1}{2}\,bh$ donde b es la base y h es la altura del triángulo.

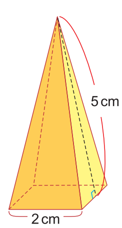
Respuesta: El área total de la superficies laterales es 36 cm^2.

Ejercicio 1.6 Encuentre el área de las superficies laterales de las siguientes pirámides. (Todas los caras laterales de la pirámide son congruentes).

a) La base de la pirámide es un triángulo equilátero.



b) La base de la pirámide es un cuadrado



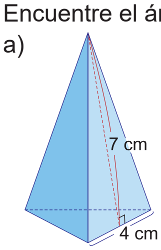
147

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

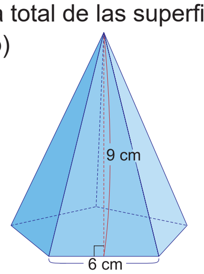
Ejercicios adicionales

Encuentre el área total de las superficies laterales de las siguientes pirámides.

a)



b)



Solución

a) 42 cm^2 b) 135 cm^2

3. Encontrar el área total de las superficies laterales de una pirámide triangular

Ejemplo 1.7

(7 min)

* Indicar que observen la pirámide dada en el ejemplo (se recomienda al docente presentar un dibujo de la pirámide del ejemplo en la pizarra y que el estudiante no consulte el LE).

¿Cómo son las caras laterales de la pirámide?

¿Qué se hace para calcular el área de las superficies laterales de esta pirámide?

Concluir que como son triángulos congruentes, se calcula el área de un triángulo y se multiplica por 3.

¿Cómo se calcula el área de un triángulo?

* Indicar que el área de un triángulo se calcula mediante A = $\frac{1}{2}$ (base x altura).

* Pedir que calculen el área total de la superficie lateral de la pirámide.

* Aclarar que no siempre se multiplica por 3 que eso depende del número de caras laterales que tenga la pirámide.

4. Resolver Ejercicio 1.6

(8 min)

Solución

a) 72 cm^2

b) 20 cm^2

continúa en la siguiente página...

Unidad 7: **Sólidos geométricos**

Lección 1: (3/9) Áreas laterales y volumen de sólidos

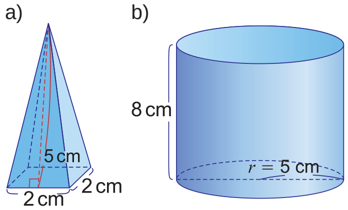
Sección 2: Áreas laterales

Objetivo: Encontrar el área total de las superficies laterales de las pirámides regulares y de los cilindros.

Indicador de logro

Encuentre el área total de las superficies laterales de las siguientes figuras:

a) b)



5. Encontrar el área de la superficie lateral del cilindro.

Ejemplo **1.8**

(10 min)

* Mostrar un dibujo de un cilindro y su desarrollo.

  ¿Qué forma tiene la superficie lateral del cilindro?
* Concluir la superficie lateral del cilindro es un rectángulo.

  ¿Cuáles son las medidas de los lados del rectángulo?
* Hacer que se den cuenta que su ancho es la altura del cilindro y su largo es la longitud o perímetro del círculo de la base.
* Indicar que calculen la base o el largo del rectángulo usando la longitud de la circunferencia $2\pi r$.

  Concluir que la longitud de la base del rectángulo es 6π cm.

  ¿Cómo se encuentra el área de la superficie lateral del cilindro?

  Concluir que se calcula el área del rectángulo.
* Calcular el área del rectángulo.

6. Resolver *Ejercicio* **1.7**

(8 min)

Solución

a) 40π cm²

b) 80π cm²

Ejemplo **1.8**

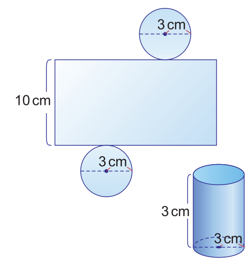
Dada la figura de un cilindro cuyo radio de la base mide 3 cm y su altura 10 cm

a) Observe su desarrollo, ¿qué figuras geométricas lo forman?

b) Encuentre el área de la superficie lateral del cilindro.

Solución:

a) Observe que en el desarrollo del cilindro se tienen tres figuras geométricas: un rectángulo que representa la superficie lateral del cilindro y dos círculos que representan sus bases. (Observe página 142)



b) Para obtener el área de la superficie lateral del cilindro se necesita conocer las longitudes del rectángulo.

La longitud de la circunferencia es la base del rectángulo y está dado por:

Longitud de la circunferencia $= 2 \times \pi \times$ radio

$= 2 \times \pi \times 3$

$= 6\pi$

La longitud C de la circunferencia es lo mismo que el perímetro del círculo y está dado por: C $= 2\pi r$ donde r es el radio.

La base del rectángulo es 6π cm y su altura es 10 cm.

Área de la superficie lateral del cilindro $=$ área del rectángulo

$=$ (base) $\times$ (altura)

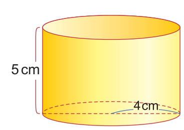
$= 6\pi \times 10$

$= 60\pi$

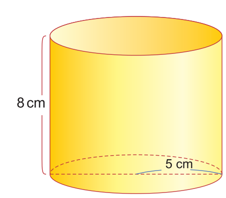
Respuesta: El área total de la superficie lateral es 60π cm².

Ejercicio **1.7** Encuentre el área de la superficie lateral de los siguientes cilindros.

a)



b)

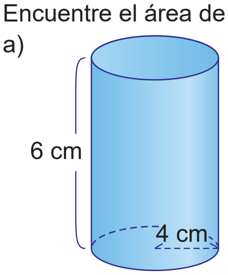


148 *Unidad 7 - Sólidos Geométricos*

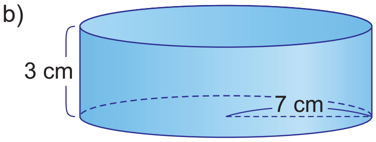
Ejercicios adicionales

Encuentre el área de la superficie lateral de los siguientes cilindros

a)



b)



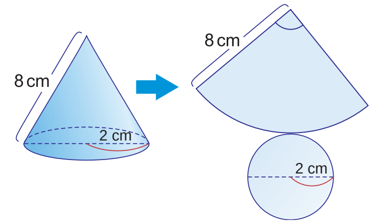
Solución

a) 48π cm² b) 42π cm²

Objetivo: Calcular el área de la superficie lateral del cono.

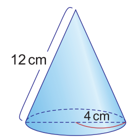
Indicador de logro

Aplicar la proporcionalidad para encontrar el área del sector circular que se forma al desarrollar la superficie del cono.



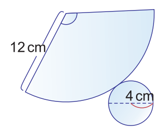
Ejemplo 1.9

Dada la figura del cono a la derecha
a) Observe su desarrollo. ¿Qué figuras geométricas lo forman?
b) Encuentre el área de la superficie lateral del cono.



Solución:

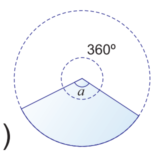
a) Observe que en el desarrollo del cono se tiene un sector circular, donde el círculo que lo contiene tiene radio 12 cm y representa la superficie lateral del cono, además se tiene un círculo que representa la base del cono con un radio de 4 cm. (Observe página 142)



b) Como la superficie lateral del cono es un sector circular para encontrar su área se necesita la medida del ángulo del sector circular.

Observe la relación entre la longitud del arco y la longitud de la circunferencia de radio 4 cm.

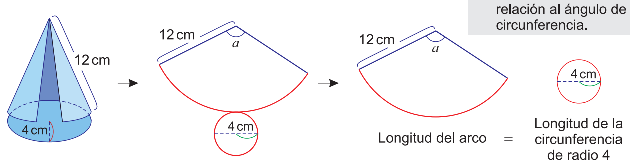
Si a es la medida del ángulo del sector circular entonces:



$$a : 360° = \left(\frac{\text{longitud del arco}}{\text{circunferencia de radio 12 cm}}\right) : \left(\frac{\text{longitud de la}}{\text{circunferencia de radio 12 cm}}\right)$$

La longitud del arco de la circunferencia de radio 12 cm es igual a la longitud de la circunferencia de radio 4 cm.

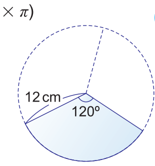
La razón a : 360° surge de comparar el ángulo del sector circular en relación al ángulo de la circunferencia.



$$a : 360° = \left(\frac{\text{longitud de la}}{\text{circunferencia de radio 4}}\right) : \left(\frac{\text{longitud de la}}{\text{circunferencia de radio 12}}\right)$$

$$a : 360° = (2 \times 4 \times \pi) : (2 \times 12 \times \pi)$$
$$a : 360° = 4 : 12$$
$$12a = 360° \times 4$$
$$a = 360° \times \frac{4}{12}$$
$$= 360° \times \frac{1}{3}$$
$$= 120°$$

a: 360° $= (\cancel{2} \times 4 \times \pi) : (\cancel{2} \times 12 \times \pi)$
$= (4 \times \cancel{\pi}) : (12 \times \cancel{\pi})$
$= 4 : 12$



El sector circular representa $\frac{1}{3}$ del círculo de radio 12 cm.

El ángulo central del sector circular del cono mide 120°.

149

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

* Recordar lo visto en 6to grado que se puede establecer una razón entre el ángulo del sector circular y 360° y que esta es igual a la razón entre las longitudes de la circunferencia que contienen el sector y la circunferencia de la base.
* Concluir en la expresión de LE y pedir que despejen para el ángulo del sector.
* Concluir que el sector circular es $\frac{1}{3}$ del área del círculo.
* Calcular el área lateral del cono como esta en el LE.

1. Encontrar el área de la superficie lateral de un cono.

Ejemplo 1.9

(25 min)

* Presentar un dibujo de un cono y pedir que imaginen su desarrollo.

  ¿Cuál es la forma de la superficie lateral del cono?
* Mostrar el desarrollo del cono y concluir que es un sector circular.

  ¿Cuáles son los elementos del sector circular?
* Explicar que es ángulo, arco y radio.
* De acuerdo a las medidas que tiene el dibujo del cono presentado, ¿qué dimensiones tiene el sector circular?
* Hacer que se den cuenta que la medida del radio del sector circular es la medida del radio del círculo que lo contiene y la longitud de la circunferencia de la base del cono es la longitud del arco (se puede confirmar mediante su desarrollo).
* Presentar el dibujo de la relación entre el cono y su desarrollo dado en LE.

  ¿Cómo podemos calcular el ángulo del sector circular?

continúa en la siguiente página...

2. **Resolver** *Ejercicio* **1.8**

(20 min)

Solución

a: la medida del ángulo del sector circular

A: área de la superficie lateral

a)

$a : 360^o = 2 \times 2 \times \pi : 2 \times 8 \times \pi$

$a : 360^o = 2 : 8$

$a = 90^o$

$A = 8^2 \times \pi \times \frac{90^0}{360^0}$

$= 16\pi$

Respuesta: 16π cm^2

b)

$a : 360^o = 2 \times 4 \times \pi : 2 \times 10 \times \pi$

$a : 360^o = 4 : 10$

$a = 144^o$

$A = 10^2 \times \pi \times \frac{144^o}{360^o}$

$= 40\pi$

Respuesta: 40π cm^2

[Hasta aquí Clase 4]

[Desde aquí Clase 5]

1. **Encontrar el área de la superficie lateral de un cono cuando se tiene el radio de la base y su altura.**

Ejemplo **1.10**

(15 min)

* Presentar el dibujo del cono dado en el LE con sus medidas.

  ¿Qué dimensiones se nos presentan en el cono?

  Concluir que se tiene la altura y el radio de la base del cono.

* Para encontrar el ángulo del sector circular, ¿qué datos necesitamos?

  Concluir que se necesita el radio del sector circular y el radio de la base del cono.

  ¿Cómo podemos calcular el radio del sector circular?

Unidad 7: Sólidos geométricos

Lección 1: Áreas laterales y volumen de sólidos
(5/9)

Sección 2: Áreas laterales

Objetivo: Calcular el área de la superficie lateral del cono y de la esfera.

El área A de la superficie lateral del cono es el área del sector circular.

$A = 12^2 \times \pi \times \frac{120^o}{360^o}$ ... el área del círculo de radio 12 por la razón del ángulo del sector circular y del ángulo de la circunferencia.

$= 144 \times \pi \times \frac{1}{3}$ ... el área del sector circular es $\frac{1}{3}$ del área del círculo que lo contiene

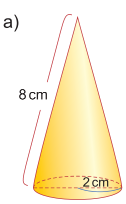
$= 48\pi$

El área A de un círculo es πr^2 donde r es el radio.

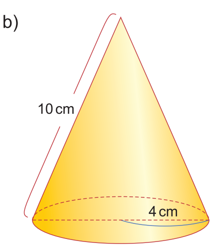
Respuesta: El área de la superficie lateral del cono es 48π cm^2.

Ejercicio **1.8** Encuentre el área de la superficie lateral de los siguientes conos.

a)



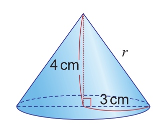
b)



Ejemplo **1.10**

Encuentre el área de la superficie lateral del cono de la derecha.

Solución:



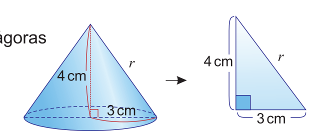
En el cono dado se puede observar que no se tiene la medida del radio del círculo que contiene el sector circular, sin embargo se puede encontrar considerando un triángulo rectángulo.

$3^2 + 4^2 = r^2$ ... Aplicar teorema de Pitágoras

$r^2 = 25$ como $r > 0$

$r = \sqrt{25}$

$r = 5$



El radio del sector circular es 5 cm.

150 Unidad 7 - Sólidos Geométricos

* Hacer que noten que en el cono se forma un triángulo rectángulo donde el radio de la base y su altura son los catetos y el radio del círculo que contiene el sector circular es la hipotenusa.
* Calcular el radio del círculo que contiene el sector circular mediante el teorema de Pitágoras.

continúa en la siguiente página...

Unidad 7: **Sólidos geométricos**

Lección 1: (5/9) Áreas laterales y volumen de sólidos

Sección 2: Áreas laterales

Objetivo: Calcular el área de la superficie lateral del cono y de la esfera.

Si a es la medida del ángulo del sector circular entonces:

$a : 360° = \left(\text{longitud de la circunferencia de radio } 3\right) : \left(\text{longitud de la circunferencia de radio } 5\right)$

$a : 360° = (2 \times 3 \times \pi) : (2 \times 5 \times \pi)$

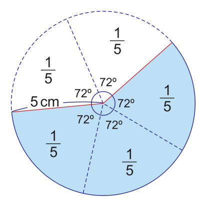
$a : 360° = 3 : 5$

$5a = 360° \times 3$

$a = 360° \times \frac{3}{5}$

$= 72° \times 3$

$= 216°$



El ángulo del sector circular es 216°.

El área A de la superficie lateral del cono, es el área del sector circular.

$A = 5^2 \times \pi \times \frac{216°}{360°}$

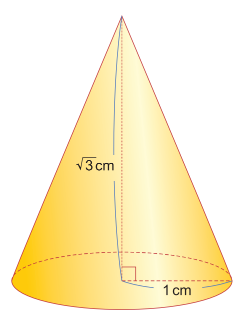
Antes de multiplicar fracciones simplifique si se puede.

$= 25 \times \pi \times \frac{3}{5}$ ...... el área del sector circular es $\frac{3}{5}$ del área del círculo que lo contiene

$= 15\pi$

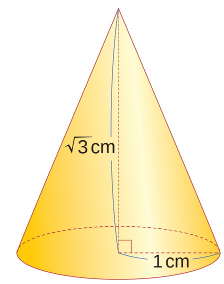
Respuesta: El área de la superficie lateral del cono es 15π cm^2

Ejercicio **1.9** Encuentre el área de la superficie lateral del siguiente cono.



Indicador de logro

Encuentre el área de la superficie lateral del siguiente cono.



* Indicar que calculen el ángulo del sector circular
* Pedir a los estudiantes que calculen el área del sector circular.

2. Resolver *Ejercicio* **1.9**

(10 min)

Solución

Sea r la longitud de la generatriz del cono.

$1^2 + (\sqrt{3})^2 = r^2$

$r^2 = 4$, como $r > 0$

$r = 2$

Sea a la medida del ángulo del sector circular.

$a : 360° = 2 \times 1 \times \pi : 2 \times 2 \times \pi$

$a : 360° = 1 : 2$

$a = 180°$

El área A de la superficie lateral del cono es:

$A = 2^2 \times \pi \times \frac{180°}{360°}$

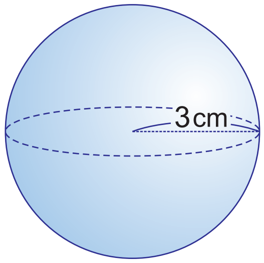
$= 2\pi$

Respuesta: 2π cm^2

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Encuentre el área de la esfera cuyo radio mide 3 cm.



3. Conocer la fórmula para calcular el área de la superficie de la esfera.

(5 min)

Explicar que la superficie de la esfera la forman todos los puntos que están a la misma distancia del centro.

* Concluir con el resumen del LE.
* Dar la fórmula de la superficie de la esfera del LE.

4. Encontrar el área de la superficie de una esfera dado su radio. *Ejemplo* **1.11**

(10 min)

¿Qué datos se necesitan para aplicar la fórmula de la superficie de la esfera?

* Presentar el dibujo de la esfera que aparece en el LE.
* Concluir que es necesario conocer su radio.
* Indicar que apliquen la fórmula y calculen el área de la superficie de la esfera.

5. Resolver *Ejercicio* **1.10**

(5 min)

Solución

a) 36π cm^2

b) 400π cm^2

Unidad 7: **Sólidos geométricos**

Lección 1: (5/9) Áreas laterales y volumen de sólidos

Sección 2: Áreas laterales

Objetivo: Calcular el área de la superficie lateral del cono y la esfera.

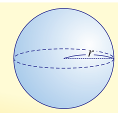
La **superficie de la esfera** la forman los puntos del espacio que distan lo mismo de un punto fijo llamado centro. La distancia es el radio.

El área de la superficie de la esfera se encuentra con la siguiente fórmula.

El **área A de la superficie de la esfera** se obtiene con la fórmula:

$$A = 4\pi r^2$$

donde r es el radio de la esfera.



Ejemplo **1.11**

Encuentre el área A de la superficie de la esfera cuyo radio mide 5 cm.

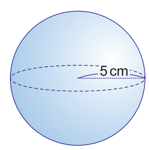
Solución:

$A = 4\pi r^2$

$= 4\pi(5)^2$

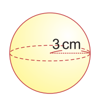
$= 100\pi$

Respuesta: 100π cm^2

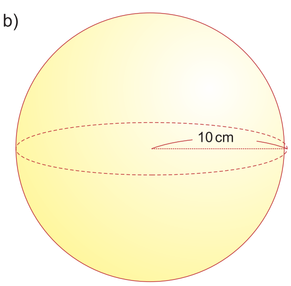


Ejercicio **1.10** Encuentre el área de la superficie de las siguientes esferas.

a)



b)



152

Unidad 7 - Sólidos Geométricos

Unidad 7: Sólidos geométricos

***Lección 1:* (6/9)** Áreas laterales y volumen de sólidos

Sección 3: Volumen de cilindros, pirámides, conos y esferas

Objetivo: Calcular el volumen de cilindros.

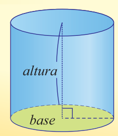
Sección 3: Volumen de cilindros, pirámides, conos y esferas

Volumen del cilindro

El cálculo del volumen del cilindro se aprendió en 6to grado.

Puedes consultar en la unidad 8, lección 2 de 6to grado.

Volumen del cilindro = (área de la base) × (altura)



Ejemplo 1.12

Encuentre el volumen V del cilindro de la derecha.

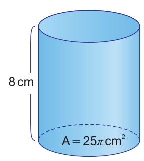
Solución:

V = (área de la base) × (altura)

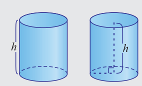
$= 25\pi \times 8$

$= 200\pi$

Respuesta: 200π cm^3

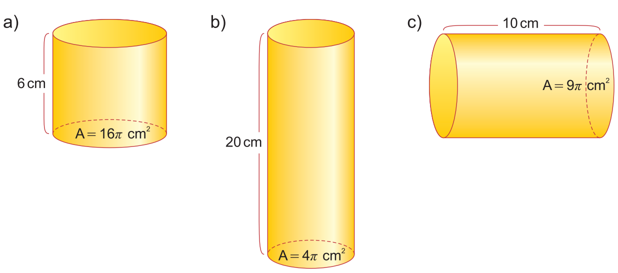


La altura del cilindro se puede considerar:



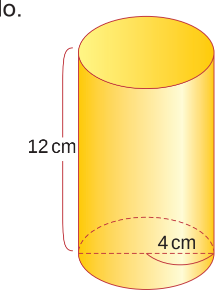
Ejercicio 1.11 Encuentre el volumen de los siguientes cilindros dado el área de la base y su altura.

a) b) c)



Indicador de logro

Calcular el volumen del siguiente sólido.



1. **Encontrar el volumen del cilindro. *Ejemplo* 1.12**

   (15 min)

   * Este tema se estudió en 6to grado por lo que basta con recordar la fórmula y la manera de aplicarla.

   ¿Cuál es la fórmula para encontrar el volumen de un cilindro?

   * Concluir en el resumen del LE.

   * Presentar el dibujo del cilindro del *Ejemplo* 1.12 y sus dimensiones.

   * Indicar que apliquen la fórmula para encontrar el volumen del cilindro dado en el *Ejemplo* 1.12

   * Aclarar que la altura del cilindro se puede tomar considerando la forma de la definición del volumen o considerando la forma de la figura que aparece en el *Ejemplo* 1.12

2. **Resolver *Ejercicio* 1.11**

   (10 min)

   Solución

   a) 96π cm^3

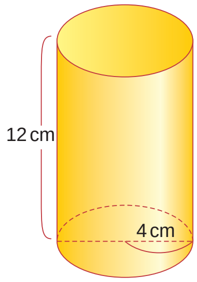
   b) 80π cm^3

   c) 90π cm^3

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Calcular el volumen del siguiente sólido.



3. Encontrar el volumen de un cilindro dada su altura y el radio de la base.
Ejemplo **1.13**

(10 min)

* Presentar un dibujo de un cilindro en la pizarra con las dimensiones que indica el ejemplo (se sugiere llevar la figura preparada)

¿Qué dimensiones tiene el cilindro?

¿Se sabe cuál es el área de la base?

* Hacer que el estudiante se dé cuenta que para encontrar el volumen del cilindro es necesario encontrar primero el área de la base.

¿Cómo se puede encontrar el área de la base?

* Pedir que calculen el área del círculo de la base mediante la fórmula A = πr^2.

* Indicar que calculen el volumen del cilindro dado.

4. Resolver *Ejercicio* **1.12**

(10 min)

Solución

a) 192π cm^3

b) 720π cm^3

c) 75π cm^3

Unidad 7: **Sólidos geométricos**

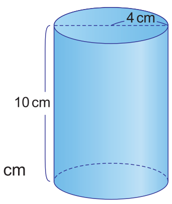
Lección 1: Áreas laterales y volumen de sólidos
(6/9)

Sección 3: Volumen de cilindros, pirámides, conos y esferas

Objetivo: Calcular el volumen de cilindros.

Ejemplo **1.13**

Encuentre el volumen V del cilindro si el radio de la base mide 4 cm y su altura mide 10 cm.



Solución:

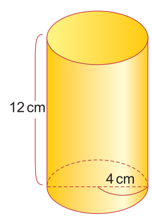
V = (área de la base) × (altura)
= (π × (radio)^2) × (altura)
= (π × 4^2) × 10...... el radio del círculo de la base es 4 cm y la altura del cilindro es 10 cm
= 16π × 10
= 160π

Respuesta: 160π cm^3

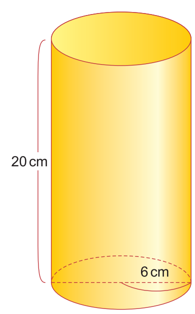
La base de un cilindro es un círculo y el área A de un círculo se obtienen mediante la fórmula:
A = πr^2
donde r es el radio del círculo.

Ejercicio **1.12** Encuentre el volumen de los siguientes cilindros dado su radio.

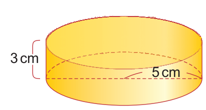
a)



b)



c)



Ejercicios adicionales

a) Encuentre el volumen de un cilindro cuya área de la base es 49π cm^2 y su altura es 15 cm.

b) Encuentre el volumen de un cilindro cuya altura es 9 cm y el radio de la base 10 cm.

Ejercicio de desafío:

¿Cuál es la altura de un cilindro si el radio de la base es 5 cm y su volumen es 250π cm^3

Solución a) 735π cm^3 b) 900π cm^3 Desafío: altura = 10 cm

Unidad 7: **Sólidos geométricos**

Lección 1: (7/9) Áreas laterales y volumen de sólidos

Sección 3: Volumen de cilindros, pirámides, conos y esferas

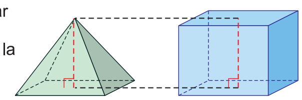
Objetivo: Calcular el volumen de pirámides.

Volumen de la pirámide

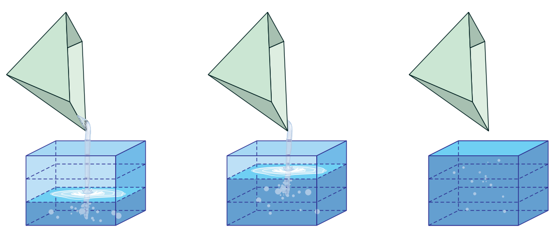
En 6to grado se aprendió como calcular el volumen V de un prisma con la fórmula V = (área de la base) × (altura), en este grado se estudiará como calcular el volumen de una pirámide, por lo que se analizará la relación entre la pirámide y el prisma.

Entre el volumen de una pirámide y el volumen de un prisma que tiene la misma base y la misma altura que la pirámide existe una relación la cual se estudia a continuación:

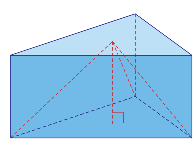
Se tienen 2 recipientes, un prisma cuadrangular y una pirámide cuadrangular. El prisma y la pirámide tienen la misma base y la misma altura.



Si se llena la pirámide de agua y se deposita en el prisma, ¿cuántas veces necesita llenar la pirámide con agua y depositarla en el prisma para llenarlo?



Como se ve en la figura el volumen del prisma es 3 veces el volumen de la pirámide, en forma análoga, el volumen de cada pirámide es la tercera parte del volumen del prisma.

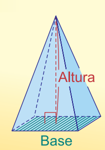


$$\text{Volumen de la pirámide} = \frac{1}{3} \times (\text{volumen del prisma})$$

Esta relación se establece para cualquier prisma de cualquier base y será válida solo si los dos sólidos (la pirámide y el prisma) tienen la misma base y la misma altura.

Volumen de la pirámide $= \frac{1}{3} \times$ (área de la base) × (altura)

La base de la pirámide puede ser cualquier polígono.



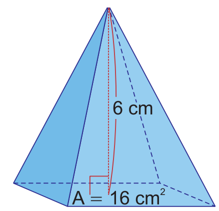
¿Qué se puede concluir del volumen de la pirámide en relación al volumen del prisma?
Concluir que el volumen del prisma es tres veces el volumen de la pirámide por lo tanto el volumen de la pirámide es $\frac{1}{3}$ × (volumen del prisma).

¿Cuál es la condición para que esta relación se pueda dar entre el prisma y la pirámide?
Concluir que deben tener la misma base y la misma altura.

Concluir
Volumen de la pirámide = $\frac{1}{3}$ × (área de la base) × altura

Indicador de logro

Encuentre el volumen de pirámides como:



1. **Encontrar la fórmula del volumen de la pirámide.**

   (15 min)

   Antes de iniciar esta clase pedir como tarea a los estudiantes que traigan una pirámide cuadrangular y un prisma cuadrangular con la misma base y la misma altura. Quitar la cartulina de la base de la pirámide y de una de las bases del prisma es decir que queden como recipientes. (las medidas el docente las escoge) y una bolsa de 1 libra de arroz (esto puede ser arena o papel confetis).

   (es preferible que el docente prepare con anticipación este material y que se los preste a los estudiantes)

* Mostrar la pirámide y el prisma.

¿Qué características en común tiene la pirámide con el prisma?

* Concluir que tienen la misma base y la misma altura.

¿Qué relación existe entre el volumen del prisma y de esta pirámide?

* Llenar la pirámide con el arroz o la arena y depositarlo en el prisma.

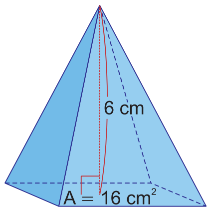
¿Cuántas veces es necesario hacer este proceso para que el prisma se llene?

* Hacer que se den cuenta que tres veces se llena la pirámide para llenar el prisma.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Encuentre el volumen de pirámides como:



2. Encontrar el volumen de una pirámide dada el área de la base y su altura. *Ejemplo* **1.14**

(7 min)

* Mostrar el dibujo de una pirámide con las medidas de su altura y área de la base como lo indica el LE.

¿Qué dimensiones se nos da en la pirámide?

* Aplicar la fórmula y concluir en el volumen de la pirámide.

3. Resolver *Ejercicio* **1.13**

(8 min)

Solución

a) 32 cm³

b) $24\sqrt{3}$ cm³

4. Encontrar el volumen de una pirámide. *Ejemplo* **1.15**

(10 min)

* Mostrar el dibujo de una pirámide con las medidas que indica el LE.

* Hacer que en este caso se den cuenta que para aplicar la fórmula del volumen de la pirámide es necesario encontrar el área de la base.

¿Qué necesitamos para encontrar el área de la base?

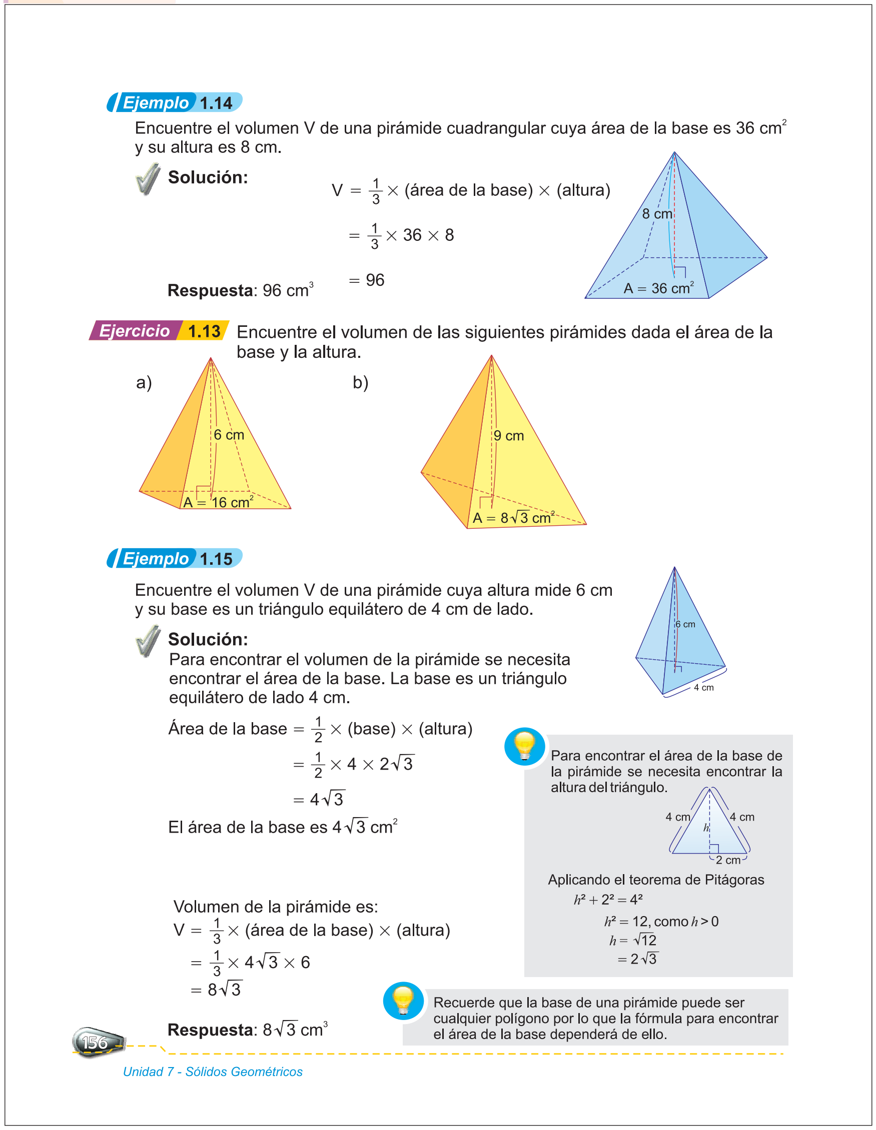
* Concluir que es necesario tener la base del triángulo y su altura pero que como esta no se tiene se encuentra mediante el Teorema de Pitágoras.

Unidad 7: Sólidos geométricos

Lección 1: (7/9) Áreas laterales y volumen de sólidos

Sección 3: Volumen de cilindros, pirámides, conos y esferas

Objetivo: Calcular el volumen de pirámides.



Ejemplo **1.14**

Encuentre el volumen V de una pirámide cuadrangular cuya área de la base es 36 cm² y su altura es 8 cm.

Solución:

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{área de la base}) \times (\text{altura})$$
$$= \frac{1}{3} \times 36 \times 8$$
$$= 96$$

Respuesta: 96 cm³

Ejercicio **1.13** Encuentre el volumen de las siguientes pirámides dada el área de la base y la altura.

a)

b)

Ejemplo **1.15**

Encuentre el volumen V de una pirámide cuya altura mide 6 cm y su base es un triángulo equilátero de 4 cm de lado.

Solución:

Para encontrar el volumen de la pirámide se necesita encontrar el área de la base. La base es un triángulo equilátero de lado 4 cm.

$$\text{Área de la base} = \frac{1}{2} \times (\text{base}) \times (\text{altura})$$
$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3}$$
$$= 4\sqrt{3}$$

El área de la base es $4\sqrt{3}$ cm²

Para encontrar el área de la base de la pirámide se necesita encontrar la altura del triángulo.

Aplicando el teorema de Pitágoras

$h^2 + 2^2 = 4^2$

$h^2 = 12$, como $h > 0$

$h = \sqrt{12}$

$= 2\sqrt{3}$

Volumen de la pirámide es:

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{área de la base}) \times (\text{altura})$$
$$= \frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times 6$$
$$= 8\sqrt{3}$$

Respuesta: $8\sqrt{3}$ cm³

Recuerde que la base de una pirámide puede ser cualquier polígono por lo que la fórmula para encontrar el área de la base dependerá de ello.

* Calcular la altura y el área del triángulo de la base.

* Encontrar el volumen de la pirámide.

* Es importante hacer notar al estudiante que el área de la base de la pirámide dependerá del polígono de la base.

5. Resolver *Ejercicio* **1.14** *(5 min)*
(Este ejercicio esta en la siguiente página)
Solución
4 cm³

Unidad 7: Sólidos geométricos

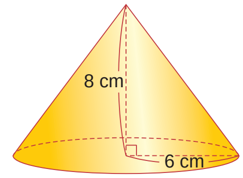
Lección 1: (8/9) Áreas laterales y volumen de sólidos

Sección 3: Volumen de cilindros, pirámides, conos y esferas

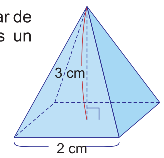
Objetivo: Calcular el volumen de conos.

Indicador de logro

Encuentre el volumen del siguiente conos.



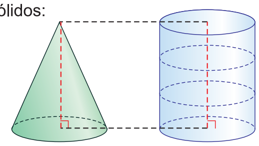
Ejercicio 1.14 Encuentre el volumen V de la pirámide cuadrangular de la derecha cuya altura mide 3 cm y su base es un cuadrado de lado 2 cm.

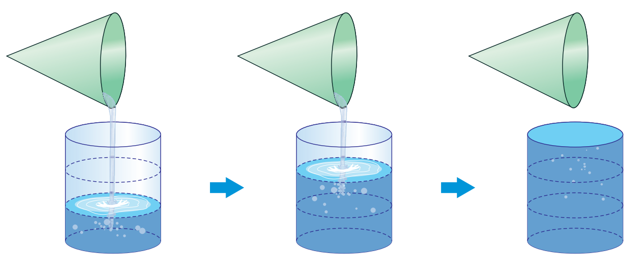


Volumen del cono

Al igual que se establece una relación entre la pirámide y el prisma que tienen la misma base y la misma altura, también se establece una relación entre el cilindro y el cono que tienen la misma base y la misma altura.
A continuación observe la relación entre ambos sólidos:

Se tienen 2 recipientes, un cilindro y un cono.
El cilindro y el cono tienen la misma base y la misma altura.
Si se llena el cono de agua y se deposita en el cilindro, ¿cuántas veces necesita llenar el cono con agua y depositarla en el cilindro para llenarlo?



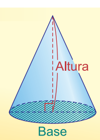


Como se ve en la figura el volumen del cilindro es 3 veces el volumen del cono, en forma análoga, el volumen del cono es la tercera parte del volumen del cilindro.

$$\text{Volumen del cono} = \frac{1}{3} \times (\text{volumen del cilindro})$$
$$= \frac{1}{3} \times (\text{área de la base}) \times (\text{altura})$$

Esta relación es válida solo si los dos sólidos (el cono y el cilindro) tienen la misma base y la misma altura.

Volumen del cono $= \frac{1}{3} \times$ (área de la base) $\times$ (altura)



¿Qué se puede concluir del volumen del cilindro en relación al volumen del cono?

* Concluir que el volumen del cilindro es tres veces el volumen del cono por lo tanto el volumen del cono es $\frac{1}{3}$ × (volumen del cilindro).
* ¿Cuál es la condición para que esta relación se pueda dar entre el cilindro y el cono?
  Concluir que deben tener la misma base y la misma altura.
* Concluir volumen del cono = $\frac{1}{3}$ × (área de la base) × altura

1. Deducir la fórmula para encontrar el volumen del cono.

(25 min)

Antes de comenzar la clase, pedir a los estudiantes traer como tarea un cono y un cilindro con la misma base y la misma altura. Quitar la cartulina de la base del cono y una de las bases del cilindro es decir que queden como recipientes. (las medidas el docente las escoge) y una bolsa de 1 libra de arroz (esto puede ser arena o papel confetis)

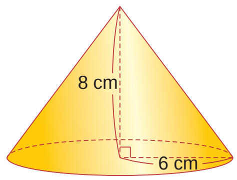
(es preferible que el docente prepare con anticipación este material y que se los preste a los estudiantes).

* Mostrar el cono y el cilindro.
  ¿Qué características en común tiene el cono y el cilindro?
* Concluir que tienen la misma base y la misma altura.
  ¿Qué relación existe entre el volumen del cilindro y del cono?
* Llenar el cono con el arroz o la arena y depositarlo en el cilindro. Pedir que observen que sucede.
  ¿Cuántas veces es necesario hacer este proceso para que el cilindro se llene?
* Hacer que se den cuenta que tres veces se debe llenar el cono para llenar el cilindro.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Encuentre el volumen del siguiente conos.



2. Encontrar el volumen de un cono dada el área de la base y su altura. *Ejemplo* **1.16**

(10 min)

* Mostrar el dibujo de un cono con las medidas de su altura y área de la base como lo indica el LE.

¿Qué dimensiones se nos da en el cono?

* Aplicar la fórmula y concluir con el volumen del cono.

3. Resolver *Ejercicio* **1.15**

(10 min)

Solución

a) 8π cm^3

b) 64π cm^3

[Hasta aquí Clase 8]

[Desde aquí Clase 9]

1. Encontrar el volumen de un cono. *Ejemplo* **1.17**

(10 min)

* Mostrar el dibujo de un cono con las medidas que indica el LE.

* Hacer que se den cuenta que para aplicar la fórmula del volumen del cono es necesario encontrar primero el área de la base.

¿Qué necesitamos para encontrar el área de la base?

* Indicar que encuentren el área de la base dado el radio.

* Pedir que calculen el volumen del cono.

Unidad 7: Sólidos geométricos

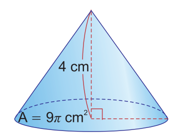
Lección 1: (9/9) Áreas laterales y volumen de sólidos

Sección 3: Volumen de cilindros, pirámides, conos y esferas

Objetivo: Calcular el volumen de conos.

Ejemplo **1.16**

Encuentre el volumen V del cono de la derecha cuya área de la base es 9π cm^2 y su altura es 4 cm.



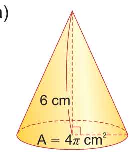
Solución:

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{área de la base}) \times (\text{altura})$$
$$= \frac{1}{3} \times 9\pi \times 4$$
$$= 12\pi$$

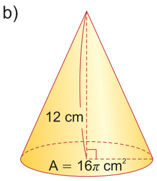
Respuesta: 12π cm^3

Ejercicio **1.15** Encuentre el volumen de los siguientes conos dado el área de la base y su altura.

a)

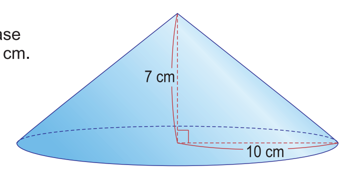


b)



Ejemplo **1.17**

Encuentre el volumen V del cono cuya base tiene un radio de 10 cm y una altura de 7 cm.



Solución:

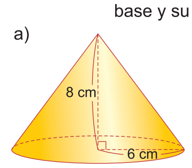
$$V = \frac{1}{3} \times (\text{área de la base}) \times (\text{altura})$$
$$= \frac{1}{3} \times (10^2 \times \pi) \times 7$$
$$= \frac{700}{3}\pi$$

Respuesta: $\frac{700}{3}\pi$ cm^3

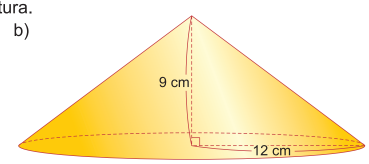
La base del cono es un círculo y su área A se calcula mediante la fórmula: $A = \pi r^2$ donde r es el radio.

Ejercicio **1.16** Encuentre el volumen de los siguientes conos dado el radio de la base y su altura.

a)



b)



2. Resolver *Ejercicio* **1.16** *(10 min)*

Solución

a) 96π cm^3

b) 432π cm^3

continúa en la siguiente página...

Unidad 7: Sólidos geométricos

Lección 1: Áreas laterales y volumen de sólidos
(9/9)

Sección 3: Volumen de cilindros, pirámides, conos y esferas

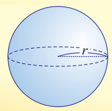
Objetivo: Calcular el volumen de esferas.

Volumen de la esfera

El **Volumen V de la esfera** se calcula con la fórmula:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

donde r es el radio de la esfera.

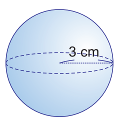


Ejemplo 1.18

Encuentre el volumen de la esfera cuyo radio mide 3 cm.

Solución:

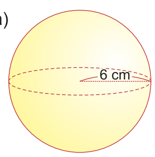
$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$
$$= \frac{4\pi (3)^3}{3}$$
$$= 36\pi$$



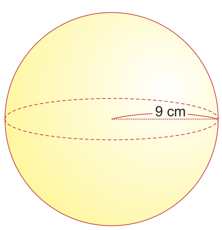
Respuesta: 36π cm^3

Ejercicio 1.17 Encuentre el volumen de las siguientes esferas.

a)



b)

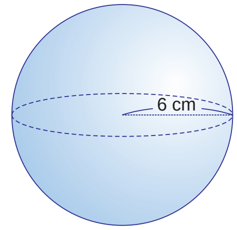


159

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

Indicador de logro

Encuentre el volumen de esferas como:



3. Conocer la fórmula para calcular el volumen de la esfera.

(10 min)

* Explicar que el volumen de la esfera se calcula mediante la fórmula planteada en LE.

4. Encontrar el volumen de una esfera aplicando la fórmula. Ejemplo 1.18

(7 min)

¿Qué datos necesita para encontrar el volumen de la esfera?

Concluir que es necesario conocer el radio.

* Indicar que calculen el volumen de la esfera con los datos dados en el ejemplo.

5. Resolver Ejercicio 1.17

(8 min)

Solución

a) 288π cm^3

b) 972π cm^3

1 Reconocer los elementos de los sólidos.

Solución

Cubo:

1. Arista
2. Vértice
3. Cara lateral
4. Base

Pirámide:

1. Vértice
2. Altura
3. Cara lateral
4. Base

2 Identificar los sólidos geométricos mediante sus desarrollos.

Solución

a) Pirámide cuadrangular

b) Cilindro

c) Prisma cuadrangular

3 Encontrar el área total de las superficies laterales y base de prismas.

Solución

a) 96 cm^2

b) 142 cm^2

4 Encontrar el área total de superficies laterales de pirámides y cilindros.

Solución

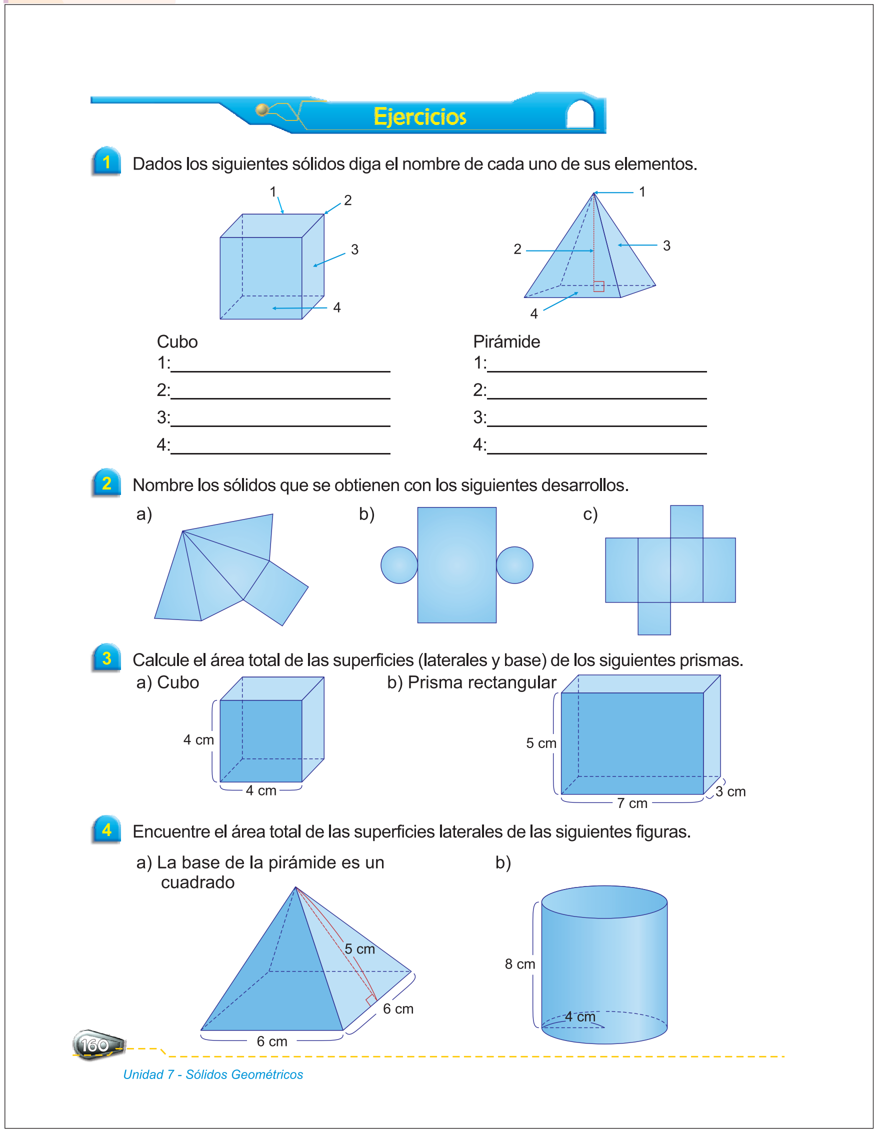
a) 60 cm^2

b) 64π cm^2

Unidad 7: Sólidos geométricos

(1/2) Ejercicios de la unidad

Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre sólidos geométricos



Ejercicios

1 Dados los siguientes sólidos diga el nombre de cada uno de sus elementos.

Cubo
1:________________
2:________________
3:________________
4:________________

Pirámide
1:________________
2:________________
3:________________
4:________________

2 Nombre los sólidos que se obtienen con los siguientes desarrollos.

a) b) c)

3 Calcule el área total de las superficies (laterales y base) de los siguientes prismas.

a) Cubo

b) Prisma rectangular

4 Encuentre el área total de las superficies laterales de las siguientes figuras.

a) La base de la pirámide es un cuadrado

b)

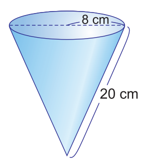
160 Unidad 7 - Sólidos Geométricos

Unidad 7: Sólidos geométricos

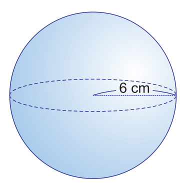
(2/2) Ejercicios de la unidad

Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre sólidos geométricos

5 Encuentre el área de la superficie lateral del siguiente cono.

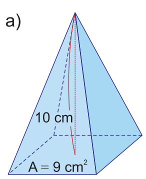


6 Encuentre el área de la superficie de la esfera cuyo radio mide 6 cm.

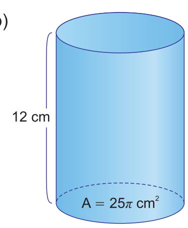


7 Encuentre el volumen de los siguientes sólidos dado el área de la base y su altura.

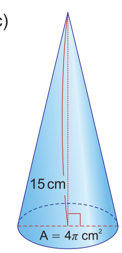
a)



b)



c)



8 Encuentre el volumen de una esfera cuyo radio mide 2 cm.

161

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

5 Encontrar el área de la superficie lateral del cono.

Solución

a: la medida del ángulo del sector circular

A: área de la superficie lateral

$a : 360^\circ = 2 \times 8 \times \pi : 2 \times 20 \times \pi$

$a : 360^\circ = 8 : 20$

$a = 144^\circ$

$A = 20^2 \times \pi \times \frac{144^\circ}{360^\circ}$

$= 160\pi$

Respuesta: 160π cm²

6 Encontrar el área de la superficie de la esfera.

Solución

144π cm²

7 Encontrar el volumen de sólidos.

Solución

a) 30 cm³

b) 300π cm³

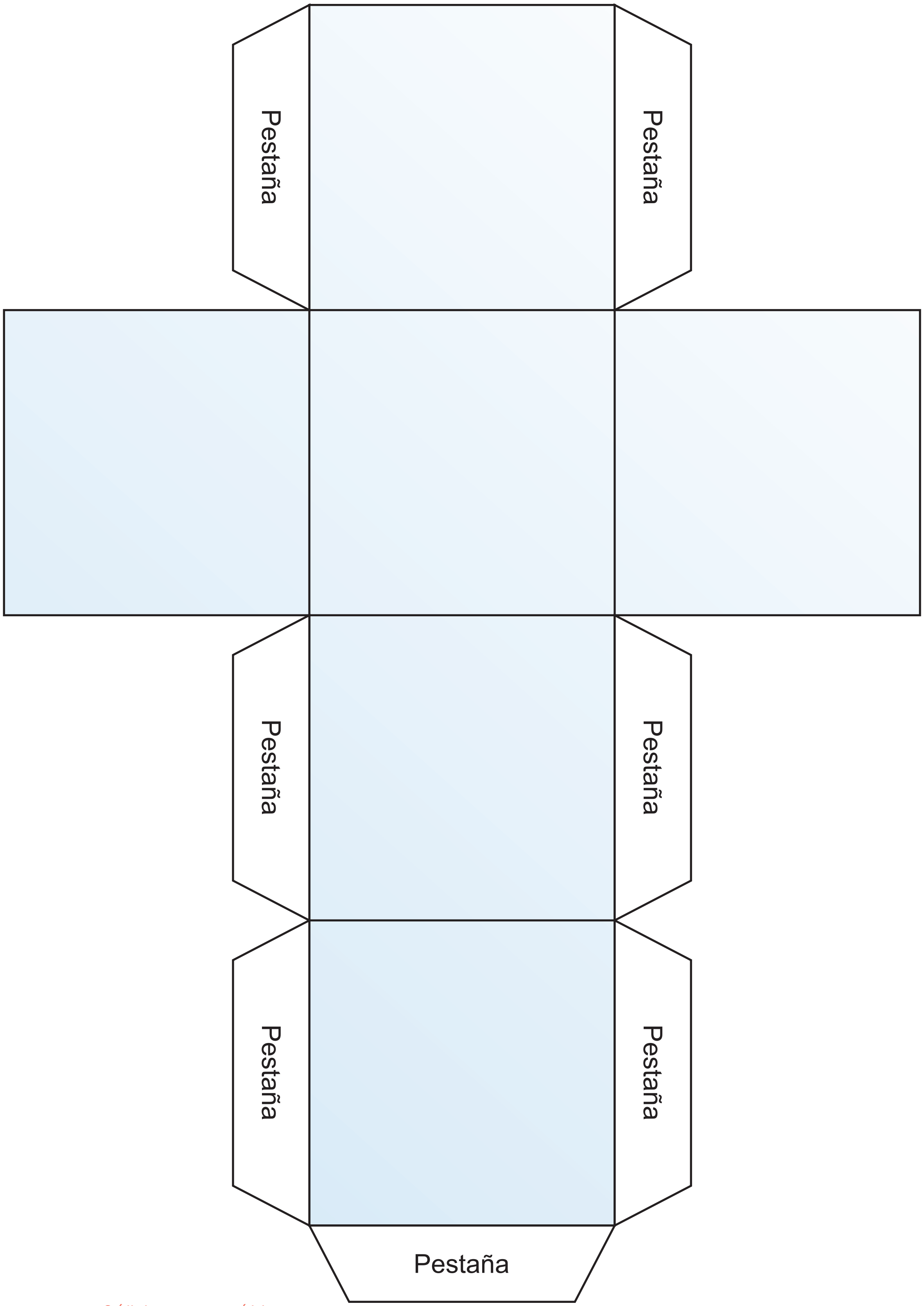
c) 20π cm³

8 Encontrar el volumen de una esfera

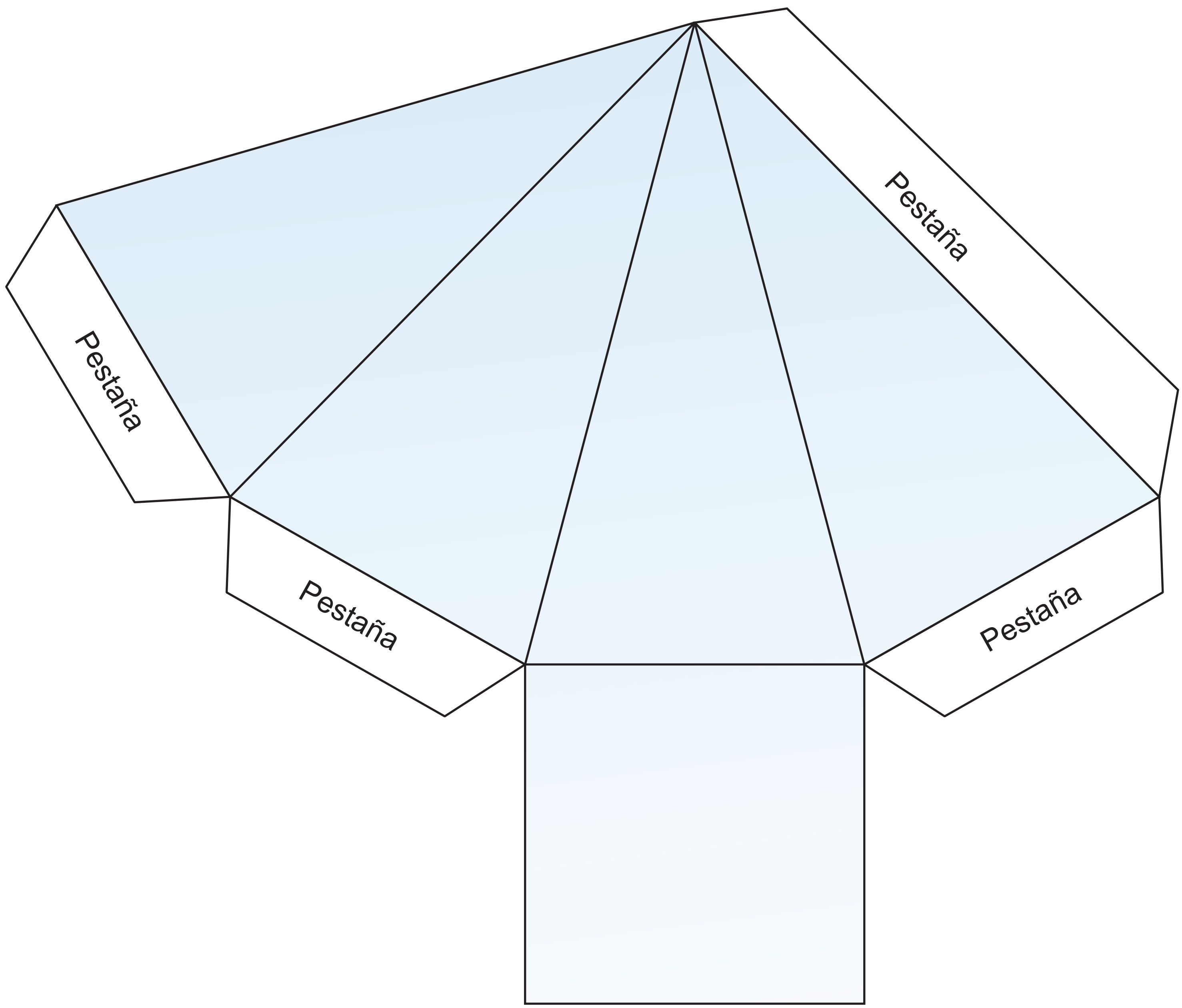
Solución

$\frac{32}{3}\pi$ cm³

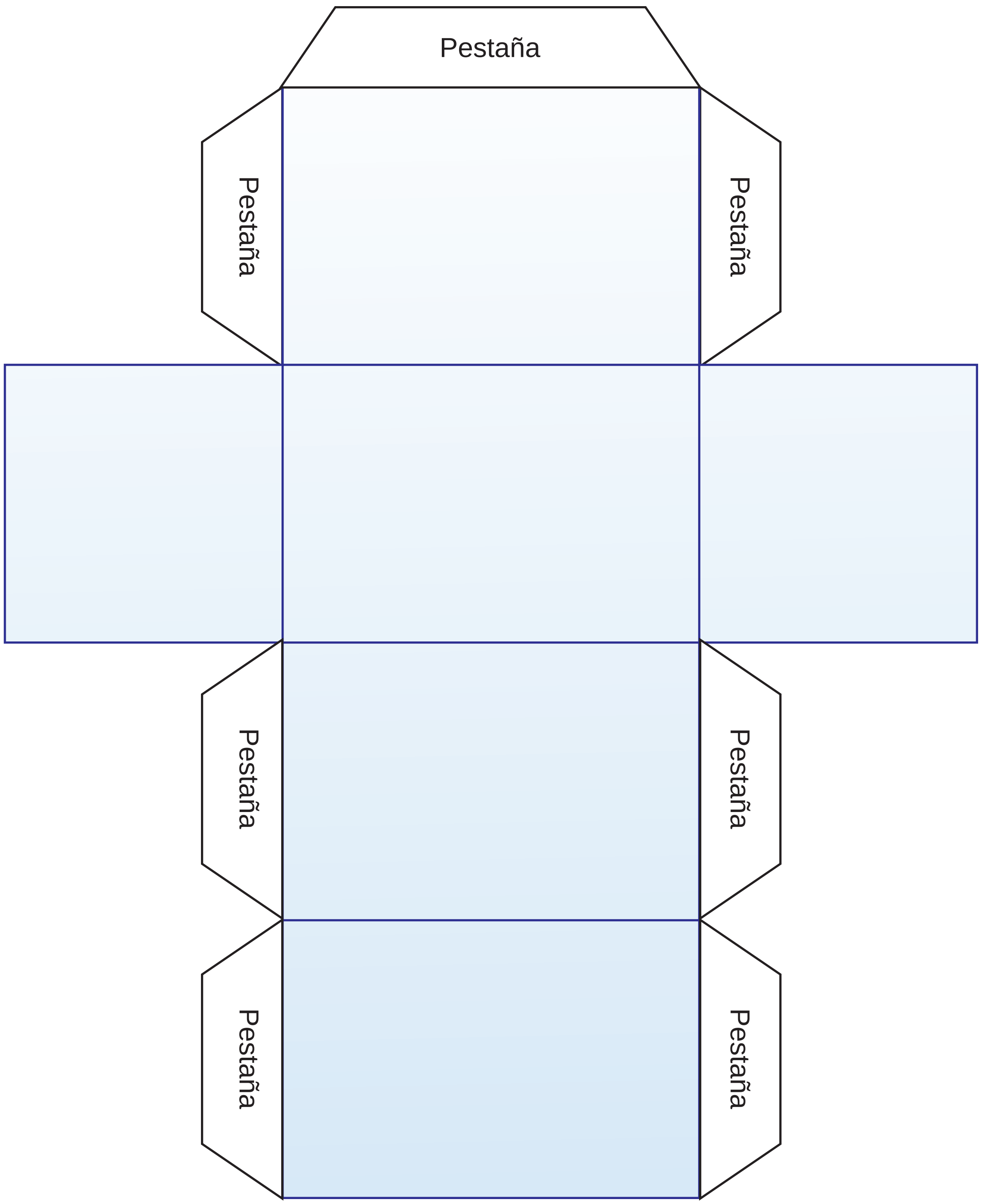
Desarrollo de un cubo



Desarrollo de una pirámide cuadrangular



Desarrollo de un prisma rectangular



Unidad 8
Organización y presentación de datos

Organización y presentación de datos

(11 horas)

1 Expectativas de logro

- Reconocen la importancia de las medidas de dispersión para clasificar colecciones de datos.
- Usan las medidas de dispersión para tomar decisiones por ejemplo acerca de la calidad de producción de productos.

2 Relación y desarrollo

Séptimo grado

Gráficas de faja y circulares
- Gráficas de faja
- Construcción de gráficas de faja con porcentaje
- Gráficas circulares
- Relación de porcentaje y ángulo central de gráficas circulares
- Análisis de tabla conociendo el porcentaje

Octavo grado

Manera de contar
- Principio de la suma
- Principio del producto

Probabilidad
- Relación entre razón y probabilidad
- Fórmula de la probabilidad
- Propiedades de la probabilidad
- Construcción de tablas y diagramas de árbol
- Relación entre la probabilidad de ocurrir y de no ocurrir un evento
- Probabilidad donde los eventos AB y BA son los mismos
- Aplicación de la probabilidad

Noveno grado

Organización y presentación de datos
- Tabla de frecuencia
- Histograma
- Polígono de frecuencia
- Frecuencia relativa
- Moda
- Media
- Mediana

3 Plan de estudio (11 horas)

Lección	Distribución de horas	Contenidos
1. Organización y presentación de datos (4 horas)	1/4	• Tabla de frecuencia
	2/4	• Tabla de distribución de frecuencia
	3/4	• Histograma y polígono de frecuencias
	4/4	• Frecuencia relativa y polígono de frecuencia relativa
2. Extracción de la información (5 horas)	1/5	• Moda
	2/5	• Media
	3/5	• Mediana
	4~5/5	• Comparación de moda, media y mediana
Ejercicios (2 horas)	1~2/2	

4 Puntos de lección

Análisis de las pruebas diagnósticas 2016 - 2017

En el bloque de Estadística, hay algunos conocimientos que se tienen que memorizar. En caso de los ejemplos y ejercicios, pueden ser modificados de tal manera que sean sencillos o complicados al momento de resolver. Es importante enseñar a los estudiantes los conocimientos básicos procurando obtener comprensión.

Para lograrlo, no es necesario tratar muchos datos y números grandes o complicados, es mejor utilizar ejemplos sencillos y entendibles lo que resulta una buena estrategia.

[Pregunta] ¿Qué dato falta para que la media sea igual a 19?

24, 13, 17, $\boxed{}$, 18, 24,

Institutos: 0% CEB: 0% (2017)

Hasta ahora, es un poco difícil contestar esta pregunta aunque sea sencilla.

Lección 1: Organización y presentación de datos

En 3er grado se aprendió como organizar datos estadísticos en tablas sencillas, luego en 4to grado se organizan los datos en gráficas de barra y en 5to grado en gráficas lineales.

En cada fase de organización de datos se aprendió además a interpretar y analizar estos datos, siguiendo esta misma línea en 7mo se estudió la gráfica de faja y circular, sin embargo cuando ya se tienen mayor cantidad de datos estadísticos es necesario conocer otras estrategias que nos permitan trabajar con ellos de manera organizada y así poder interpretarlos y analizarlos mejor, es por ello que en esta unidad se estudian las tablas de frecuencia donde se organizan los datos en forma de intervalos las cuales son útiles cuando se tienen datos estadísticos dispersos uno del otro.

En esta lección los estudiantes conocen los términos como clase que representa los datos estadísticos o los intervalos, frecuencia se utiliza para representar el número de veces que un dato estadístico aparece, frecuencia relativa la cual se utiliza para poder hacer comparación de datos estadísticos de dos o más distribuciones etc.

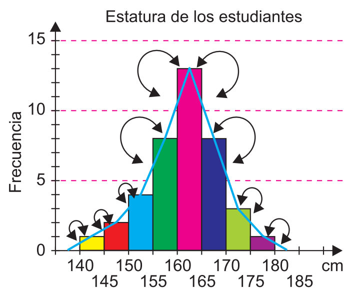
Adicionalmente se introduce el uso de histogramas y polígonos de frecuencia los cuales se realizan cuando se investigan sobre cuántos datos existen en un intervalo o clase específica, a la vez se pueden observar características o tendencia de datos. En este tipo de gráfica no se comparan elementos independientes como en el caso de la gráfica de barra, se expresa solo un tipo de dato dividido en intervalos.

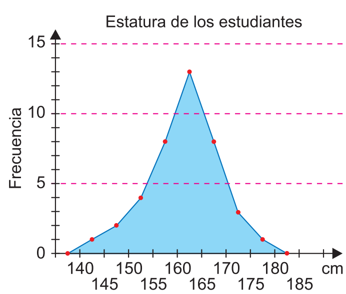
El polígono e histograma de frecuencia permite visualizar mejor la información de las tablas de frecuencias.

Al representar una tabla de distribución de frecuencias mediante un histograma se puede fácilmente generar el polígono de frecuencia, uniendo los puntos medios de cada clase de intervalos y agregando dos puntos en el eje x con frecuencia cero (uno al lado izquierdo de la primera barra, y el otro al lado derecho de la última barra).

El área del polígono de frecuencia es igual al área del total de las barras del histograma.

En las figuras siguientes ambas áreas son iguales, al igual que las gráficas aprendidas, estas también se trazan en un eje de coordenadas cartesianas y tienen sus elementos como ser título de la gráfica y nombre de los ejes.





Cuando se tienen distribuciones de frecuencias de dos grupos que tienen diferente cantidad de datos no se pueden comparar directamente por lo que se hace uso de la frecuencia relativa $\left(razón = \frac{frecuencia}{total}\right)$ que se presenta en la sección 3.

Lección 2: Extracción de la información

La extracción de la información de esta lección está referida a los valores que representan las características o tendencias de los datos. Hay varios valores: la moda, la media y la mediana, conocidas como las medidas de tendencia central.

La moda (sección 1) es el dato que aparece con mayor frecuencia. En este caso la moda de una distribución no necesariamente debe ser un número (por ejemplo los datos pueden se acerca del color favorito).

La media se aprendió en 6to grado (sección 2), posiblemente sea la medida de tendencia central más común. En esta sección se explica la forma de calcular la media de tablas de frecuencias, donde se multiplica cada dato por su frecuencia, se suman y se divide por el total de frecuencia.

$$media = \frac{suma\ del\ (valor \times frecuencia\ de\ cada\ clase)}{suma\ de\ las\ frecuencias}$$

La media no siempre refleja la característica de un conjunto de datos, sobre todo cuando la cantidad de datos es muy pequeña se diferencian mucho unos de los otros. Por la influencia de estos datos, la media puede ser distinto de los demás datos.

En este caso es conveniente utilizar la mediana que es el valor del dato que queda en medio, es decir, a la mitad de la distribución de los datos. Cuando hay una cantidad par de datos estadísticos la mediana es el promedio de los datos centrales.

Tema: Histogramas y polígonos de frecuencia 1

6 Un **histograma** está formado por rectángulos unidos cuya base es igual a la amplitud del intervalo y la altura es igual a la frecuencia.

Ejemplo **1.4** 2 **Pág.** 171 3

Represente los datos de la tabla 2 del Ejemplo 1.2 mediante un histograma de frecuencia.

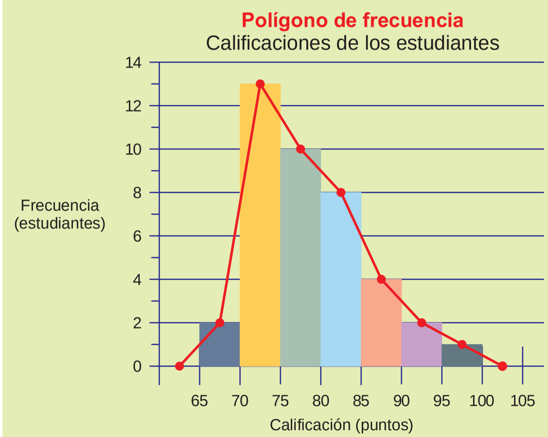
Tabla 2

Calificación (puntos)	Frecuencia (estudiantes)
65 – 70	2
70 – 75	13
75 – 80	10
80 – 85	8
85 – 90	4
90 – 95	2
95 – 100	1
Total	**40**

Frecuencia: Cantidad de estudiantes

Solución 4

Histograma de frecuencia
Calificaciones de los estudiantes

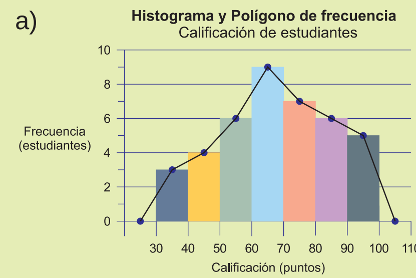


6 Uniendo los puntos medios de los lados superiores de las barras en el histograma, agregando una clase más a la izquierda y otra a la derecha con frecuencia 0 se obtienen un gráfico que se le llama **polígono de frecuencia**.

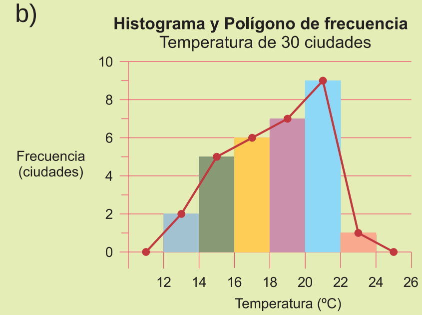
Ejercicio **1.3** 2 **Pág.** 172 y 173 3

Solución 4

a)



b)



1 Al inicio de la clase escribir solo la palabra **"Tema"** y hasta el final de la clase (o en el desarrollo de la misma) escribir el contenido del tema.

2 Escribir el número del *Ejemplo* o *Ejercicio* .

3 Escribir el número de **Pág.** del LE para entender dónde se quedaron con respecto al tiempo.

4 Escribir la **Solución** y **Respuesta**.

5 En el problema planteado marcar los datos importantes para poder llegar a la respuesta.

6 Escribir la conclusión en un rectángulo de color rojo.

✓ Marcar en el *Ejercicio* cuando la solución o la respuesta sean correctas.

Nota: Los puntos aquí explicados no siempre aplican todos en un plan de pizarra.

Indicador de logro

Elabore una tabla de frecuencia con los siguientes datos.

Litros de leche diario que proporcionan al ordeñar 10 vacas en una granja:

3 7 5 7 3 8 5 5 8 5

1. Ordenar los datos en una tabla que representan la cantidad de partidos empatados de la liga en un torneo. *Ejemplo* **1.1**

(20 min)

* Presentar el problema a los estudiantes e indicarles que traten de comprender que deben hacer con los datos.

  ¿Qué representan los datos mostrados en la situación?

  ¿Qué se pide hacer con los datos?
* Indicar que ordenen los datos de menor a mayor y sugerir que tachen los datos ordenados para no repetir o cometer errores.
* Concluir que es importante ordenar los datos ya que cuando se tienen distribuciones estadísticas grandes es difícil trabajar con ellos si no están ordenados.
* Una vez ordenados pedir que respondan las preguntas del inciso b)
* Indicar que ordenen los datos en la tabla dada en el ejemplo.

  ¿Cuáles son los encabezados de la tabla?
* Pedir que dibujen y llenen la tabla.
* Concluir que el número de equipos que empataron 3, 5, 6 y 7 se le llama frecuencia.

  ¿Cuál es la mayor cantidad de partidos empatados?
* Observan en el LE la frecuencia de cada dato representado en la tabla.
* Concluyen en la definición de frecuencia dada en el LE.

Unidad 8: **Organización y presentación de datos**

Lección 1: (1/4) Organización y presentación de datos

Sección 1: Tabla de frecuencia

Objetivo: Elaborar tablas de frecuencias dada las distribuciones de datos estadísticos.

Unidad 8

Organización y presentación de datos

Lección 1: Organización y presentación de datos

Sección 1: Tabla de frecuencia

Ejemplo **1.1**

Los siguientes datos representan la cantidad de partidos empatados de 10 equipos, en un torneo de apertura de la Liga Nacional de Honduras.
Olimpia 3, Real España 5, Marathón 3, Honduras Progreso 7, Motagua 5, Real Sociedad 3, Platense 7, Juticalpa 5, Social Sol 6 y Vida 3. Realice lo siguiente:

a) Ordene los datos en un arreglo de menor a mayor.
b) Responda las siguientes preguntas:
 b.1) ¿Cuántos equipos obtuvieron 5 empates?
 b.2) ¿Cuántos equipos obtuvieron 6 empates?
c) Ordene los datos en una tabla, con encabezado:

Cantidad de partidos empatados	Cantidad de equipos

Solución:

a) El arreglo de menor a mayor queda de la siguiente manera.
3 3 3 3 5 5 5 6 7 7

b.1) Los equipos que obtuvieron 5 empates según los datos ordenados en el inciso a) fueron 3.

b.2) Solamente un equipo obtuvo 6 empates.

c)

Cantidad de partidos empatados	Cantidad de equipos
3	4
5	3
6	1
7	2
Total	**10**

Observando la tabla, a la cantidad de equipos que empataron 3, 5, 6 y 7 partidos se le llama **frecuencia**.

La frecuencia de los equipos que empataron 3 partidos es 4.
La frecuencia de los equipos que empataron 5 partidos es 3.
La frecuencia de los equipos que empataron 6 partidos es 1.
La frecuencia de los equipos que empataron 7 partidos es 2.

Frecuencia es la cantidad de veces que se repite un dato estadístico.

A la tabla que representa la cantidad de cada valor de los datos se le llama **tabla de frecuencia**.

2. Llamar a la tabla anterior tabla de frecuencias

(5 min)

* Concluir que en la tabla de frecuencias se presenta la cantidad de cada valor de los datos.
* Concluir en la definición presentada en el LE.

continúa en la siguiente página...

Unidad 8: **Organización y presentación de datos**

Lección 1: (1/4) Organización y presentación de datos

Sección 1: Tabla de frecuencia

Objetivo: Elaborar tablas de frecuencias dada las distribuciones de datos estadísticos.

Ejercicio 1.1 Para cada uno de los siguientes datos hipotéticos complete la tabla de frecuencia. (Con los encabezados de la tabla indicados en cada inciso)

a) Litros de leche diario que proporcionan al ordeñar 10 vacas en una granja.

3 7 5 7 3 8 5 5 8 5

Leche (litros)	Frecuencia (vacas)
Total	

Frecuencia: Cantidad de vacas

b) Cantidad de goles anotados en 18 jornadas de la Liga Nacional de Honduras.

15 10 9 13 14 13 13 15 10 9 18 14 10 13 10 15 14 13

Goles anotados	Frecuencia (jornadas)
Total	

Frecuencia: Cantidad de jornadas

c) Suma de puntos de dos dados lanzados en 20 ocasiones.

2 4 5 6 7 8 4 3 5 6 7 8 9 10 6 7 8 9 10 11

Suma (puntos)	Frecuencia (ocasiones)
Total	

Frecuencia: Cantidad de ocasiones

167

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

Indicador de logro

Elabore una tabla de frecuencia con los siguientes datos.

Litros de leche diario que proporcionan al ordeñar 10 vacas en una granja:

3 7 5 7 3 8 5 5 8 5

3. Resolver *Ejercicio* **1.1**

(20 min)

Solución

a)

Leche (litros)	Frecuencia (vacas)
3	2
5	4
7	2
8	2
Total	**10**

Frecuencia: Cantidad de vacas

b)

Goles anotados	Frecuencia (jornadas)
9	2
10	4
13	5
14	3
15	3
18	1
Total	**18**

Frecuencia: Cantidad de jornadas

c)

Suma (puntos)	Frecuencia (ocasiones)
2	1
3	1
4	2
5	2
6	3
7	3
8	3
9	2
10	2
11	1
Total	**20**

Frecuencia: Cantidad de ocasiones

Indicador de logro

Se hace una prueba de un cierto medicamento para personas con edades mayores o iguales que 50 años y para ello se toma una muestra de 40 personas cuyas edades son:

50	60	73	68	78	75	82	84	74	76
62	61	65	79	63	60	69	50	75	78
63	79	60	54	67	61	60	73	82	74
79	68	71	62	75	77	75	66	59	68

Complete la tabla de frecuencias

Edad (años)	Frecuencia (personas)
50 – 55	
55 – 60	
60 – 65	
65 – 70	
70 – 75	
75 – 80	
80 – 85	
Total	

1. Completar la tabla que representa la calificación de una asignatura de 40 estudiantes. *Ejemplo* **1.2**

(15 min)

* Presentar la tabla de datos en la pizarra e indicar que observen los datos que muestra las calificaciones de 40 estudiantes.

¿Cuántos estudiantes obtuvieron 74?

¿Cuántos estudiantes obtuvieron calificación mayor o igual que 80 y menor que 85?

Según **tabla 2** ¿De qué manera debemos organizar los datos?

* Concluir que los datos presentados en la **tabla 1** se organizan en la **tabla 2** por medio de intervalos.

¿Cuál creen ustedes que es la razón de ordenar los datos mediante intervalos?

¿Cuáles son los intervalos solicitados?

* Concluir que cuando la cantidad de los datos es muy grande éstos se deben agrupar para una mejor comprensión.

Unidad 8: **Organización y presentación de datos**

Lección 1: (2/4) Organización y presentación de datos

Sección 1: Tabla de frecuencia

Objetivo:
- Elaborar tablas de frecuencias que muestren la distribución de frecuencias a través de la agrupación de datos.
- Conocer los términos: clase, frecuencia, y tabla de distribución de frecuencia.

Cuando la cantidad de datos es grande se deben agrupar si se quiere captar mejor las características de ellos.

Ejemplo **1.2**

La lista de la izquierda (**Tabla 1**) muestra los resultados de evaluación de una asignatura en una sección de 40 estudiantes. Complete la **Tabla 2** de la derecha que muestra intervalos de calificaciones de 5 puntos, colocando la cantidad de estudiantes que sacaron la nota comprendida.

Tabla 1

Nº lista	Calificación (puntos)	Nº lista	Calificación (puntos)
1	74	21	79
2	76	22	83
3	80	23	74
4	86	24	78
5	85	25	83
6	91	26	71
7	89	27	77
8	67	28	84
9	70	29	73
10	77	30	76
11	81	31	82
12	74	32	73
13	94	33	78
14	98	34	82
15	89	35	74
16	68	36	73
17	71	37	77
18	78	38	74
19	82	39	79
20	72	40	73

Tabla 2

Calificación (puntos)		Frecuencia (estudiantes)
Mayor o igual que	Menor que	
65	70	
70	75	
75	80	
80	85	
85	90	
90	95	
95	100	
Total		**40**

Frecuencia: Cantidad de estudiantes

Si la cantidad de estudiantes es grande y dispersa es conveniente utilizar intervalos.

Solución:
Para llenar la **Tabla 2**, se deben contar cuantas calificaciones están contenidas en cada intervalo. Ese dato es la frecuencia.

Calificación (puntos)		Frecuencia (estudiantes)
Mayor o igual que	Menor que	
65	70	2
70	75	13
75	80	10
80	85	8
85	90	4
90	95	2
95	100	1
Total		**40**

Frecuencia: Cantidad de estudiantes

En la **Tabla 1** se puede tachar las calificaciones para contar y organizar mejor los datos.

Note que los datos que son mayores o iguales que 70 y menores que 75 son:
74, 70, 74, 71, 72, 74, 71,
73, 73, 74, 73, 74, 73
en total 13, este número representa la frecuencia.

168

Unidad 8 - Organización y presentación de datos

continúa en la siguiente página...

Unidad 8: **Organización y presentación de datos**

Lección 1: (2/4) Organización y presentación de datos

Sección 1: Tabla de frecuencia

Objetivo:
- Elaborar tablas de frecuencias que muestren la distribución de frecuencias a través de la agrupación de datos.
- Conocer los términos: clase, frecuencia, y tabla de distribución de frecuencia.

El intervalo mayor o igual que 65 y menor que 70 se expresa como:
65 - 70
A los intervalos 65 - 70, 70 - 75, 75 - 80 ... 95 - 100 se les llama **clase.**
A la cantidad de datos de cada clase también se le llama **frecuencia.**

Otra forma de escribir la **Tabla 2** es:

Calificación (puntos)	Frecuencia (estudiantes)
65 – 70	2
70 – 75	13
75 – 80	10
80 – 85	8
85 – 90	4
90 – 95	2
95 – 100	1
Total	**40**

Frecuencia: Cantidad de estudiantes

Observe que en las clases el extremo derecho no se incluye dentro del intervalo.

En este libro la expresión 65 – 70 significa que la clase "es mayor o igual que 65" y "menor que 70".

La frecuencia es el número de datos en cada intervalo por ejemplo:

La frecuencia de la clase 75 – 80 es 10.

La frecuencia de la clase 90 – 95 es 2.

Ejemplo 1.3

Se desea hacer una prueba de un cierto medicamento para personas con edades mayores o iguales que 50 años, para ello se toma una muestra de 40 personas cuyas edades son:

50	60	73	68	78	75	82	84	74	76
62	61	65	79	63	60	69	50	75	78
63	79	60	54	67	61	60	73	82	74
79	68	71	62	75	77	75	66	59	68

Complete la siguiente tabla de frecuencia dadas las clases y responda las preguntas de abajo.

a) ¿Qué clase tiene mayor frecuencia?
b) ¿Qué clase tiene menor frecuencia?
c) ¿Cuántas personas tienen una edad mayor o igual que 70 años?
d) ¿Cuántas personas tienen una edad mayor o igual que 60 y menor que 80 años?

Edad (años)	Frecuencia (personas)
50 – 55	
55 – 60	
60 – 65	
65 – 70	
70 – 75	
75 – 80	
80 – 85	
Total	

Frecuencia: Cantidad de personas

Para llenar la tabla es recomendable tachar los datos ya contados.

169

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

* Presentar la situación del **Ejemplo 1.3** y pedir que lo analicen.
¿De qué se trata el problema?
¿Cuáles son los datos involucrados?
¿Qué debemos hacer con los datos?
* Indicar que organicen los datos en la tabla de frecuencia dada.
* Es importante sugerir al estudiante que para ordenar los datos en la tabla se tache los que ya han sido contados, para evitar errores.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Se hace una prueba de un cierto medicamento para personas con edades mayores o iguales que 50 años y para ello se toma una muestra de 40 personas cuyas edades son:

50	60	73	68	78	75	82	84	74	76
62	61	65	79	63	60	69	50	75	78
63	79	60	54	67	61	60	73	82	74
79	68	71	62	75	77	75	66	59	68

Complete la tabla de frecuencias

Edad (años)	Frecuencia (personas)
50 – 55	
55 – 60	
60 – 65	
65 – 70	
70 – 75	
75 – 80	
80 – 85	
Total	

* Indicar que observen los intervalos dados en la tabla de frecuencia.
El intervalo mayor o igual que 65 y menor que 70 ¿Incluye a 65? ¿Y a 70?
* Concluir que este intervalo se incluye 65 pero 70 no y además todos los valores contemplados entre los dos extremos.
* Concluir que los intervalos se pueden escribir de la forma 65 - 70.

2. Nombrar clase a cada grupo de datos (intervalos), frecuencia a la cantidad de datos de cada clase y tabla de distribución de frecuencia a la tabla anterior.
(5 min)

* Indicar que lean y escriban el resumen del LE.
* Observen que la tabla del **Ejemplo 1.2** se puede rescribir de otra forma utilizando las clases (intervalos) y la frecuencia.

3. Elaborar la tabla de frecuencias. **Ejemplo 1.3**
(15 min)

Indicador de logro

Se hace una prueba de un cierto medicamento para personas con edades mayores o iguales que 50 años y para ello se toma una muestra de 40 personas cuyas edades son:

50	60	73	68	78	75	82	84	74	76
62	61	65	79	63	60	69	50	75	78
63	79	60	54	67	61	60	73	82	74
79	68	71	62	75	77	75	66	59	68

Complete la tabla de frecuencias

Edad (años)	Frecuencia (personas)
50 – 55	
55 – 60	
60 – 65	
65 – 70	
70 – 75	
75 – 80	
80 – 85	
Total	

* Indicar que contesten las preguntas planteadas sin consultar el LE.
Observando la tabla
¿Qué clase tiene mayor frecuencia?
¿Qué clase tiene menor frecuencia?
¿Cuántas personas tienen una edad mayor o igual que 70 años?
¿Cuántas personas tienen una edad mayor o igual que 60 y menor que 80 años?

4. **Resolver** *Ejercicio* **1.2**
(10 min)
Solución

a) La clase con mayor frecuencia es 70 - 75 con 13 estudiantes
b) La clase con menor frecuencia es 95 - 100 con 1 estudiante.
c) La clase que incluye los estudiantes que obtuvieron calificaciones menores que 70 es 65 - 70 con 2 estudiantes.
d) La clase que incluyen los estudiantes que obtuvieron calificaciones mayores que 80 son: 80 - 85, 85 - 90, 90 - 95, 95 - 100 con frecuencias: 8, 4, 2, 1 respectivamente.
Entonces los estudiantes con calificaciones mayores o iguales que 80 son:
8 + 4 + 2 + 1 = 15.
La respuesta es 15 estudiantes.

Unidad 8: Organización y presentación de datos

Lección 1: Organización y presentación de datos *(2/4)*

Sección 1: Tabla de frecuencia

Objetivo:
- Elaborar tablas de frecuencias que muestren la distribución de frecuencias a través de la agrupación de datos.
- Conocer los términos: clase, frecuencia, y tabla de distribución de frecuencia.

Solución:
Al contar los datos que corresponden a cada clase, la tabla queda de la siguiente manera:

Edad (años)	Frecuencia (personas)
50 – 55	3
55 – 60	1
60 – 65	10
65 – 70	7
70 – 75	5
75 – 80	11
80 – 85	3
Total	**40**

Frecuencia: Cantidad de personas

a) La clase con mayor frecuencia es la de 75 – 80 con 11 personas.

b) La clase con menor frecuencia es la de 55 – 60 con 1 persona.

c) Las clases que incluyen a las personas mayores o iguales que 70 años son 70 – 75, 75 – 80 y 80 – 85 con frecuencia de 5, 11 y 3 respectivamente, entonces las personas con edades mayores o iguales que 70 años son:
$5 + 11 + 3 = 19$.

Respuesta: 19 personas.

d) Las clases que incluyen las personas con edades mayor o igual que 60 y menor que 80 años son 60 – 65, 65 – 70, 70 – 75 y 75 – 80 con frecuencias 10, 7, 5 y 11 respectivamente. Por lo tanto el total de personas es:
$10 + 7 + 5 + 11 = 33$.

Respuesta: 33 personas.

Ejercicio **1.2** Conteste las siguientes preguntas con la información de la **Tabla 2** del *Ejemplo* **1.2**.

a) ¿Qué clase tiene mayor frecuencia?
b) ¿Qué clase tiene menor frecuencia?
c) ¿Qué cantidad de estudiantes obtuvieron calificaciones menores que 70?
d) ¿Qué cantidad de estudiantes obtuvieron calificaciones mayores o iguales que 80 y menores que 100?

170
Unidad 8 - Organización y presentación de datos

* Se pueden hacer más ejercicios opcionales parecidos a los de los incisos a), b), c) y d) con los datos de la tabla.

* Concluir que al tener los datos organizados en una tabla eso nos permite poder trabajar con ellos de una mejor manera, poder hacer análisis, obtener los datos con mayor o menor frecuencia etc.

Unidad 8: # Organización y presentación de datos

Lección 1: (3/4) Organización y presentación de datos

Sección 2: Histograma y polígono de frecuencia

Objetivo: Trazar histogramas y polígonos de frecuencia.

Sección 2: Histograma y polígono de frecuencia

Un **histograma** está formado por rectángulos unidos cuya base es igual a la amplitud del intervalo y la altura es igual a la frecuencia.

La tabla de frecuencia (**Tabla 2**) del *Ejemplo* **1.2** se puede representar en forma gráfica como se muestra a continuación.

Ejemplo **1.4**

Represente los datos de la **Tabla 2** del *Ejemplo* **1.2** mediante un histograma de frecuencia.

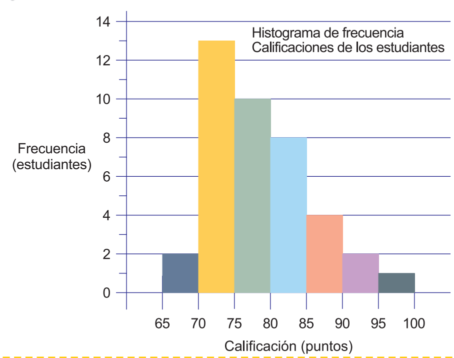
Tabla 2 del *Ejemplo* **1.2**

Calificación (puntos)	Frecuencia (estudiantes)
65 – 70	2
70 – 75	13
75 – 80	10
80 – 85	8
85 – 90	4
90 – 95	2
95 – 100	1
Total	**40**

Frecuencia: Cantidad de estudiantes

Un histograma es muy similar a una gráfica de barras, la diferencia es que la gráfica de barras compara elementos independientes y el histograma expresa solo un tipo de dato dividido en intervalos.
En el histograma no hay separación entre barras.

Solución:



En un histograma es más fácil identificar cual es la clase de mayor o menor frecuencia.

171

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

* Explicar que un histograma de frecuencias es una gráfica similar a la gráfica de barras.

  ¿Cuáles son los elementos de una gráfica de barras?

  ¿Cómo se elabora una gráfica de barras?
* Explicar que de manera similar a la gráfica de barras se traza un histograma de frecuencia.

Indicador de logro

Elabore un histograma de frecuencias con los datos de la tabla y luego tomando como base el histograma dibuje el polígono de frecuencia en la misma gráfica.

Calificación (puntos)	Frecuencia (estudiantes)
50 – 55	3
55 – 60	4
60 – 65	6
65 – 70	9
70 – 75	7
75 – 80	6
80 – 85	5
Total	40

1. Representar datos estadísticos mediante un histograma de frecuencias.

Ejemplo **1.4**

(20 min)

* Indicar que lean las conclusiones del LE sobre la definición de histograma.

  ¿Qué tipos de gráficas conocen?
* Indicar los pasos para elaborar el histograma: elaborar un eje cartesiano.
* Indicar que ubiquen en el eje horizontal las clases y en el eje vertical la frecuencia.
* Pedir que grafiquen rectángulos cuyo ancho es el tamaño de la clase y de alto el tamaño de la frecuencia.
* Hacer notar que en el histograma no hay espacio entre las barras.
* Indicar que escriban el título de la gráfica y las leyendas de lo que representa cada eje.
* Indicar la diferencia entre una gráfica de barras y un histograma.
* Aprovechar la gráfica para analizar los datos.

  ¿Qué clase tiene mayor o menor frecuencia?
* Concluir que es más fácil identificar estos elementos en la gráfica.

Indicador de logro

Elabore un histograma de frecuencias con los datos de la tabla y luego tomando como base el histograma dibuje el polígono de frecuencia en la misma gráfica.

Calificación (puntos)	Frecuencia (estudiantes)
50 – 55	3
55 – 60	4
60 – 65	6
65 – 70	9
70 – 75	7
75 – 80	6
80 – 85	5
Total	40

2. Elaborar el polígono de frecuencias a partir del histograma de frecuencias elaborado en el ***Ejemplo* 1.4**

(10 min)

* Explicar qué es un polígono de frecuencias tal como aparece en el LE.
* Indicar los pasos para elaborar un polígono de frecuencias.
* Indicar que ubiquen en el eje horizontal del histograma una clase al inicio y otra clase al final que tengan frecuencia cero.
* Indicar que ubiquen el punto medio del ancho superior de cada rectángulo.
* Ubicar el punto medio de las clases agregadas que tienen frecuencia cero.
* Indicar que unan los puntos trazando líneas.
* Concluir que la figura que se obtiene es un polígono y de ahí su nombre Polígono de frecuencias.
* Pedir a los estudiantes que lean el resumen del LE.

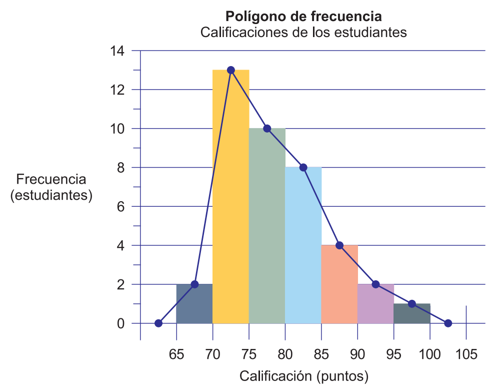
Unidad 8: **Organización y presentación de datos**

Lección 1: (3/4) Organización y presentación de datos

Sección 2: Histograma y polígono de frecuencia

Objetivo: Trazar histogramas y polígonos de frecuencia .

Uniendo los puntos medios de los lados superiores de las barras en el histograma, agregando una clase más a la izquierda y otra a la derecha con frecuencia 0 se obtiene una línea poligonal cerrada. A este tipo de gráfica se le llama **polígono de frecuencias.**



Al polígono de frecuencia se le agrega una clase antes y una al final, ambas con frecuencia cero, para cerrarlo. Las clases agregadas en este caso son:

	Calificación (puntos)	Frecuencia (estudiantes)
inicio	60 – 65	0
final	100 – 105	0

***Ejercicio* 1.3**

a) Elabore un histograma de frecuencia con los datos de la siguiente tabla, y luego tomando como base el histograma dibuje el polígono de frecuencia en una misma gráfica.

Calificación (puntos)	Frecuencia (estudiantes)
30 – 40	3
40 – 50	4
50 – 60	6
60 – 70	9
70 – 80	7
80 – 90	6
90 – 100	5
Total	**40**

Frecuencia: Cantidad de estudiantes

172 Unidad 8 - Organización y presentación de datos

3. Resolver ***Ejercicio* 1.3**

(15 min)

Solución (Página 227)

continúa en la siguiente página...

Unidad 8: **Organización y presentación de datos**

Lección 1: (3/4) Organización y presentación de datos

Sección 2: Histograma y polígono de frecuencia

Objetivo: Trazar histogramas y polígonos de frecuencia.

b) Con los datos siguientes complete la tabla de frecuencias, elabore el histograma y el polígono de frecuencia correspondiente.

b1) Temperaturas en grados centígrados en 30 ciudades.

13 14 17 12 16 21 19 14 20 18 20 19 16 20 19
16 14 22 21 20 19 18 17 16 15 14 20 20 19 21

Temperatura (ºC)	Frecuencia (ciudades)
12 – 14	
14 – 16	
16 – 18	
Total	

Pista: Primero llene los espacios en blanco de la clase “Temperatura”.

Clase “12 - 14” significa que se incluyen los datos mayores o iguales que 12 y menores que 14, no incluye 14. Se interpreta lo mismo para las demás clases.

Frecuencia: Cantidad de ciudades

b2) Duración en minutos de los capítulos de una serie grabada en 42 discos compactos.

41 45 43 48 42 42 48 44 49 45 50 42 44 41 45 43 47 43 52 51 48
43 41 49 55 69 67 60 49 54 47 43 53 52 56 62 65 42 48 54 60 43

Duración (minutos)	Frecuencia (capítulos)
40 – 45	
45 – 50	
50 – 55	
Total	

Frecuencia: Cantidad de capítulos

173

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

Indicador de logro

Elabore un histograma de frecuencias con los datos de la tabla y luego tomando como base el histograma dibuje el polígono de frecuencia en la misma gráfica.

Calificación (puntos)	Frecuencia (estudiantes)
50 – 55	3
55 – 60	4
60 – 65	6
65 – 70	9
70 – 75	7
75 – 80	6
80 – 85	5
Total	40

Soluciones del Ejercicio 1.3

Los histogramas y polígonos de frecuencia están en las páginas 227 y 228.

b) b1)

Tabla de frecuencia

Temperatura (ºC)	Frecuencia (ciudades)
12 – 14	2
14 – 16	5
16 – 18	6
18 – 20	7
20 – 22	9
22 – 24	1
Total	**30**

Frecuencia: Cantidad de ciudades

b2)

Tabla de frecuencia

Duración (minutos)	Frecuencia (capítulos)
40 – 45	15
45 – 50	12
50 – 55	7
55 – 60	2
60 – 65	3
65 – 70	3
Total	**42**

Frecuencia: Cantidad de capítulos

Indicador de logro

La siguiente tabla muestra las edades de los empleados de dos departamentos A y B de una empresa, complete la tabla de frecuencia relativa y trace el polígono de frecuencia relativa de cada departamento en una misma gráfica.

Edad (años)	Frecuencia (empleados)		Frecuencia relativa	
	Depart. A	Depart. B	Depart. A	Depart. B
20 – 22	1	2		
22 – 24	3	1		
24 – 26	5	5		
26 – 28	12	20		
28 – 30	8	6		
30 – 32	4	3		
32 – 34	2	3		
Total	**35**	**45**		

1. **Analizar la tabla de distribución de frecuencias de los equipos de sonido vendidos en una tienda.**
   (5 min)

* Indicar que observen los datos que contiene la tabla.

¿Se puede comparar las frecuencias correspondientes a la tienda A y la tienda B?

¿Qué se puede decir de las cantidades de equipos vendidos en la tienda A y la tienda B?

* Concluir que cuando se tienen dos distribuciones de frecuencia, si estas tienen la misma frecuencia total se pueden hace comparaciones directas entre los datos.

2. **Resolver** Ejercicio **1.4**
   (5 min)
   Solución

a) Grupo A
b) Tienen la misma cantidad de estudiantes 12

3. **Analizar la tabla de distribución de frecuencias de las estaturas correspondientes de las secciones A y B.**
   (10 min)

* Indicar que observen los datos de la tabla.

Unidad 8: Organización y presentación de datos

Lección 1: (4/4) Organización y presentación de datos

Sección 3: Frecuencia relativa

Objetivo:
- Elaborar tablas de distribución de frecuencia relativa.
- Trazar polígonos de frecuencia relativa.
- Comparar 2 distribuciones de frecuencia mediante polígonos de frecuencia relativa.

Sección 3: ***Frecuencia relativa***

Ejemplo 1.5

La tabla de la derecha muestra la cantidad de equipos de sonido vendidos en una semana en las tiendas "A" y "B". ¿Cuántos equipos de sonido vendió cada tienda en una semana?

Precio (lempiras)	Frecuencia (equipos)	
	Tienda A	Tienda B
1000 – 1500	5	3
1500 – 2000	10	10
2000 – 2500	7	11
2500 – 3000	12	8
3000 – 3500	10	9
3500 – 4000	6	9
Total	**50**	**50**

Frecuencia: Cantidad de equipos de sonido vendidos

Solución:
Cada tienda vendió 50 equipos de sonido.

Considerando los datos de la tabla se puede observar que ambas tiendas vendieron la misma cantidad de equipos de sonido, es decir, tienen la misma frecuencia total, por tanto se pueden comparar los datos.

Ejemplo

- Cuando el precio estaba entre 1000 y 1500 la tienda "A" vendió más equipos de sonido.
- Cuando el precio estaba entre 1500 y 2000 las dos tiendas vendieron la misma cantidad de equipos de sonido.
- Cuando el precio estaba entre 3500 y 4000 la tienda "B" vendió más equipos de sonido.

Ejercicio 1.4 Los datos de la siguiente tabla representan las edades de dos grupos de estudiantes "A" y "B" en un museo.

Edad (años)	Frecuencia (estudiantes)	
	Grupo "A"	Grupo "B"
10 – 12	3	0
12 – 14	12	12
14 – 16	1	4
Total	**16**	**16**

Frecuencia: Cantidad de estudiantes

Con los datos de la tabla, conteste las siguientes preguntas:
a) ¿Qué grupo tiene más edades en la clase 10 - 12 años?
b) ¿Qué pasa en los grupos respecto a las edades en la clase 12 - 14 años?

Observe que la tabla de la derecha muestra una distribución de frecuencia de las estaturas de los estudiantes de 2 secciones "A" y "B".
¿Se pueden comparar directamente las frecuencias?
¿Las dos secciones tienen la misma frecuencia total?
No es posible comparar directamente las dos secciones porque la frecuencia total es diferente.
Una forma de comparar las frecuencias es considerar en cada clase la razón:

frecuencia a *total de frecuencia* $\left(\frac{\textit{frecuencia}}{\textit{frecuencia total}}\right)$.

A este valor se le llama **frecuencia relativa.**

Estatura (cm)	Frecuencia (estudiantes)	
	Sección "A"	Sección "B"
135 – 140	0	2
140 – 145	1	4
145 – 150	2	7
150 – 155	4	15
155 – 160	8	20
160 – 165	13	16
165 – 170	8	11
170 – 175	3	5
175 – 180	1	0
Total	**40**	**80**

Frecuencia: Cantidad de estudiantes

174
Unidad 8 - Organización y presentación de datos

¿Se puede comparar las frecuencias correspondientes a la sección A y B?
¿En cuál de las secciones hay mayor cantidad de estudiantes que miden 170 -175 cm?

* Concluir que no se pueden comparar los datos directamente por que el total de la frecuencia es diferente.

continúa en la siguiente página...

Unidad 8: **Organización y presentación de datos**

Lección 1: (4/4) Organización y presentación de datos

Sección 3: Frecuencia relativa

Objetivo:
- Elaborar tablas de distribución de frecuencia relativa.
- Trazar polígonos de frecuencia relativa.
- Comparar 2 distribuciones de frecuencia mediante polígonos de frecuencia relativa.

Frecuencia relativa es el valor que se obtiene dividiendo la frecuencia de cada clase entre la **frecuencia total**.

$$\textit{Frecuencia relativa} = \frac{\textit{frecuencia del dato}}{\textit{frecuencia total}}$$

Cuando se saca la frecuencia relativa generalmente se expresa como número decimal.

Se puede usar calculadora para obtener la frecuencia relativa.

Para calcular la **frecuencia relativa** se debe seguir el siguiente procedimiento:

Estatura (cm)	Sección "A"	Sección "B"
135 – 140	$\frac{0}{40} = 0.0000$	$\frac{2}{80} = 0.0250$
140 – 145	$\frac{1}{40} = 0.0250$	$\frac{4}{80} = 0.0500$
145 – 150	$\frac{2}{40} = 0.0500$	$\frac{7}{80} = 0.0875$
150 – 155	$\frac{4}{40} = 0.1000$	$\frac{15}{80} = 0.1875$
155 – 160	$\frac{8}{40} = 0.2000$	$\frac{20}{80} = 0.2500$
⋮		
175 – 180	$\frac{1}{40} = 0.0250$	$\frac{0}{80} = 0.0000$

Se divide la frecuencia de cada clase entre la suma total de frecuencias.

Para dividir use la calculadora

En este libro se usan hasta cuatro cifras decimales para una mejor aproximación de los valores.

La tabla de la derecha muestra la frecuencia relativa de las secciones "A" y "B". Se le llama **Tabla de frecuencia relativa**.

Estatura (cm)	Frecuencia (estudiantes)		Frecuencia relativa	
	Sección "A"	Sección "B"	Sección "A"	Sección "B"
135 – 140	0	2	0.0000	0.0250
140 – 145	1	4	0.0250	0.0500
145 – 150	2	7	0.0500	0.0875
150 – 155	4	15	0.1000	0.1875
155 – 160	8	20	0.2000	0.2500
160 – 165	13	16	0.3250	0.2000
165 – 170	8	11	0.2000	0.1375
170 – 175	3	5	0.0750	0.0625
175 – 180	1	0	0.0250	0.0000
Total	**40**	**80**	**1**	**1**

Con la calculadora se suman las frecuencias relativas de la secciones "A" y "B".

La suma de todas las frecuencias relativas es 1.

Como la sección "A" y la sección "B" tienen la frecuencia relativa los datos se pueden comparar mediante un polígono de frecuencia relativa.

175

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

5. Llamar a esta tabla "tabla de frecuencia relativa"
(2 min)

* Concluir que la suma de la frecuencia relativa es 1.
* Discutir sobre la importancia de la frecuencia relativa en la comparación de los datos.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

La siguiente tabla muestra las edades de los empleados de dos departamentos A y B de una empresa, complete la tabla de frecuencia relativa y trace el polígono de frecuencia relativa de cada departamento en una misma gráfica.

Edad (años)	Frecuencia (empleados)		Frecuencia relativa	
	Depart. A	Depart. B	Depart. A	Depart. B
20 – 22	1	2		
22 – 24	3	1		
24 – 26	5	5		
26 – 28	12	20		
28 – 30	8	6		
30 – 32	4	3		
32 – 34	2	3		
Total	**35**	**45**		

* Concluir que para poder comparar los datos de las frecuencias se debe obtener en cada clase la razón de la frecuencia al total de la frecuencia. Al valor obtenido se le llama frecuencia relativa
* Indicar que lean y escriban el resumen del LE sobre frecuencia relativa.
* Para calcular la frecuencia relativa en la sección en la clase 170 -175 ¿Cuál es la razón que se forma?
* Explicar que la razón es la frecuencia de la clase al total de frecuencias: $\frac{3}{40} = 0.0750$
* Indicar que pueden utilizar la calculadora para hacer estos cálculos.
* Explicar que en cada resultado de la razón se tomaran cuatro cifras para una mayor aproximación, además de ellos se deben aplicar las reglas de redondeo.
* Indicar que completen la tabla haciendo estos cálculos.

4. Concluir que la frecuencia relativa es el valor que se obtiene de dividir la frecuencia entre el total .
(3 min)

* Hacer referencia a la razón: frecuencia ÷ frecuencia total.

Indicador de logro

La siguiente tabla muestra las edades de los empleados de dos departamentos A y B de una empresa, complete la tabla de frecuencia relativa y trace el polígono de frecuencia relativa de cada departamento en una misma gráfica.

Edad (años)	Frecuencia (empleados)		Frecuencia relativa	
	Depart. A	Depart. B	Depart. A	Depart. B
20 – 22	1	2		
22 – 24	3	1		
24 – 26	5	5		
26 – 28	12	20		
28 – 30	8	6		
30 – 32	4	3		
32 – 34	2	3		
Total	**35**	**45**		

6. Construir el polígono de frecuencia relativa.

(10 min)

* Inducir la construcción del polígono de frecuencia relativa en la forma similar que construye el polígono de frecuencia.
* Explicar que la forma de construir el polígono de frecuencia relativa es similar al aprendido con la diferencia que en el eje vertical se colocan las frecuencias relativas.
* Explicar que para ubicar la frecuencia relativa debe utilizarse una escala apropiada de acuerdo a los datos que se tengan.
* Indicar que se puede construir el polígono sin hacer el histograma en este caso en el eje horizontal se toma el punto medio de cada clase y se ubica la frecuencia relativa en el eje vertical para ubicar cada punto y luego se unen con líneas poligonales hasta formar el polígono.
* Hacer los polígonos de los dos grupos permitirá al estudiante poder observar las tendencias de las gráficas y poder hacer el análisis más fácilmente.

Unidad 8: Organización y presentación de datos

Lección 1: (4/4) Organización y presentación de datos

Sección 3: Frecuencia relativa

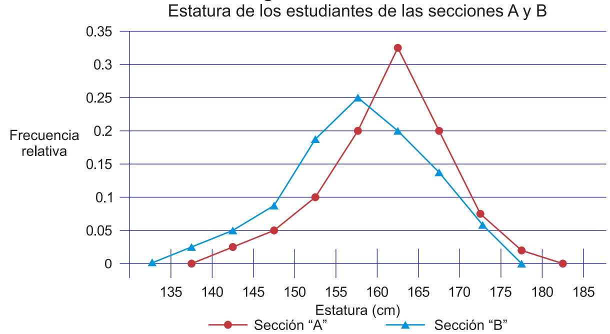
Objetivo:
- Elaborar tablas de distribución de frecuencia relativa.
- Trazar polígonos de frecuencia relativa.
- Comparar 2 distribuciones de frecuencia mediante polígonos de frecuencia relativa.

Ejemplo **1.6**

Construya en una misma gráfica el polígono de frecuencia relativa que represente las estaturas (cm) de los estudiantes de las secciones A y B de la página anterior, usando la tabla de frecuencia relativa.

Solución:
Primero escriba las clases en el eje horizontal y la frecuencia relativa en el eje vertical, usando una escala conveniente, en este caso lo haremos de 0.05 en 0.05. Luego considerando el punto medio de cada clase con su respectiva frecuencia relativa marque el punto para trazar después el polígono.

Polígono de frecuencia relativa
Estatura de los estudiantes de las secciones A y B



Observando la gráfica se puede concluir que los estudiantes de la sección "A" tienden a tener estaturas más altas que los de la sección "B".

Se debe agregar una clase más al inicio y al final con frecuencia relativa 0 para cerrar el polígono.

Ejercicio **1.5** La siguiente tabla muestra las edades de los empleados de dos departamentos A y B de una empresa. Complete la tabla con la frecuencia relativa y trace en una misma gráfica el polígono de frecuencia relativa de cada departamento.

Edad de los empleados

Edad (años)	Frecuencia (empleados)		Frecuencia relativa	
	Departamento A	Departamento B	Departamento A	Departamento B
20 – 22	1	2		
22 – 24	3	1		
24 – 26	5	5		
26 – 28	12	20		
28 – 30	8	6		
30 – 32	4	3		
32 – 34	2	3		
Total	**35**	**40**		

176
Unidad 8 - Organización y presentación de datos

7. Resolver *Ejercicio* **1.5**

(10 min)

Solución (Páginas 228 y 229)

Unidad 8: **Organización y presentación de datos**

Lección 2: (1/5) Extracción de la información

Sección 1: Moda (Para datos no agrupados)

Objetivo: Calcular la moda de un conjunto de datos.

Lección 2: Extracción de la información

Para representar las características o la tendencia de un grupo de datos o comparar los datos de dos o más grupos se utilizan las medidas de tendencia central.

Sección 1: Moda (Para datos no agrupados)

Ejemplo 2.1

En una escuela se realizaron actividades al aire libre. Los estudiantes de una sección decidieron mediante votación cuántas veces lo harán en el año. La siguiente tabla muestra el resultado de la votación. ¿Qué dato de la tabla tiene mayor frecuencia?

Número de veces de actividad al aire libre	Frecuencia (estudiantes)
1	0
2	4
3	2
4	11
5	5
6	7
7	0
8	3
9	1
Total	**33**

Frecuencia: Cantidad de estudiantes

Solución: El valor más frecuente es 4, pues obtuvo 11 votos.

Al dato estadístico que tiene mayor frecuencia se le llama **moda** de la distribución de frecuencia.

La **moda** de una distribución de frecuencias es el dato con mayor frecuencia o dato más frecuente.

Si todos los datos tienen la misma frecuencia la moda no existe.

Ejercicio 2.1 Encuentre la moda de los siguientes conjuntos de datos.

a) La siguiente tabla muestra la cantidad de niños que asistieron a una fiesta de cumpleaños clasificados por edad.

Edad (años)	Frecuencia (niños)
4	2
5	3
6	2
7	5
8	4
Total	**16**

Frecuencia: Cantidad de niños

b) La siguiente tabla presenta las horas de estudio que dedican los estudiantes de 9no grado de un instituto.

Estudio semanal (horas)	Frecuencia (estudiantes)
3	7
5	11
7	5
8	6
Total	**29**

Frecuencia: Cantidad de estudiantes

177

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

3. **Resolver Ejercicio 2.1**

   (10 min)

Solución

a) La moda es 7 años con 5 niños

b) La moda es 5 horas con 11 estudiantes

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

La siguiente tabla muestra la cantidad de niños que asistieron a una fiesta de cumpleaños clasificados por edad. Encuentre la moda de los datos.

Edad (años)	Frecuencia (niños)
4	2
5	3
6	2
7	5
8	4
Total	**16**

1. **Encontrar el valor más frecuente de los datos representados en la tabla.**

   Ejemplo 2.1

   (7 min)

* Indicar que observen los datos representados en la tabla.

¿Qué se está representando en la tabla?

¿Cuál es el dato que obtuvo mayor cantidad de votos?

* Concluir que según la votación presentada 11 alumnos prefieren que las actividades al aire libre se desarrollen 4 veces al año, siendo este el valor más votado.

2. **Definir la moda de una distribución de datos no agrupados.**

   (8 min)

* Concluir que la moda es el valor más frecuente de un conjunto de datos.

* Concluir que la moda en el ejemplo es 4.

* Explicar que cuando un conjunto de datos todos tienen la misma frecuencia entonces no existe la moda, de igual manera hay distribuciones que pueden tener más de una moda.

Indicador de logro

La siguiente tabla muestra la cantidad de niños que asistieron a una fiesta de cumpleaños clasificados por edad. Encuentre la moda de los datos.

Edad (años)	Frecuencia (niños)
4	2
5	3
6	2
7	5
8	4
Total	**16**

4. Dado un conjunto de datos estadísticos encuentran la moda de la distribución.

Ejemplo **2.2**

(10 min)

* Presentar la situación del problema y analizar lo que se pide.

¿Qué nos piden encontrar?

* Indicar que ordenen los datos de menor a mayor para facilitar el trabajo.

* Concluir que la moda es el dato que más se repite.

5. Resolver *Ejercicio* **2.2**

(10 min)

Solución

a) Los datos ordenados de menor a mayor son: 10 10 11 12 12 14 15 15 15 15 16 19
La moda es 15.

b) Los datos ordenados de menor a mayor son:
150 150 150 180 180 180 200 200 200 200 200 250 250 250 250 250
La distribución tiene dos modas: 200 y 250.

Unidad 8: Organización y presentación de datos

Lección 2: (1/5) Extracción de la información

Sección 1: Moda (Para datos no agrupados)

Objetivo: Calcular la moda de un conjunto de datos.

Ejemplo **2.2**

Encuentre la moda del siguiente problema.

La edad en años de un grupo de estudiantes tomados al azar en un centro de Educación Básica.

14	12	16	11	13	18	18	16	16	15	12	13	11	9
12	14	11	15	14	12	15	11	10	9	15	14	18	12

Solución:

Ordene los datos en un arreglo de menor a mayor.

9 9 10 11 11 11 11 12 12 12 12 12 13 13 14 14 14 14 15 15 15 15 16 16 16 18 18 18

La edad que más se repite es 12 con 5 veces, entonces 12 es la moda.

Respuesta: 12 años.

Ejercicio **2.2** Encuentre la moda en los siguientes incisos:

a) Los siguientes datos corresponden a los resultados de una prueba de matemáticas (20 puntos) aplicada a 12 estudiantes de 9no grado.

16 15 19 10 11 15 12 12 15 10 15 14

b) Los datos representan los salarios diarios de 16 trabajadores de albañilería en la construcción de un edificio.

250	200	180	200	180	150	200	250
150	250	200	180	150	250	250	200

Si una distribución de frecuencias tiene dos datos estadísticos con la misma frecuencia siendo esta la mayor, entonces la distribución es bimodal, es decir, tiene dos modas.

178
Unidad 8 - Organización y presentación de datos

Unidad 8: Organización y presentación de datos

Lección 2: (2/5) Extracción de la información

Sección 2: Media

Objetivo: Calcular la media de un conjunto de datos.

Sección 2: Media

En 6to grado aprendimos la siguiente fórmula para calcular la media de un conjunto de valores numéricos.

$$Media = \frac{Suma\ del\ valor\ de\ los\ datos}{Cantidad\ de\ los\ datos}$$

La cantidad de los datos es igual al total de la frecuencia.

A la media también se le llama promedio.

Ejemplo 2.3

En la asignatura de Ciencias Naturales un estudiante obtuvo las siguientes notas en cada uno de los 4 parciales:

Parcial	I	II	III	IV
Calificación (%)	80	85	80	75

¿Cuál es la media obtenida por el estudiante en la asignatura de Ciencias Naturales?

Solución:
La suma de las 4 notas se divide entre 4 porque cada dato tiene frecuencia 1 y son 4 datos.

$$\text{Media: } \frac{80 + 85 + 80 + 75}{4} = 80$$

Respuesta: 80%

Ejercicio 2.3 El peso en libras de 5 personas hospitalizadas es el siguiente:

Personas	A	B	C	D	E
Peso (libras)	150	170	140	190	200

Encuentre el promedio (media) en libras.

La media también se puede calcular con datos que se repiten, o datos con frecuencia.

Ejemplo 2.4

En un corral se registró la cantidad de huevos que pusieron las gallinas durante dos semanas. Los datos se resumen en la siguiente tabla de frecuencia.

Cantidad de huevos	Frecuencia (gallinas)
5	1
6	2
7	4
8	6
9	3
10	3
11	1
Total	**20**

Frecuencia: Cantidad de gallinas.

De la información de la tabla se sabe que 2 gallinas pusieron 6 huevos cada una, por lo tanto en lugar de sumar separadamente $6 + 6$ se multiplica 6×2 para calcular la cantidad de huevos que pusieron estas 2 gallinas.

Como en la media se divide entre el total de frecuencia, y en este ejemplo el total de frecuencia es la cantidad de gallinas, entonces se debe dividir entre la suma de las frecuencias que es 20.

179

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

* Concluir que en este ejemplo los datos se repiten más de una vez.
* Explicar que la media se calcula de manera similar. Sin embargo en este caso se debe multiplicar el dato por la frecuencia y luego sumar todo y dividirlo entre el total de la frecuencia.

Indicador de logro

En un hospital se registró el peso en libras de niños de 2 años de edad y los resultados fueron los siguientes

Peso (libras)	Frecuencia (niños)
18	2
19	3
21	5
22	10
Total	**20**

Encuentre la media del peso en libras

1. **Encontrar la media de las calificaciones de la asignatura de Ciencias Naturales de un estudiante.**
   Ejemplo 2.3
   (10 min)

* Presentar la situación a los estudiantes y pedir que analicen la manera de cómo encontrar la media de los datos, recordando que se estudió en 6to grado.
¿Qué debemos encontrar con las notas del estudiante?
* Hacer que el estudiante se dé cuenta que la media es un promedio.
¿Cómo se encuentra la media?
* Concluir que

$$Media = \frac{suma\ del\ valor\ de\ los\ datos}{cantidad\ de\ datos}$$

* Indicar que calculen la media de las calificaciones.

2. **Resolver** Ejercicio 2.3
   (5 min)
   Solución
   170 libras.

3. **Encontrar la media en una distribución de frecuencia.**
   Ejemplo 2.4
   (15 min)

* Presentar la situación y analizar la manera de encontrar la media.
¿Cuál es la diferencia del ejemplo anterior y este?

continúa en la siguiente página...

Unidad 8: **Organización y presentación de datos**

Lección 2: (2/5) Extracción de la información

Sección 2: Media

Objetivo: Calcular la media de un conjunto de datos.

Indicador de logro

En un hospital se registró el peso en libras de niños de 2 años de edad y los resultados fueron los siguientes

Peso (libras)	Frecuencia (niños)
18	2
19	3
21	5
22	10
Total	**20**

Encuentre la media del peso en libras

* Utilizando la tabla de frecuencia de la cantidad de huevos ¿Cuántos huevos pusieron las gallinas?

  ¿Cuántas gallinas pusieron 5 huevos?

  ¿Cuántas gallinas pusieron 6 huevos?

  ¿Cuál es el total de huevos de las gallinas que pusieron 6?
* Calcular la cantidad total de huevos.
* Concluir que son 161 huevos.

  ¿Entre cuántas gallinas pusieron 161 huevos?
* Indicar que encuentren la media.
* Concluir que la cantidad media de huevos que pusieron las gallinas es 8.05 huevos.
* Confirmar que la suma del valor de los datos es la suma de los productos (*valor* × *frecuencia*) y la cantidad de los datos es la suma de las frecuencias

4. Resolver Ejercicio **2.4**

(15 min)

Solución

a) 1.4 hermanos

b) 20.9 libras

Por lo tanto se tiene

$$\text{Media: } \frac{5+6+6+7+7+7+7+8+8+8+8+8+8+9+9+9+10+10+10+11}{1+2+4+6+3+3+1}$$

$$= \frac{(5\times 1)+(6\times 2)+(7\times 4)+(8\times 6)+(9\times 3)+(10\times 3)+(11\times 1)}{20}$$

$$= \frac{5+12+28+48+27+30+11}{20}$$

$$= \frac{161}{20}$$

$$= 8.05$$

$$\textit{Media} = \frac{\textit{Suma del (valor} \times \textit{frecuencia de cada clase)}}{\textit{Suma de las frecuencias}}$$

Ejercicio 2.4

a) En una sección de 9no grado les preguntaron a los estudiantes, ¿cuántos hermanos tienen? La respuesta se resume en la siguiente tabla:

Número de hermanos	Frecuencia (estudiantes)
0	8
1	13
2	14
3	5
Total	**40**

Frecuencia: Cantidad de estudiantes.

Encuentre la media de hermanos de la sección de 9no grado.

b) En un hospital se registró el peso en libras de niños de 1 año de edad y los resultados fueron los siguientes:

Peso (libras)	Frecuencia (niños)
18	2
19	3
21	5
22	10
Total	**20**

Frecuencia: Cantidad de niños.

Encuentre la media del peso en libras.

Lección 2: Extracción de la información
(3/5)

Sección 2: Mediana

Objetivo: • Calcular la mediana para un conjunto de datos.

Indicador de logro

Encuentre la mediana de los siguientes datos:

a) Cantidad de útiles escolares de 9 estudiantes: 5 7 8 8 9 11 12 12 15

b) Goles de un equipo de futbol en 16 partidos: 2 1 1 0 0 4 5 3 4 6 2 3 3 1 0 0.

Sección 3: **Mediana**

Para analizar datos estadísticos es necesario calcular otra medida de tendencia central llamada mediana.

La **mediana** es el valor que queda en el centro de un conjunto de datos estadísticos cuando estos se ordenan de menor a mayor.

Ejemplo 2.5

Encuentre el valor de la mediana de los siguientes datos:
6 5 9 10 15 7 12

Solución:
Ordene los datos de menor a mayor así:
5 6 7 9 10 12 15
Después de ordenar los datos, la mediana es el dato que se encuentra en el centro.

Respuesta: La mediana es 9.

Ejercicio 2.5 Encuentre la mediana de los siguientes datos:

a) Cantidad de útiles escolares de 9 estudiantes
5 7 8 8 9 11 12 12 15

b) Peso de 13 alumnos en kg
72 65 71 56 59 63 61 70 52 49 68 55 50

c) Lápices tinta en 13 bolsones escolares
4 2 3 1 0 3 4 2 1 1 3 2 5

Ejemplo 2.6

Encuentre el valor de la mediana de los siguientes datos:
10 13 11 9 20 7 6 4 18 16

Solución:
Se ordenan los datos de menor a mayor:
4 6 7 9 10 11 13 16 18 20
Después de ordenar los datos, la mediana es el promedio de los dos valores que se encuentran en el centro de la distribución.

Mediana: $\frac{10 + 11}{2} = 10.5$

Respuesta: La mediana es 10.5

Cuando hay un número impar de datos en una distribución la mediana es el dato que se encuentra en el centro. Cuando el número es par la mediana es el promedio de los dos datos en el centro.

Ejercicio 2.6 Encuentre la mediana de los siguientes datos:

a) Goles de un equipo de fútbol en 16 partidos.
2 1 1 0 0 4 5 3 4 6 2 3 3 1 0 0

b) Altura en centímetros de 10 alumnos.
153 169 172 158 163 150 165 171 170 163

181

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

---

1. Encontrar la mediana de una distribución de datos estadísticos Ejemplo 2.5

(15 min)

* Explicar que la mediana es otra medida de tendencia central que se utiliza para analizar datos estadísticos.

* Concluir en el resumen del LE.

* Presentar la situación del Ejemplo 2.5 e indicar a los estudiantes que piensen la manera de obtener la mediana.

* Indicar que ordenen los datos de menor a mayor.

¿Qué datos quedan en el centro de la distribución?

2. Resolver Ejercicio 2.5

(10 min)

Solución

a) Los datos: 5, 7, 8, 8, 9, 11, 12, 12, 15

Respuesta: La mediana es 9

b) Los datos: 49, 50, 52, 55, 56, 59, 61, 63, 65, 68, 70, 71, 72

Respuesta: La mediana es 61.

c) Los datos: 0111222333445

Respuesta: La mediana es 2

3. Encontrar la mediana en una distribución de datos cuando el total de datos es un número par.

(10 min)

* Explicar que el procedimiento es similar que el ejemplo anterior con la diferencia que se obtiene un promedio de los dos datos que quedan en el centro.

4. Resolver Ejercicio 2.6

(10 min)

Solución

a) Los datos ordenados de menor a mayor: 0000 111 22 333 4456

Respuesta: La mediana es 2

b) Los datos ordenados de menor a mayor: 150, 153, 158, 163, 163,165, 169, 170, 171, 172

Respuesta: La mediana es 164

Unidad 8: **Organización y presentación de datos**

Lección 2: (4/5) Extracción de la información

Sección 3: Mediana

Objetivo: Comparar la media y la mediana de un conjunto de datos.

Indicador de logro

Calcula la media y la mediana de los siguientes datos:

Salarios mensuales de 8 trabajadores de una empresa

Empleado	A	B	C	D	E	F	G	H
Salario	8,000	8,500	25,000	8,500	8,500	8,000	25,000	8,000

1. Encontrar la media y la mediana de los salarios de una empresa. *Ejemplo* **2.7**

(25 min)

* Presentar la situación y pedir que la observen y piensen la manera de encontrar la media y la mediana.

* Indicar que calculen la media y la mediana de los datos siguiendo los procedimientos vistos en clase.

* De acuerdo con los datos en la tabla. ¿La mayoría de los salarios están cerca de la media?

¿Cuál es la razón de que la media no refleje el promedio de salarios?

* Concluir que cuando haya datos muy pequeños o muy grandes en una distribución estos afectan el valor de la media.

* Observando la mediana, ¿están la mayoría de los datos de la tabla cerca de la mediana?

* Concluir que en este caso resulta mejor tomar la mediana y no la media como el valor que representa la característica o la tendencia de los datos.

* Indicar que lean el resumen del LE con respecto a la media y mediana.

Ejemplo **2.7**

En una empresa 10 empleados tienen los siguientes salarios.

Empleado	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Salario (Lempiras)	10,000	10,500	11,000	10,000	11,000	10,500	10,500	10,500	36,000	36,000

Encuentra la media y la mediana.

Solución:

Media: $\dfrac{10000 + 10500 + 11000 + 10000 + 11000 + 10500 + 10500 + 10500 + 36000 + 36000}{10}$

$= \dfrac{156000}{10} = 15600$

Para calcular la mediana se deben ordenar los datos de menor a mayor (forma creciente):

10,000 10,000 10,500 10,500 10,500 10,500 11,000 11,000 36,000 36,000

Como la cantidad de datos es par:

Mediana: $\dfrac{10500 + 10500}{2} = 10500$

Como la cantidad de datos es par, la mediana es la media de los dos datos centrales.

Respuesta: La media es 15, 600
La mediana es 10,500

De la forma creciente se puede observar que la mayor parte de los datos está entre 10,000 y 11,000. Por lo tanto la mediana representa la tendencia de los datos, es decir que la mayoría de los empleados tienen un salario entre 10,000 y 11,000 lempiras.

En el *Ejemplo* **2.7** la media está fuertemente influenciada por los datos excepcionalmente altos como son los dos salarios de 36,000.

En conclusión, la media en algunos casos de distribución de frecuencias se ve influenciada por datos extremos muy bajos o muy altos, en este caso muy altos.

La mediana que es 10,500 es un valor cercano a 8 datos de la tabla.

Ejercicio **2.7** Calcula la media y la mediana de los siguientes datos.

a) Coeficiente intelectual de 9 niños.

77 91 85 91 90 92 90 91 85

b) Salarios mensuales de 8 trabajadores de una empresa.

Empleado	A	B	C	D	E	F	G	H
Salario	8,000	8,500	25,000	8,500	8,500	8,000	25,000	8,000

c) Edades de personas en un cine.

4 8 11 13 14 14 15 17 20 24

d) Duración en horas de bombillos de luz eléctrica.

93 87 80 86 87 94 95 103
94 82 86 86 98 94 85

182 *Unidad 8 - Organización y presentación de datos*

2. Resolver *Ejercicio* **2.7**

(20 min)

Solución

a) Media: 88
Mediana: 90

b) Media: 12437.5
Mediana: 8,500

c) Media: 14
Mediana: 14

d) Media: 90
Mediana: 87

Unidad 8: **Organización y presentación de datos**

Lección 2: (5/5) Extracción de la información

Sección 3: Mediana

Objetivo: Encontrar la moda, la media y la mediana de un conjunto de datos.

Ejemplo 2.8

De los siguientes datos:
1 3 2 0 4 2 1 4 2 3 0 3 3 2 2 5 2 3 1 2

¿Cuál es la media, la mediana y la moda?

Solución:

a) **Media**

Se realiza lo siguiente:

1) Ordene los datos de menor a mayor.

0 0 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 4 4 5

2) Resuma los datos en una tabla de frecuencia.

Dato	Frecuencia
0	2
1	3
2	7
3	5
4	2
5	1
Total	**20**

Frecuencia: Cantidad de datos.

3) Calcule la media.

Para sacar la media se usa la información de la tabla.

$$\text{Media} = \frac{(0\times 2)+(1\times 3)+(2\times 7)+(3\times 5)+(4\times 2)+(5\times 1)}{2+3+7+5+2+1}$$

$$= \frac{0+3+14+15+8+5}{20}$$

$$= \frac{45}{20}$$

$$= 2.25$$

b) **Mediana**

0 0 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 4 4 5

Se toma (o subraya) la misma cantidad de datos a ambos extremos.
Se saca la media de los datos que quedan en el centro.

$$\text{Mediana: } \frac{2+2}{2} = 2$$

183

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

Indicador de logro

Encuentre la moda, la media y la mediana de los siguientes datos:

87 83 82 83 83 82 82 82 82 80

1. Encontrar la moda, media y la mediana de una distribución de datos estadísticos.

Ejemplo 2.8

(20 min)

* Explicar que los datos se pueden organizar en una tabla para trabajar mejor con ellos.

* Indicar que apliquen los conocimientos adquiridos para calcular la moda, media y mediana de la distribución.

* Comparar los datos encontrados para saber cuál de ellos se aproxima más a los datos dados.

* Hacer un resumen de lo que es la moda, media y mediana de acuerdo a lo aprendido en clase.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Encuentre la moda, la media y la mediana de los siguientes datos:

87 83 82 83 83 82 82 82 82 80

2. Resolver Ejercicio 2.8

(25 min)

Solución

a) Moda: 60 y 70
media: 65
mediana: 65

b) b1) Moda: 14
Media: 14
Mediana: 14

b2) Moda: 82
Media: 82.6
Mediana: 82

c) Moda: 65 kg
media: 63 kg
mediana: 65 kg

d) d1) Moda: 11
Media: 8.8
Mediana: 9

d2) Moda: 18
Media: 21.6
Mediana: 21

Unidad 8: Organización y presentación de datos

Lección 2: (5/5) Extracción de la información

Sección 3: Mediana

Objetivo: Encontrar la moda, la media y la mediana de un conjunto de datos.

c) **Moda**

Para sacar la moda use el inciso a), el dato con mayor frecuencia es 2, que tiene una frecuencia de 7. (El dato de moda)
La moda es 2.

Respuesta: La media es 2.25.
La mediana es 2.
La moda es 2.

Ejercicio 2.8

a) En un examen de matemáticas 5 estudiantes obtuvieron las siguientes calificaciones: Calcule la media, la mediana y la moda.

Estudiantes	A	B	C	D	E
Calificaciones	70	60	60	65	70

b) Encuentre la media, la mediana y la moda de los siguientes datos.

b1) 14 8 20 13 14 4 24 15 17 11 14

b2) 87 83 82 83 83 82 82 82 82 80

c) Encuentre la media, la mediana y la moda del peso en kg de 13 alumnos.

72 65 71 56 72 59 65 70 65 52 56 62 54

d) Encuentre la media, la moda y la mediana en las tablas de frecuencia siguientes.

d1)

Dato	Frecuencia
3	1
5	2
7	3
9	6
11	8
Total	**20**

d2)

Dato	Frecuencia
18	16
21	10
24	7
27	4
30	3
Total	**40**

Recuerda que para obtener la media debes multiplicar cada dato por su frecuencia, luego sumar los resultados y dividir entre el total de frecuencia.

Para sacar la mediana, ubica los datos el número de veces que indica la frecuencia.
Ejemplo: 3 5 5 7 7 7 ...

184

Unidad 8 - Organización y presentación de datos

Unidad 8: **Organización y presentación de datos**

(1/2) Ejercicios de la unidad

Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre organización y presentación de datos.

Ejercicios

1 En los incisos siguientes:

i) Ordene los datos de menor a mayor.
ii) Elabore una tabla de frecuencia.
iii) Responda a la siguiente pregunta: ¿Cuál es el dato más frecuente?

a) Con un grupo de personas de la tercera edad se realizó un estudio de la reacción a cierto medicamento. Las edades de las personas que participaron fueron las siguientes:
65 68 74 78 80 65 78 86 86 86 68 68 86

b) Los siguientes datos representan el número de veces que han ido al cine en el último mes los alumnos de 8vo grado de un instituto.
2 3 0 1 5 3 2 1 0 0 2 1 2 3 5 0 5 4 1 1 1 2 0 1 1

2 Los goles que se han marcado en la última jornada de una liga de fútbol han sido en los siguientes minutos de juego:
20 11 89 3 20 4 2 65 84 29 59 30 89 33 78
54 21 19 60 34 56 63 45 31 26 32 5 78 88 85

Con los datos anteriores dados elabore:
a) Una tabla de frecuencia, con las clases: 0 – 15; 15 – 30; 30 – 45; ...
b) Un histograma.
c) El polígono de frecuencia.

3 Con los datos estadísticos:
5 9 8 8 9 7 1 3 5 3 9 6 9 9 7 5 2 2 7 8 5 7 1 4 6 4 3 8 6 3

Elabore:
a) Una tabla de frecuencia, con las clases: 1 – 3; 3 – 5; 5 – 7; ...
b) El histograma y el polígono de frecuencias en una misma gráfica.

4 La siguiente tabla de datos registra la distribución de las edades de los pacientes hospitalizados en una sala de cirugías.
Elabore el histograma y el polígono de frecuencia.

Edad (años)	Frecuencia (pacientes)
27 – 32	4
32 – 37	6
37 – 42	7
42 – 47	3
Total	**20**

Frecuencia: Cantidad de pacientes

185

Libro del Estudiante - Matemáticas 9º grado

2, 3 y 4. Elaboración de tablas de frecuencia, histogramas y polígonos de frecuencia

Solución de 2, 3 y 4 (Páginas 229 y 230)

1 Elaborar tablas de frecuencia.

Solución

a)

i) Los datos ordenados de menor a mayor:
65 65 68 68 68 74 78 78 80 86 86 86 86

ii) Tabla de frecuencia

Edad (años)	Frecuencia (personas)
65	2
68	3
74	1
78	2
80	1
86	4
Total	**13**

Frecuencia: Cantidad de personas

iii) El dato con mayor frecuencia es 86 con 4 personas.

b)

i) Los datos ordenados de menor a mayor son: 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 3 3 3 4 5 5 5

ii) Tabla de frecuencia

Número de veces que ha ido al cine	Frecuencia (Alumnos)
0	5
1	8
2	5
3	3
4	1
5	3
Total	**25**

Frecuencia: Cantidad de alumnos

ii) El dato con mayor frecuencia es 1 con 8 alumnos.

5 Trazar polígonos de frecuencia relativa.

Solución (Página 231)

6 Encontrar la moda media y mediana de una distribución de datos estadísticos.

Solución

a) Los datos ordenandos de menor a mayor: 42 42 43 43 43 43 44 45 45 45 45 45 47 48 49

b) Moda: 45
Media: 44.6
Mediana: 45

7 Encontrar la moda media y mediana de una distribución de datos estadísticos.

Solución (Página 231)

a) Moda: 86
Media: 76
Mediana: 78

b) Moda: 1
Media: 1.84
Mediana: 1

8 Encontrar Media y moda en tablas de frecuencia.

Solución (Página 231)

a) Media: 7.5
Moda: 6

b) Media 18.2
Moda: 19

Unidad 8: **Organización y presentación de datos**

(2/2) Ejercicios de la unidad

Objetivo: • Confirmar lo aprendido sobre organización y presentación de datos.

5 Elabore los polígonos de frecuencia relativa de los siguientes datos:

Calificación (puntos)	Frecuencia (estudiantes)	
	Sección "A"	Sección "B"
28 – 30	5	7
30 – 32	3	5
32 – 34	3	3
34 – 36	3	2
36 – 38	1	1
38 – 40	0	4
Total	**15**	**22**

Frecuencia: Cantidad de estudiantes

6 Con los datos:
49 47 45 45 42 48 42 43 45 45 43 44 43 45 43

Realice:
a) Escriba los datos de menor a mayor.
b) Encuentre la media, la mediana y la moda.

7 Encuentre la media, la mediana y la moda de los datos del ejercicio 1 inciso a) y b).

8 Encuentre la media y la moda según la información dada en las tablas de frecuencia.

a)

Años trabajados	Frecuencia (empleados)
5	3
6	7
7	3
8	2
9	5
10	3
11	1
Total	**24**

Frecuencia: Cantidad de empleados

b)

Llegadas tarde (minutos)	Frecuencia (empleados)
15	3
16	3
17	3
18	6
19	9
20	3
21	3
Total	**30**

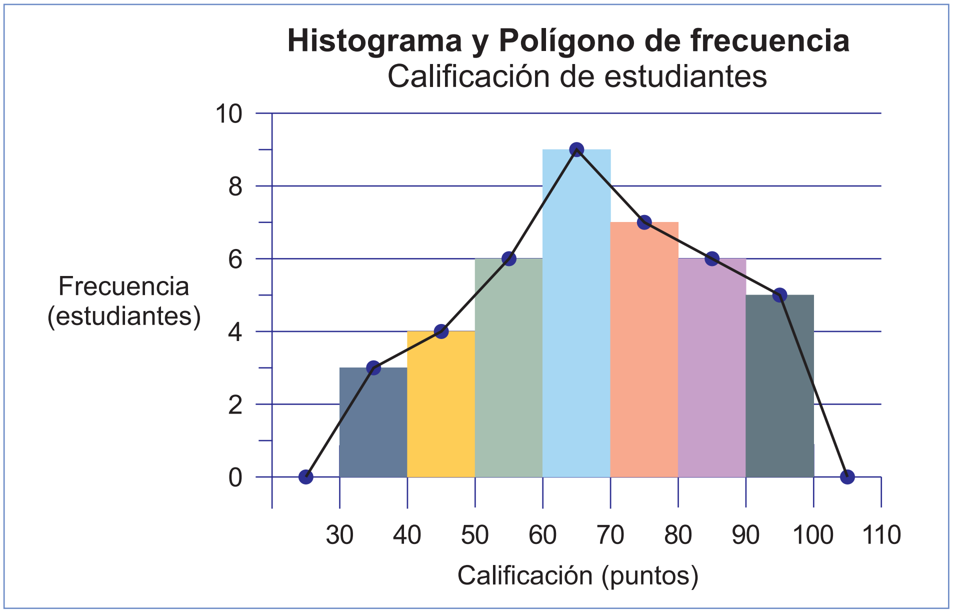
Frecuencia: Cantidad de empleados

Soluciones de los Ejercicios

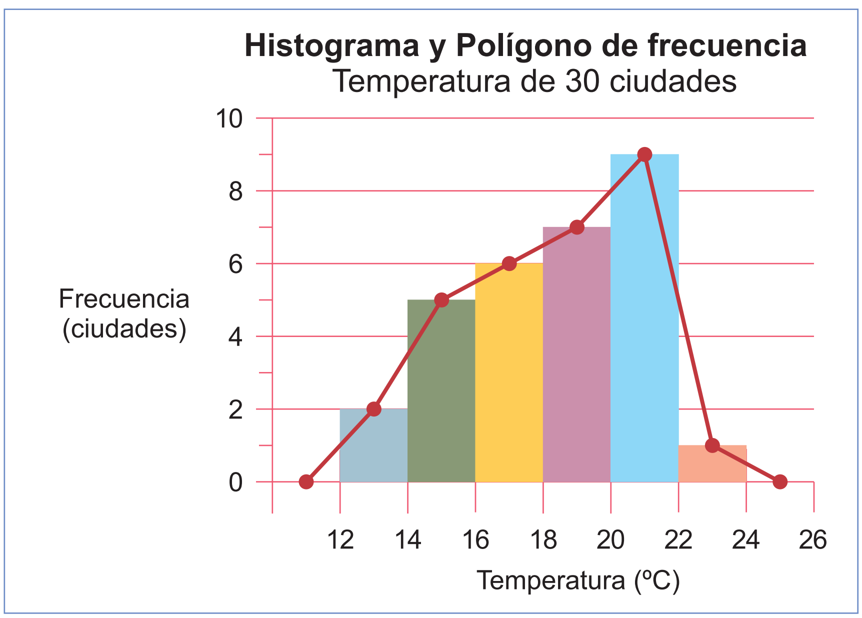
Ejercicio 1.3 (Página 212 - 213)

Histograma y polígono de frecuencia:

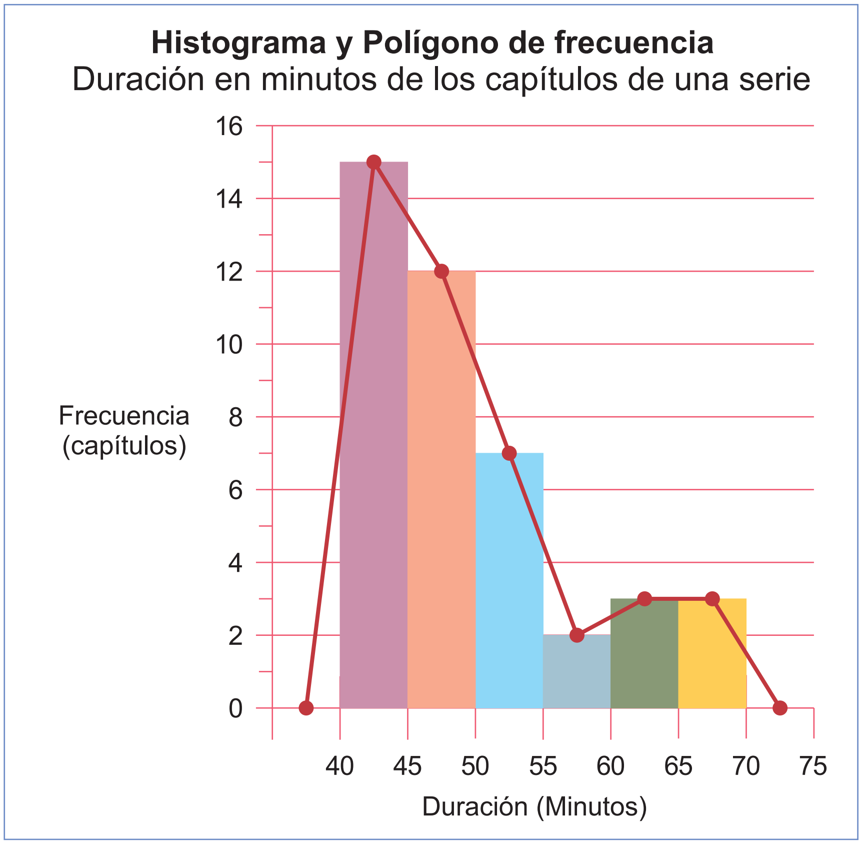
a)



b) b1) Histograma y polígono de frecuencias



b2) Histograma y polígono de frecuencias

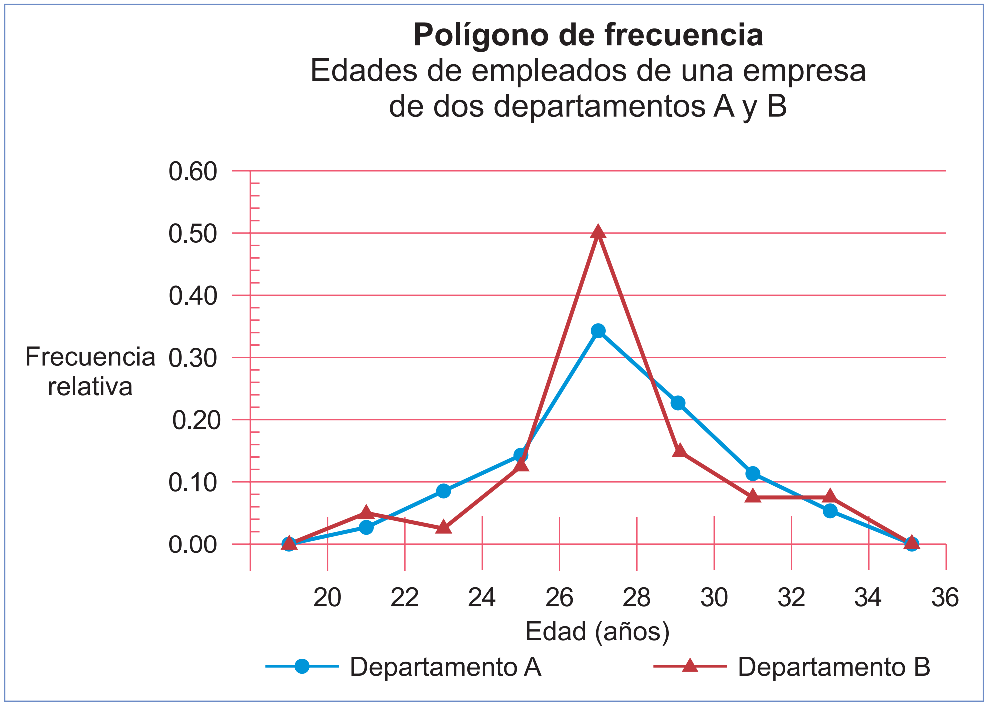


Ejercicio 1.5 (Página 216)

Tabla de frecuencia relativa

Edad (años)	Frecuencia (estudiantes)		Frecuencia relativa	
	Departamento A	Departamento B	Departamento A	Departamento B
20 – 22	1	2	0.0286	0.0500
22 – 24	3	1	0.0857	0.0250
24 – 26	5	5	0.1429	0.1250
26 – 28	12	20	0.3429	0.5000
28 – 30	8	6	0.2286	0.1500
30 – 32	4	3	0.1143	0.0750
32 – 34	2	3	0.0571	0.0750
Total	**35**	**40**	**1**	**1**

Polígono de frecuencia relativa



Solución de ejercicios

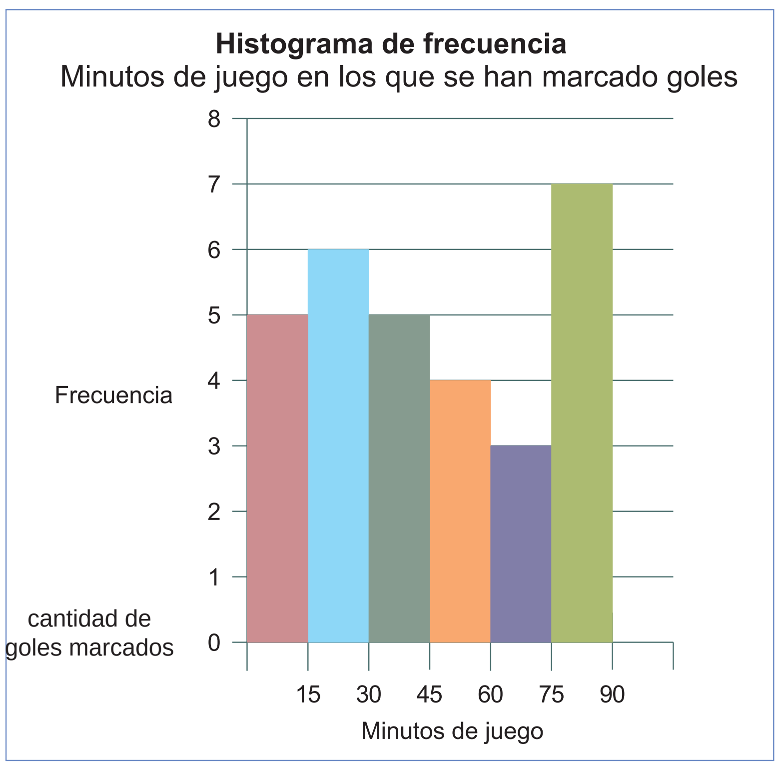
2 (Página 225)

a) Tabla de frecuencia

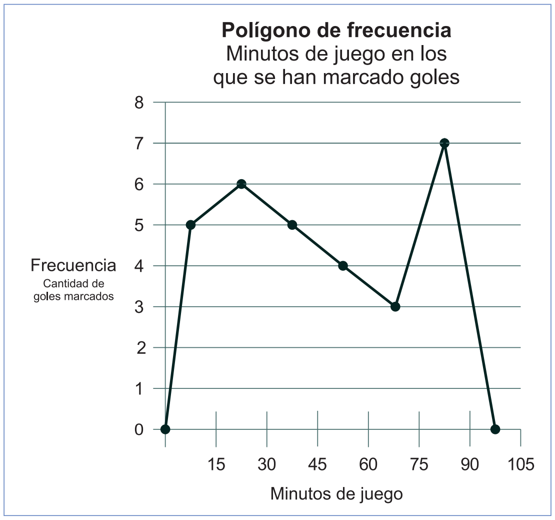
Minutos de juego	Frecuencia
0 - 15	5
15 - 30	6
30 - 45	5
45 - 60	4
60 - 75	3
75 - 90	7
Total	**30**

Frecuencia: Cantidad de goles marcados

b) Histograma de frecuencia



c) Polígono de frecuencia

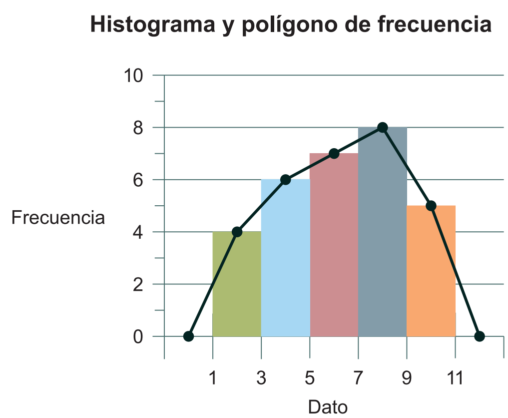


3 (Página 225)

a) Tabla de frecuencia

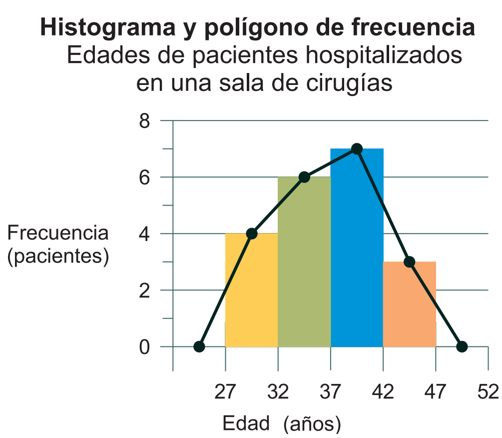
Dato	Frecuencia
1 - 3	4
3 - 5	6
5 - 7	7
7 - 9	8
9 - 11	5
Total	**30**

b) Histograma y polígono de frecuencia



4 (Página 225)

Histograma y polígono de frecuencia

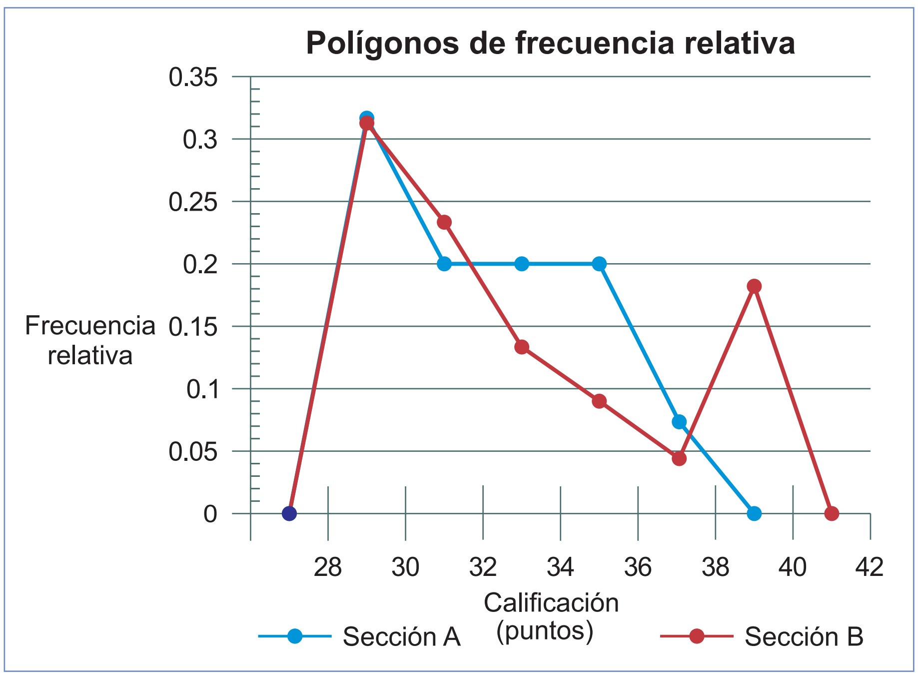


5 (Página 226)

Tabla de frecuencia relativa

Calificación (puntos)	Frecuencia (estudiantes)		Frecuencia relativa	
	Sección A	Sección B	Sección A	Sección B
28 – 30	5	7	0.3333	0.3182
30 – 32	3	5	0.2000	0.2273
32 – 34	3	3	0.2000	0.1364
34 – 36	3	2	0.2000	0.0909
36 – 38	1	1	0.0667	0.0455
38 – 40	0	4	0.0000	0.1818
Total	**15**	**22**	**1**	**1**

Polígonos de frecuencia relativa:



AGRADECIMIENTO

La Secretaría de Educación (SE), La Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (UPNFM) y La Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA), AGRADECEN al personal docente y estudiantes de los centros educativos gubernamentales de Educación Básica y de Educación Media que participaron en el proceso de validación de los contenidos de los Libros del Estudiante y las Guías del Docente de Matemática para 7mo, 8vo y 9no grado que fueron elaborados en el marco del Proyecto de Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemática Fase III (PROMETAM FASE III).

DISTRITO CENTRAL - FRANCISCO MORAZÁN

CEB Gustavo Simón Núñez
Ana Yansy Flores Corrales
Hefzy Paola Núñez Arambú

CEB José Ramón Cálix Figueroa
Sayda Patricia Cáceres Martínez
Yolanda Ivette Fonseca Rivas

CEB José Trinidad Reyes
Jorge Iván Carrasco Salinas

CEB República de China
Sonia Maribel Midence Cruz

CEB República de Costa Rica
Maribel Montes Torres
Juan Carlos Díaz Solano

CEB San Miguel de Heredia
Daniel Stanly Interiano Rápalo

Instituto Héctor Pineda Ugarte
Kelin Issela Fuentes
Braulio Joel Gómez Sierra

Instituto España Jesús Milla Selva
Cindy Gabriela Alméndarez Ávila
Grace Janice Galindo Barahona
Karina Patricia Ávila Burgos

Centro de Investigación e Innovación Educativa (CIIE–UPNFM)
Ana Isabel Osorto Chávez
Samira Iveth Suazo Rivera
Rooy Estiven Fúnez Posadas

CHOLUTECA, CHOLUTECA

CEB José Trinidad Cabañas
Juan Ramón Carranza

Instituto José Cecilio del Valle
Alba Luz Contreras
Margarita Alvarenga Sandoval
Marco Antonio Escobar Espino

DANLÍ, EL PARAÍSO

CEB Martha Irías de Alcántara
Karla Vanessa Sauceda Iglesias

Instituto Departamental de Oriente
Isis Teresa Gallo Avilez
Judith Liliana Zelaya Escalante
Fairon Orlando Amador Peralta
Carlos Roberto Melgara Hernández

GRACIAS, LEMPIRA

Centro de Investigación e Innovación Educativa (CIIE – UPNFM)
Dioselina Serrano Benítez

De igual manera, se les AGRADECE a los estudiantes de último año de la Carrera de Matemática de la UPNFM en su práctica profesional II, que fueron asignados a PROMETAM Fase III durante los años 2016, 2017 y 2018, quienes contribuyeron en la elaboración y revisión de los Libros de Matemática.