República de Honduras

Secretaría de Educación

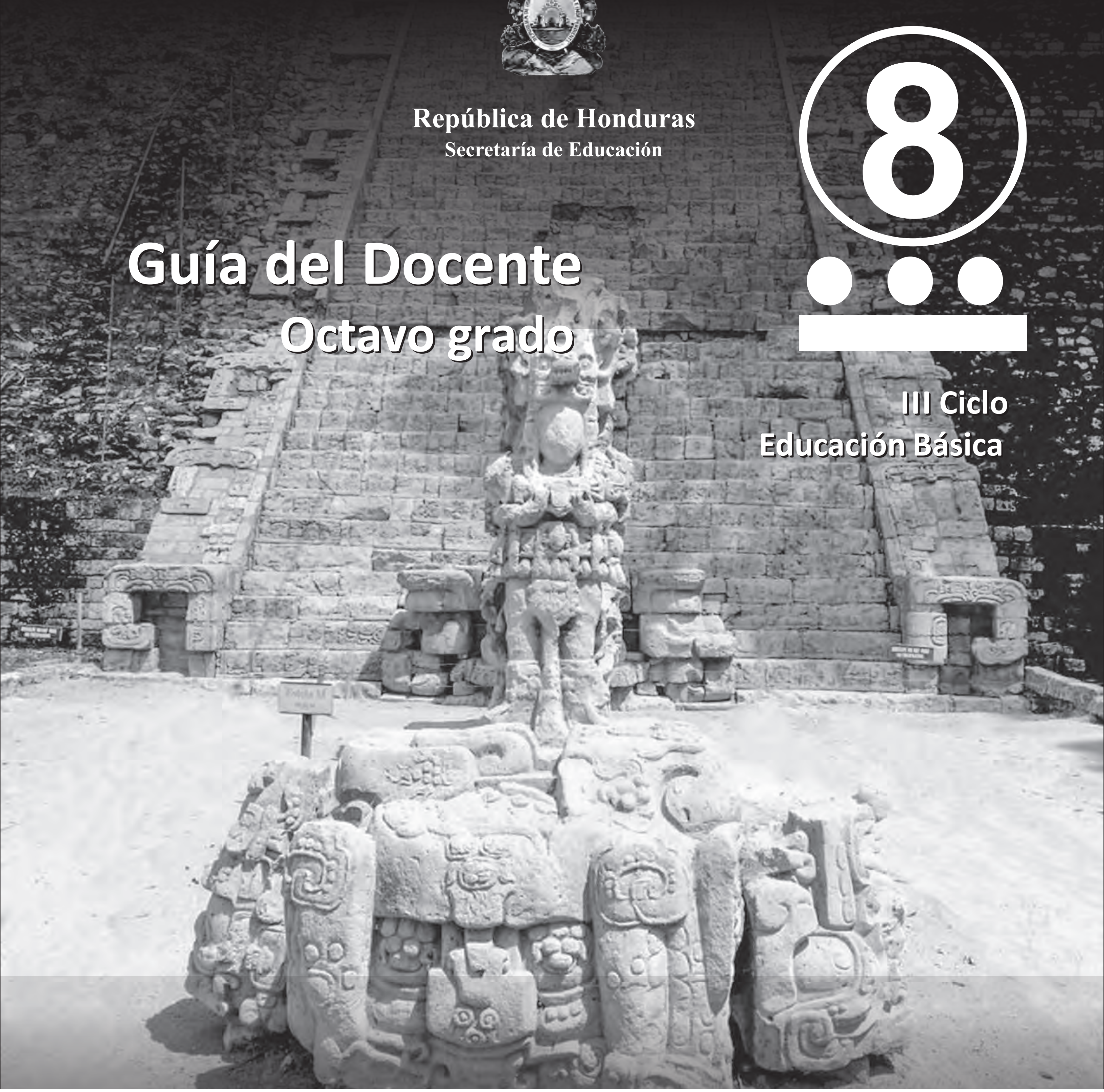
Guía del Docente

Octavo grado

8

III Ciclo

Educación Básica



Matemáticas

Nota: Cualquier observación encontrada en esta obra, por favor escribir a la Dirección General de Innovación Tecnológica y Educativa de la Secretaría de Educación, para ser rectificado y mejorado en las próximas ediciones, nuestro correo electrónico es: **tecnología.educativa@se.go.hn**

Presentación

La Secretaría de Educación presenta la “**Guía del Docente” de Octavo Grado del área de Matemáticas para el Tercer Ciclo de Educación Básica**, que tiene su fundamento en el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica (DCNEB), misma que fue revisada y ajustada por un equipo técnico en el marco del Proyecto Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemáticas (PROMETAM FASE III).

El propósito de esta Guía es apoyar al docente en la intervención activa de mediación entre el contenido del Libro del Estudiante y las formas de aprendizaje de los educandos. Además, brindar apoyo metodológico para favorecer los aprendizajes significativos y se eleve el rendimiento académico.

En la búsqueda del camino hacia una nueva Honduras, el recurso humano es el único capaz de generar riquezas a través de la aplicación de sus conocimientos, competencias y acciones; por lo que se espera que los docentes se comprometan a realizar una labor educativa con calidad y pertinencia.

Esta Secretaría de Estado, sigue comprometida para que los niños y jóvenes tengan acceso a un nivel de educación que contribuya a mejorar las condiciones de vida de la población hondureña.

Secretario de Estado en el Despacho de Educación

Instructivo de uso "Guía del Docente"

Esta Guía está diseñada para orientar a los docentes cómo enseñar en cada grado los contenidos prescritos en el Diseño Curricular Nacional para la Educación Básica (DCNEB).

Para cada grado se presenta una propuesta de enseñanza de los contenidos y se espera que el docente la ajuste según el rendimiento y el entorno de sus educandos.

El docente debe leer con anticipación y detenidamente el desarrollo propuesto de cada clase para que esté preparado al momento de impartir las mismas.

Para mayor información véase la "Estructura y Aplicación de la Guía del Docente"

Índice

Estructura y aplicación de la Guía del Docente

1. Objetivo de la Guía del Docente

Este libro es una guía que explica el plan anual de estudio y el desarrollo de las clases basado en el contenido del Diseño Curricular Nacional para la Educación Básica (DCNEB). Si el Docente aprovecha esta guía, le ayudará a desarrollar su clase efectiva y eficientemente para que el rendimiento de los estudiantes mejore.

2. Estructura de la Guía del Docente

Estructura global: Está formada por dos partes: "Estructura y aplicación de la Guía del Docente" que explica el contenido de la Guía del docente y la forma cómo se utiliza y "Desarrollo de clases de cada unidad" que describe los pasos a seguir para alcanzar los objetivos de cada clase.

Estructura de la unidad: En cada unidad se desarrolla paso a paso los contenidos conceptuales y actitudinales tomados del DCNEB. La estructura de cada unidad se explica detalladamente en el instructivo.

3. Instructivo para el uso de la Guía del Docente y del Libro del Estudiante

Esta Guía del Docente (GD) fue diseñada para enseñar los contenidos indicados en el DCNEB, utilizando eficazmente el libro del Estudiante (LE), y para explicar los principios de cada tema y la manera de desarrollar cada clase.

Aunque se indica la manera de usar el LE, no necesariamente se describe una forma única de desarrollar la clase, sin embargo se ha intentado que los docentes puedan dar la clase sin dedicar mucho tiempo a los preparativos. El docente podrá hacer las modificaciones adecuadas cuando lo crea necesario.

En la GD se presenta la "Programación anual" y "Desarrollo de clases de cada unidad".

Programación Anual

Es la lista de los contenidos del grado indicados en el DCNEB, con el número de clases asignadas a cada tema. Con la misma, los docentes deben conocer qué tienen que enseñar, y hacer su plan anual de modo que se cubran todos los temas.

También se presenta la distribución de horas en función de los bloques de área que se describen en el DCNEB. Estos son:

1. Números y Operaciones
2. Álgebra
3. Geometría
4. Estadística descriptiva y probabilidad discreta

Si los estudiantes no manejan bien los contenidos de cada grado, tendrán problemas con el aprendizaje en los grados posteriores. Por ejemplo: los estudiantes necesitan tener dominio de la operatoria con números reales para operar con expresiones algebraicas racionales.

Desarrollo de clases de cada unidad

Está divida en cinco secciones:

1. Expectativas de logro: Presenta las expectativas de logro de la unidad.
2. Relación y desarrollo: Muestra el flujo de los contenidos del grado relacionándolos con los del grado anterior y el siguiente.
3. Plan de Estudio: Presenta la distribución de las clases en cada lección.
4. Puntos de lección: Presenta aspectos importantes a considerar en el desarrollo de cada lección.
5. Desarrollo de clase: Presenta el objetivo, el indicador de logro y el desarrollo de cada clase.

Significado de cada expresión y simbología en la página del desarrollo de clases

Título y número de la unidad

Indicador de logro de cada clase

Título y número de la lección

Hora actual de la clase/Total de horas de la lección

Actividades de los estudiantes

Objetivo de cada clase

Preguntas, comentarios e indicaciones del maestro o la maestra

Página del LE

Puntos y sugerencias de la enseñanza y actividades del maestro o la maestra

Soluciones de los ejercicios propuestos

Ejercicios adicionales

Indicador de logro

Hay 5 tarjetas numeradas del 1 al 5. Encontrar la probabilidad de sacar la tarjeta número 2.

Unidad 1: **Probabilidad**

Lección 1: Probabilidad

(2/11)

Objetivo: Determinar la fórmula de la probabilidad de un evento.

2. Analizar la fórmula de la probabilidad.

(10 min)

* Leer el resumen y concluir con la fórmula de la probabilidad. Hacer énfasis en el significado de cada uno de los términos de la fórmula de la probabilidad haciendo referencia a que la probabilidad de sacar el punto 2 en el lanzamiento de un dado es $\frac{1}{6}$.

3. Encontrar la probabilidad de sacar el punto 4 al lanzar un dado. *Ejemplo* **1.1**

(10 min)

¿Cuántos posibles casos hay al lanzar un dado?

¿Todos los casos tienen la misma posibilidad de salir?

¿Cuántos casos de salir el punto 4 hay?

* Concluir que la probabilidad de salir el punto 4 es $\frac{1}{6}$ y que hagan uso de la fórmula $\frac{a}{n}$ y los tres pasos planteados en el libro.

4. Resolver *Ejercicio* **1.1**

(10 min)

Solución

a) $\frac{1}{5}$

Hay 5 posibles casos totales: 1, 2, 3, 4 y 5.

Hay 1 caso de sacar la tarjeta 2.

b) $\frac{1}{5}$

Hay 5 posibles casos totales.

Hay 1 caso de sacar la tarjeta 5.

La probabilidad que salga el punto 2 en el lanzamiento de un dado es $\frac{1}{6}$.

Si en un ensayo hay "n" posibles casos totales donde cada uno de estos casos tiene la misma posibilidad de ocurrir y entre estos "n" casos hay "a" casos donde ocurre el evento A, entonces la probabilidad que ocurra el evento A es:

$\frac{a}{n}$ ... Número de casos en los que ocurre el evento A / ... Total de posibles casos

Ejemplo: La probabilidad de salir el punto 2 al lanzar un dado es:

$\frac{1}{6}$ ... Hay una cara del punto 2 / ... Hay 6 caras (1, 2, 3, 4, 5 y 6)

Generalmente para expresar la probabilidad se usan las fracciones.

Ejemplo **1.1**

Encuentre la probabilidad de salir el punto 4 al lanzar un dado.

Solución:

Paso 1 Hay 6 posibles casos totales: 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
Paso 2 Todos los casos son igualmente probables.
Paso 3 Hay un caso de salir el punto 4.

Luego, sustituimos en $\frac{a}{n}$, $n = 6$ (viene del paso 1) y $a = 1$ (viene del paso 3), entonces, la probabilidad de salir el punto 4 al lanzar un dado es $\frac{1}{6}$.

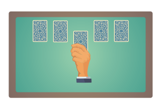
Respuesta: La probabilidad de salir el punto 4 al lanzar un dado es $\frac{1}{6}$.

En el caso del dado se puede esperar que salga cada punto (de 1 a 6) con igual posibilidad. Como hay 6 puntos se puede decir que la probabilidad de salir cada uno de estos 6 puntos es $\frac{1}{6}$.

Ejercicio **1.1** Hay 5 tarjetas numeradas del 1 al 5: 1, 2, 3, 4, 5.
Si se saca una tarjeta, encuentre:

a) La probabilidad de sacar la tarjeta 2.

b) La probabilidad de sacar la tarjeta 5.



168 *Unidad 8 - Probabilidad*

Ejercicio adicional

Al lanzar un dado, encuentre:

a) La probabilidad de sacar el número 3.

b) La probabilidad de sacar un número par.

c) La probabilidad de sacar un número mayor que 1.

Solución

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{6}_{2}} = \frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{6}$

206 Unidad 8 - Probabilidad

① Expectativas de logro

Se presentan para cada unidad, tal y como están descritas en el DCNEB.

② Relación y desarrollo

Se muestran los contenidos de la unidad y su relación con otras unidades (ya sean de este grado, o anteriores o posteriores). Los docentes deben diagnosticar si los estudiantes tienen dominio sobre los contenidos relacionados de los grados anteriores, de lo contrario dependiendo del nivel de insuficiencia en el manejo, se puede hacer lo siguiente:

(a) Si la mayoría de los estudiantes carecen de comprensión, de tal modo que no se puede enseñar el contenido del grado, se les da un repaso de dos o tres horas clase.

Para el mejor manejo del contenido, se sugiere darles tareas al mismo tiempo que la enseñanza del contenido del grado.

(b) Si la mayoría entiende bien se le puede dar orientación individual a los que la necesiten.

③ Plan de estudio

Se indica la distribución de las horas y el contenido. Como el tiempo total de la clase de matemáticas es limitado, se recomienda seguir los lineamientos indicados en la guía y desarrollar todo el contenido.

④ Puntos de lección

En la primera parte se informan los resultados obtenidos por PROMETAM Fase III al aplicar pruebas de línea base en el año 2016 y al finalizar la validación del LE en el 2017. Las pruebas se aplicaron en algunos Institutos de Educación Media y Centros de Educación Básica, con el objetivo de detectar aciertos e identificar oportunidades de avance, como una información valiosa que contribuya a la mejora de la calidad educativa del país

Luego, cada unidad está dividida en lecciones. En esta parte se explican los puntos en los que se debe prestar atención durante el desarrollo de la clase. Los docentes deben entender la idea central por la cual se desarrolla el plan de clase.

⑤ Desarrollo de clases

Está descrito el plan de cada clase para 45 minutos e incluye los objetivos, el indicador de logro y el proceso de enseñanza. No es recomendable prolongar la hora de clase, salvo en el caso donde los estudiantes hacen una tarea especial o el horario así lo exige.

«Objetivo»

Representa el objetivo de la clase. Es necesario tener un objetivo claro para cada clase.

<<Indicador de logro>>

Se proporciona el indicador de logro con respecto al objetivo de cada clase que le permitirá al docente verificar el logro de dicho objetivo.

El indicador es el conocimiento mínimo que un estudiante debe tener de un tema en particular.

En caso de que existan dificultades al resolver el ejercicio indicado en la mayoría de los estudiantes, el docente debe reforzar ese contenido.

«Proceso de enseñanza»

Está numerado según el proceso del desarrollo de la clase.

Se proponen actividades que el docente debe realizar durante la clase siguiendo el orden propuesto en el Libro del Estudiante.

La propuesta se basa en comenzar la clase planteando un ejemplo y tratar de que los estudiantes lo resuelvan sin consultar el LE, por lo que se debe garantizar el tiempo suficiente para que piensen y propongan sus ideas, luego los docentes tienen que darles explicaciones de forma concisa y con pocas palabras tratando de no hablar mucho, y considerando las ideas de los estudiantes, concluir en la regla, definición, principio etc. de la clase, para luego realizar la ejercitación.

En este proceso de enseñanza en alguna clase se utiliza la simbología número (1. 2. 3…), ¿?, * Número (1., 2., 3., …): Significa las actividades principales que los estudiantes deben hacer durante el desarrollo de una clase.

¿?: Significa preguntas de los docentes a los estudiantes durante la clase.

No es recomendable hacer preguntas que los estudiantes pueden contestar con respuestas breves como <<si>> y <<no>>. Son muy importantes las preguntas que hacen pensar a los estudiantes, sobre todo en cada clase se necesita una pregunta principal que los atraiga al tema de la clase

Cuando las respuestas de los estudiantes son equivocadas o no son las esperadas, hay que dar tiempo para que piensen por qué es incorrecta, al mismo tiempo los docentes tienen que pensar por qué se han equivocado y reflexionar sobre su manera de enseñar y preguntar. Además las respuestas de sus estudiantes pueden ser indicadores para evaluar el nivel de entendimiento.

*: Hace referencia a los puntos y sugerencias de la clase y actividades del docente. Se refiere a puntos importantes que el docente debe tomar en cuenta para que el desarrollo de la clase sea exitoso.

Para ser más práctico el uso de esta GD en el aula de clases, se da una descripción general, por lo tanto, no se les indica a los docentes todas las acciones a realizar, así que según la necesidad hay que agregar más o modificarlas. En forma general se aplican las siguientes acciones.

1. La GD no dice nada sobre la evaluación continua porque ésta corresponde al objetivo, sin embargo propone como se puede evaluar este, a través de la ejercitación. La evaluación debe hacerse durante la clase y al final de la misma según la necesidad.
2. No está indicado el repaso de la clase. Éste se hace según la necesidad.
3. Cuando se les dan los ejercicios, los docentes deben recorrer el aula identificando los errores de los estudiantes y ayudándoles a corregirlos.
4. Cuando la cantidad de ejercicios es grande, se hace la comprobación y corrección de errores en una adecuada cantidad, para que los estudiantes no repitan el mismo tipo de equivocación.
5. Preparar tareas como ser ejercicios complementarios para los estudiantes que terminan rápido.
6. La orientación individual no está indicada, sin embargo, es imprescindible.

   Los docentes pueden realizarla en las ocasiones siguientes:

- Cuando recorren el aula después de dar los ejercicios.
- En el receso después de la clase.
- En la revisión del cuaderno (hay que tener el cuidado que los estudiantes no pierdan el tiempo haciendo cola para que el docente corrija)
- En algunas lecciones se indican ejercicios adicionales, los cuales pueden ser desarrollados dependiendo del tiempo que se tiene o el nivel de los estudiantes, por lo que se deben considerar si son necesarios para afianzar el contenido.

En la guía del docente se indica después de los puntos de lección uno o dos ejemplos de planes de pizarra para una clase en particular, sin embargo, cada uno puede hacer su propia estructura de uso de la pizarra adaptándola a sus necesidades.

La manera de cómo trabajar con los problemas de aplicación planteados

Los problemas planteados deben trabajarse siguiendo los pasos dados a continuación:

1. Escribir el planteamiento de la operación.
2. Juzgar si el planteamiento de la operación es el adecuado.

3. Efectuar el cálculo según la necesidad.
4. Juzgar si el resultado es el adecuado.
5. Escribir la respuesta con la unidad necesaria.

Siempre que se requiere Planteamiento Operacional y Respuesta, hay que evaluarlos por separado, es decir, valorar el planteamiento de la operación y verificar la respuesta.

Unidad 2 *Ejercicio* **3.1**

Un grupo de amigos pagó 120 lempiras por 4 empanadas y 6 refrescos. El día anterior habían cancelado 150 lempiras por 4 empanadas y 9 refrescos. ¿Cuál es el precio de cada refresco?

Solución
x: precio de una empanada
y: precio de un refresco

$$\begin{cases} 4x + 6y = 120 \\ 4x + 9y = 150 \end{cases}$$

$x = 15$, $y = 10$

Respuesta: Cada refresco cuesta 10 lempiras.

Primero se juzga que la respuesta se pueda encontrar con el planteamiento operacional. Luego, se efectúa el cálculo y se completa la respuesta con las unidades respectivas.

Si algún estudiante escribe bien el planteamiento operacional pero se equivoca en el cálculo o en la respuesta, hay que hacer preguntas para que reaccione y reflexione sobre su error.

La estructura del LE y su uso

El docente puede comenzar cada unidad con un repaso de lo aprendido anteriormente. Esta parte no está indicada en las horas de clase y los docentes asignan el tiempo para trabajar según su criterio.

La unidad está dividida en lecciones, secciones, ejercicios. Cada lección tiene ejemplos y ejercicios.

Los ejemplos corresponden a los temas importantes de la lección y están ilustrados con dibujos o gráficas que ayudan a los estudiantes a entenderlos.

En la orientación de estos ejemplos lo importante es hacer que los estudiantes piensen por sí mismos; por lo tanto, para presentarlos, los docentes lo escriben en la pizarra para que los estudiantes no vean la respuesta en el LE antes de tratar de encontrarla, aun cuando la guía dice <<Leer el problema… o captar la situación>>

Las soluciones de los ejemplos están marcadas con el signo

La GD lleva la solución de los ejercicios propuestos en el LE. Los docentes tienen que tomar en cuenta que en el caso de ejercicios y problemas con respuestas abiertas puede haber otras respuestas.

Para resaltar los puntos importantes de un tema se utiliza y para algunas explicaciones relevantes

Un objetivo del LE es suministrar suficiente cantidad de ejercicios clasificados, por lo tanto, en el LE a veces hay más ejercicios de los que se pueden resolver en el aula. Los docentes tienen que elegir cierta cantidad de ejercicios de cada grupo clasificado, de modo que los estudiantes puedan resolver de todos los tipos. En la GD hay ejercicios adicionales que pueden utilizar como tarea en casa, o como ejercicios para los estudiantes que resuelven rápido o, en otros casos, como tarea mientras esperan las indicaciones del docente.

En la sección de ejercicios (1, 2, 3, …), el trabajo con los mismos está incluido en las horas de clase de la unidad.

Esta sección de ejercicios que aparece al final de cada unidad, el docente podrá utilizarla a su conveniencia y en beneficio de los estudiantes.

Otros íconos que aparecen en el LE y GD son los siguientes:

Se utiliza para indicar y señalar propiedades y criterios.

Se utiliza para indicar el uso de la calculadora para hacer o verificar cálculos.

Se utiliza para hacer aclaraciones, sugerencias o ampliaciones de los conocimientos de la clase.

4. Plan de estudio (Total 118 horas)

Unidad (horas)	Pág. de GD (Pág. de LE)	Contenidos
1. Polinomios (10 horas)	1~14 (1~10)	• Monomios y polinomios • Adición y sustracción de polinomios • Multiplicación y división de un polinomio por un número • Multiplicación y división de monomios
2. Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables (20 horas)	15~48 (11~38)	• Despeje de una variable • Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables • Resolución de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables • Aplicación de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables
3. Paralelismo (8 horas)	49~70 (39~56)	• Rectas paralelas y transversales • Ángulos formados por dos rectas y una transversal y relación entre ángulos correspondientes • Relación de ángulos alternos internos en rectas paralelas • Distancia entre rectas paralelas • Construcción de rectas paralelas
4. Congruencia de triángulos (21 horas)	71~112 (57~94)	• Suma de las medidas de los ángulos de un triángulo • Suma de las medidas de los ángulos de un polígono • Criterios de congruencia de triángulos • Demostraciones geométricas • Triángulos isósceles, rectángulo y equilátero • Criterios de congruencia de triángulos rectángulos
5. Cuadriláteros (10 horas)	113~134 (95~112)	• Cuadriláteros y paralelogramos • Condiciones para ser un paralelogramo • Rectángulos, rombos, cuadrados y trapecios
6. Funciones de primer grado (28 horas)	135~176 (113~148)	• Funciones de primer grado • Razón de cambio • Sistema de coordenadas • Gráfica de funciones de primer grado • Expresión de una función de primer grado en la forma $y = ax + b$ dada su gráfica • Expresión de una función de primer grado en la forma $y = ax + b$ a partir de dos puntos • Criterio de paralelismo y perpendicularidad • Solución gráfica de un sistema de ecuaciones de primer grado • Aplicación de las funciones de primer grado
7. Manera de contar (8 horas)	177~196 (149~162)	• Principio de la suma • Principio del producto
8. Probabilidad (13 horas)	197~220 (163~180)	• Relación entre razón y probabilidad • Fórmula de la probabilidad • Propiedades de la probabilidad • Cálculo de la probabilidad

5. Programación anual

No.	OCTAVO GRADO Unidad	Mes Semana (clases)	Febrero 1	Febrero 2	Febrero 3	Febrero 4	Marzo 1	Marzo 2	Marzo 3	Marzo 4	Marzo 5	Abril 1	Abril 2	Abril 3	Abril 4	Mayo 1	Mayo 2	Mayo 3	Mayo 4	Mayo 5	Junio 1	Junio 2	Junio 3	Junio 4	Julio 1	Julio 2	Julio 3	Julio 4	Agosto 1	Agosto 2	Agosto 3	Agosto 4	Agosto 5	Septiembre 1	Septiembre 2	Septiembre 3	Septiembre 4	Octubre 1	Octubre 2	Octubre 3	Octubre 4	Octubre 5	Noviembre 1	Noviembre 2	Noviembre 3	Noviembre 4
1	Polinomios	10		4	4	2																																								
2	Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables	20				2	4	4	4	4	2																																			
3	Paralelismo	8									2	X	4	P	2																															
4	Congruencia de triángulos	21													1	4	4	4	4	4																										
5	Cuadriláteros	10																			4	4	P	2																						
6	Funciones de primer grado	28																						1	X	4	4	4	4	4	4	3														
7	Manera de contar	8																														1	P	3	X	4										
8	Probabilidad	13																																			4	X	4	4	1					
	Clase complementaria																																								3	4	P	E		
	Total	118																																												

・Según la ley, se tienen 5 horas clase de matemática por semana.
・Sin embargo, en este plan se tienen solamente un máximo de 4 horas clase de matemática por semana.
- En los centros educativos a veces se tienen otras actividades y se pierden las clases de matemática.
- Entonces, en este plan ya están considerados algunos días de pérdidas de clase de matemática.
・Esto significa que si se puede dar más clases, puede avanzar más que lo propuesto en este plan.
・En este plan está considerado el inicio de clase a partir de la segunda semana de febrero.
・En este plan están considerados los siguientes feriados y receso académico:
- Semana Santa (la primera semana de abril) (depende del año)
- El día de las Américas (14 de abril)
- El día del Trabajo (1 de mayo)
- El día del Estudiante (11 de junio)
- Receso Académico (primera semana de julio) (depende del año)
- Semana Morazánica (primera semana de octubre)
・También, en el mes de septiembre se tienen muchas actividades (como el día de la Independencia, el día del Niño y el día del Maestro).
- Entoces, está considerado que una semana (en este plan, la segunda semana de septiembre) no puede dar clase.
・La "P" significa ejecución de las pruebas de cada parcial. En este plan, está considerado:
- La tercera semana de abril (para el primer parcial)
- La tercera semana de junio (para el segundo parcial)
- La última semana de agosto (para el tercer parcial)
- En el mes de noviembre (para la prueba de fin de grado)
・La siguiente semana de la semana de las pruebas, está considerado el día de entrega de notas. Por eso se tienen solo 3 horas clase de matemática.
・La "E" significa evaluación final.
・Aún así, todavía quedan 7 horas clase.
・Se pueden utilizar estas horas para dar clases complementarias y fortalecer o repasar los contenidos.

Unidad 1
Polinomios

Lección 1: Clasificación y operaciones básicas con polinomios

Unidad 1

Polinomios

(10 horas)

1 Expectativas de logro

- Desarrollan el concepto de polinomios.
- Clasifican y efectúan operaciones básicas con polinomios.

2 Relación y desarrollo

Séptimo grado

Variables y expresiones

- Expresión algebraica (EA)
- Reglas convencionales
- Expresión de cantidades con variables
- Valor numérico de EAs
- Términos y coeficientes de EAs
- Adición y sustracción de EAs
- Multiplicación y división de EAs

Ecuaciones de primer grado en una variable

- Ecuaciones de primer grado (Definición)
- Propiedades de la igualdad y sus aplicaciones
- Resolución de ecuaciones de primer grado
- Aplicación

Octavo grado

Polinomios

- Monomios y polinomios
- Adición y sustracción de polinomios
- Multiplicación y división de polinomios por un número
- Multiplicación y división de monomios

Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

- Despeje de una variable
- Sistema de dos ecuaciones de primer grado (Definición)
- Resolución de sistemas mediante:
  - Tablas
  - Método de eliminación
  - Método de sustitución
- Varios tipos de sistemas
- Aplicación

Funciones de primer grado

- Funciones de primer grado
- Razón de cambio
- Sistema de coordenadas
- Gráfica de funciones de primer grado
- Expresión de una función de primer grado $y = ax + b$ mediante su gráfica
- Expresión de una función de primer grado $y = ax + b$ a partir de dos puntos
- Criterio de paralelismo y perpendicularidad
- Solución gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables
- Gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables
- Solución gráfica de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables
- Aplicación

Noveno grado

Polinomios

- Multiplicación y división de un polinomio por un monomio
- Multiplicación de polinomios
- Valor numérico de un polinomio
- Productos notables
- Aplicación de productos notables
- Factorización de polinomios
- Aplicación de la factorización

Ecuaciones de segundo grado

- Ecuación de segundo grado (Definición)
- Resolución de ecuaciones mediante:
  - Sustitución de valores
  - Factorización
  - Raíz cuadrada
  - Completación de cuadrados
  - Fórmula cuadrática
- Aplicación

3 Plan de estudio (10 horas)

Lección	Distribución de horas	Contenidos
1. Clasificación y operaciones básicas con polinomios. (8 horas)	1~2/8	• Monomios y polinomios
	3~4/8	• Adición y sustracción de polinomios
	5~6/8	• Multiplicación y división de un polinomio por un número
	7~8/8	• Multiplicación y división de monomios
Ejercicios (2 horas)	1~2/2	

4 Puntos de lección

Análisis de las pruebas diagnósticas 2016 - 2017

Primero, vamos a ver el problema de la propiedad distributiva. (Número por polinomio)

[Pregunta] Desarrolle y simplifique la siguiente expresión: $5(2a + 3b)$

Institutos: 32% CEB: 3% (2016)

Este es el problema más fácil sobre la propiedad distributiva, porque los números son sencillos y positivos. Así que, si sabe la regla del cálculo, puede contestar correctamente. Sin embargo, los resultados son muy bajos.

La regla no es complicada entonces, es importante utilizar números sencillos para que la puedan comprender.

Después de la validación utilizando números sencillos, los resultados se mejoraron, tal como se evidencia a continuación.

[Pregunta] Desarrolle y simplifique la siguiente expresión: $5(2a + 3b)$

Institutos: 32% → 62% CEB: 3% → 23%
(2016) (2017) (2016) (2017)

Mostramos otros resultados en el caso donde el problema es un poco complicado:

[Pregunta] Desarrolle y simplifique la siguiente expresión: $(7x + 5y) - 2(3x - 2y)$

Institutos: 6% → 26% CEB: 0% → 1%
(2016) (2017) (2016) (2017)

Para contestar correctamente a este problema, los conocimientos de Números Positivos y Negativos (la unidad 1 de 7mo grado) son necesarios.

Lección 1: Clasificación y operaciones básicas con polinomios.

En 7mo grado se introdujo el concepto de expresión algebraica como una combinación de números y variables (letras) unidos por los signos de las operaciones básicas.

Se enseñó las reglas convencionales para escribir expresiones algebraicas, por ejemplo: $a \times b = ab$, se abrevia el signo de la multiplicación "×", con expresiones con dos o más variables las variables se escriben por lo general en orden alfabético. En un término se escribe primero el número antes de la variable.

Sección 1: Monomios y polinomios

Un polinomio es un monomio o una suma de dos o más monomios.

Un polinomio con dos términos también se le llama binomio y si tiene tres términos se llama trinomio.

El grado del polinomio lo determina la cantidad de variables que se multiplican en un monomio.

Ejemplo 1.2

$3x^2 = 3 \times x \times x$

La cantidad de variables que se multiplican es 2, entonces el grado de $3x^2$ es 2.

$5x^2 y = 5 \times x \times x \times y$

La cantidad de variables que se multiplican es 3, entonces el grado de $5x^2y$ es 3.

Al polinomio de grado 1 se le llama polinomio de primer grado. Al polinomio de grado 2 se le llama polinomio de segundo grado.

Sección 2: Adición y sustracción de polinomios

En cuanto a la adición y sustracción de polinomios se reducen los términos semejantes sumando o restando los coeficientes y al resultado se le copia la misma variable.

Ejemplo 1.5

$$\begin{aligned} 6a + 2b + 3b - 4a &= (6a - 4a) + (2b + 3b) \\ &= (6 - 4)\, a + (2 + 3)b \\ &= 2a + 5b \end{aligned}$$

En la sustracción de polinomios todo signo (-) que precede un paréntesis cambia de signo todo lo que está dentro del paréntesis.

Ejemplo 1.7

$$\begin{aligned} (3a + 4b) - (5a - 2b) &= 3a + 4b - 5a + 2b \\ &= -2a + 6b \end{aligned}$$

Sección 3: Multiplicación y división de un polinomio por un número.

Para multiplicar un polinomio por un número se utiliza la propiedad distributiva. Al dividir un polinomio entre un número, se multiplica el mismo por el recíproco del número. **Ejemplo 1.9**

$$\begin{aligned} (4m - 6n + 2) \div \frac{2}{3} &= (4m - 6n + 2) \times \frac{3}{2} \\ &= 4m \times \frac{3}{2} - 6n \times \frac{3}{2} + 2 \times \frac{3}{2} \\ &= 6m - 9n + 3 \end{aligned}$$

Es necesario tomar en cuenta los signos de los números que multiplican al polinomio.

Ejemplo 1.10

$$\begin{aligned} 2(-8a + b) - 3(2a - 4b) &= -16a + 2b - 6a + 12b \\ &= -16a - 6a + 2b + 12b \\ &= -22a + 14b \end{aligned}$$

aquí se emplea la propiedad distributiva.

Para sumar o restar polinomios expresados en forma fraccionaria con distinto denominador, se utiliza el m.c.m. de los denominadores para escribir las fracciones equivalentes pero con igual denominador.

Ejemplo 1.11

$$\begin{aligned} \frac{3x + 2y}{2} - \frac{2x - y}{3} &= \frac{3(3x + 2y)}{6} - \frac{2(2x - y)}{6} \\ &= \frac{3(3x + 2y) - 2(2x - y)}{6} \\ &= \frac{9x + 6y - 4x + 2y}{6} \\ &= \frac{5x + 8y}{6} \end{aligned}$$

Sección 4: Multiplicación y división de monomios

Para multiplicar dos o más monomios se multiplican los coeficientes y las variables.

En la división de monomios se dividen los coeficientes y se dividen las variables.

Tema: Monomios y polinomios 1

Las expresiones algebraicas $3a$, $6y$ y $5p^2$, se llaman términos y también se llaman monomios.

Lo términos x y 50 también se les llama monomio. (Se puede decir "50 es un monomio constante")

Las expresiones algebraicas, como:

$10a + 2 \longrightarrow$ binomio

$2a + 3b^2 + 1 \longrightarrow$ trinomio

Son una suma de monomios.

6 Un polinomio es un monomio o una suma de dos o más monomios.

Ejemplo 1.1 2 Pág. 2 3

Encuentre los términos del polinomio $2a^2 - 4a - 1$.

Solución 4

$$\underbrace{\boxed{2a^2}\boxed{-4a}\boxed{-1}}$$

expresado como una adición

$$2a^2 + (-4a) + (-1)$$ 5

Respuesta: $2a^2$, $-4a$ y -1 4

Ejercicio 1.1 2 Pág. 2 3

Encuentre los términos de los siguientes polinomios.

a) $8x^2 - 3x - 2$
Respuesta: $8x^2$, $-3x$ y -2 4 ✓

b) $5a + 4b^2 - 3c$
Respuesta: $5a$, $4b^2$ y $-3c$ 4 ✓

c) m
Respuesta: m 4 ✓

d) $5ab - 2$
Respuesta: $5ab$ y -2 4 ✓

e) $x - 2y + 8$
Respuesta: x, $-2y$ y 8 4 ✓

f) $\frac{x}{4} - 3y$
Respuesta: $\frac{x}{4}$ y $-3y$ 4 ✓

1 Al inicio de la clase escribir solo la palabra "**Tema**" y hasta el final de la clase (o en el desarrollo de la misma) escribir el contenido del tema.

2 Escribir el número del Ejemplo o Ejercicio.

3 Escribir el número de **Pág.** del LE para entender dónde se quedaron con respecto al tiempo.

4 Escribir la **Solución** y **Respuesta**.

5 En el problema planteado marcar los datos importantes para poder llegar a la respuesta.

6 Escribir la conclusión en un rectángulo de color rojo.

✓ Marcar en el Ejercicio cuando la solución o la respuesta sean correctas.

Nota: Los puntos aquí explicados no siempre aplican todos en un plan de pizarra.

Indicador de logro

Encuentre los términos del polinomio $8x^2 - 3x - 2$

1. **Definir monomios y polinomios.**
   (15 min)
   * Leer el primer párrafo del LE.
   * ¿Cuál es la diferencia entre los términos y 50?
   * Concluir que a todos esos términos se les llama monomios y 50 es un monomio constante.
   * Observar que en el término $5p^2$, 5 se llama coeficiente, p se llama variable y 2 se llama exponente.
   * Observar que las expresiones $10a + 2$ y $2a + 3b^2 + 1$ son sumas de monomios.
   * Concluir que un monomio o una suma de monomios también se les llama polinomios.
   * Clasificar polinomios según la cantidad de términos.

2. **Encontrar los términos de un polinomio.** *Ejemplo* **1.1**
   (10 min)
   * Concluir que un trinomio es un polinomio que tiene tres términos.

   Expresado como una adición es: $2a^2 + (-4a) + (-1)$. Los términos son $2a$, $-4a$ y -1.
   * Pedir a los estudiantes que den ejemplo de monomio, binomio trinomios.

3. **Resolver** *Ejercicio* **1.1**
   (20 min)
   Solución
   a) $8x^2$, $-3x$ y -2
   b) $5a$, $4b^2$ y $-3c$
   c) m
   d) $5ab$ y -2
   e) x , $-2y$ y 8
   f) $\frac{x}{4}$ y $-3y$

Unidad 1:	**Polinomios**
Lección 1: (1/8)	Clasificación y operaciones básicas con polinomios
Sección 1:	Monomios y polinomios
Objetivos:	• Definir monomios y polinomios. • Clasificar los polinomios como monomios, binomios y trinomios.

Unidad 1

Polinomios

Lección 1: Clasificación y operaciones básicas con polinomios

Sección 1: Monomios y polinomios

En 7mo grado aprendió que las expresiones algebraicas $3a$, $6y$ y $5p^2$, se llaman términos, que admiten expresarse como el producto de número con variable. A estas expresiones también se les llama **monomio**.

Lo mismo son x y 50, x se expresa como única variable y 50 se expresa como único número, también se les llama monomio. (Se puede decir "50 es un monomio constante")

Son monomios: $3a$, $6y$, p^2, x, 50

ax^n ← Exponente
Variable
Coeficiente

Las expresiones algebraicas, como:

$10a + 2$
$2a + 3b^2 + 1$

Son una suma de monomios (términos).

Son polinomios:
$\underbrace{10a + 2}_{\text{2 términos (binomios)}}$ $\quad$ $\underbrace{2a + 3b^2x + 1}_{\text{3 términos (trinomios)}}$

Un polinomio es un monomio o una suma de dos o más monomios.

Ejemplo **1.1**

Encuentre los términos del polinomio $2a^2 - 4a - 1$.

Solución:

$2a^2 - 4a - 1$ expresado como una adición: $2a^2 + (-4a) + (-1)$ [suma de monomios]

Respuesta: $2a^2$, $-4a$ y -1 son los términos del polinomio.

$\underbrace{2a^2 + (-4a) + (-1)}_{\text{3 términos (trinomios)}}$

Ejercicio **1.1** Encuentre los términos de los siguientes polinomios.

a) $8x^2 - 3x - 2$ $\quad$ b) $5a + 4b^2 - 3c$ $\quad$ c) m
d) $5ab - 2$ $\quad$ e) $x - 2y + 8$ $\quad$ f) $\frac{x}{4} - 3y$

2
Unidad 1 - Polinomios

Ejercicios adicionales

Encuentre los términos de los siguientes polinomios.

a) $5a - 2b + 1$ $\quad$ b) $8x^2 - 2x$ $\quad$ c) $3xy + \frac{1}{2}y - 6$ $\quad$ d) $2a - 3b - c$ $\quad$ e) 3

Solución

a) $5a$, $-2b$ y 1 $\quad$ b) $8x^2$ y $-2x$ $\quad$ c) $3xy$, $\frac{1}{2}y$ y -6 $\quad$ d) $2a$, $-3b$ y $-c$ $\quad$ e) 3

Unidad 1: Polinomios

Lección 1: (2/8) Clasificación y operaciones básicas con polinomios

Sección 1: Monomios y polinomios

Objetivos:
- Definir el grado de un monomio y un polinomio.
- Encontrar el grado de un monomio y un polinomio.

El grado de un monomio lo determina la cantidad de las variables que se multiplican en un monomio.

Ejemplo 1.2

Determine el grado de los siguientes monomios.

a) $3x^2$ b) $5x^2y$

Solución:

a) $3x^2 = 3 \times \underbrace{x \times x}_{\text{la cantidad de variables multiplicadas es 2}}$

Respuesta: el grado es 2

b) $5x^2y = 5 \times \underbrace{x \times x \times y}_{\text{la cantidad de variables multiplicadas es 3}}$

Respuesta: el grado es 3

Ejercicio 1.2 Determine el grado de los siguientes monomios.

a) $10m^2$ b) 8 c) $5xy$ d) $10ab^2$

El grado de un monomio constante es cero.

El **grado de un polinomio** lo determina el término con el máximo grado.

Ejemplo 1.3

Determine el grado de los siguientes polinomios.

a) $3x^2 - 4x + 6$ b) $2x + 5$ c) $-7ab + 6$

Grado por término:
$$\underset{2}{3x^2} - \underset{1}{4x} + \underset{0}{6}$$

Solución:

a) $3x^2 - 4x + 6$ Los términos del polinomio son: $3x^2$, $-4x$ y 6.
$3x^2$ es el término que tiene mayor grado.
Respuesta: El polinomio es de grado 2

b) $2x + 5$ Los términos del polinomio son: $2x$ y 5.
$2x$ es el término que tiene mayor grado.
Respuesta: El polinomio es de grado 1

c) $-7ab + 6$ Los términos del polinomio son: $-7ab$ y 6.
$-7ab$ es el término que tiene mayor grado.
Respuesta: El polinomio es de grado 2

Ejercicio 1.3 Determine el grado de los siguientes polinomios:

a) $3a + 4a^2$ b) $-x^2 + 6x + 1$

c) $2ab + 3$ d) $a - b + 5$

El polinomio $3x^2 + x^3 + 1 - 5x$ puede ordenarse de acuerdo al grado de sus términos así:
$$\underset{3}{x^3} + \underset{2}{3x^2} - \underset{1}{5x} + \underset{0}{1}$$
Grado de los términos forma (descendente): De mayor a menor

Al polinomio de grado 1 se le llama polinomio de **primer grado**.
Al polinomio de grado 2 se le llama polinomio de **segundo grado**.

$3x^2 - 4x + 6$, $-7ab + 6$ son polinomios de segundo grado y $2x + 5$ es polinomio de primer grado

Indicador de logro

Determine el grado del polinomio

a) $10m^2$

b) $3a + 4a^2$

1. Definir y determinar el grado de un monomio.

Ejemplo 1.2

(15 min)

* Recordemos la forma ax^n, ¿cómo se llama n? Ellos responderán exponente.

* En el monomio $3x^2$, ¿qué indica el exponente 2? Responderán que x se multiplica dos veces ella misma.

* Concluir que la cantidad de variables que se multiplican en un monomio se llama grado de un monomio.

* Observar que en $5x^2y$, la cantidad de variables multiplicadas es 3, la x se multiplica dos veces y la y una vez. Por tanto, el grado del monomio es 3.

2. Resolver Ejercicio 1.2

(8 min)

Solución

a) 2 b) 0

c) 2 d) 3

* Concluir que el grado de un monomio constante es 0.

3. Definir y determinar el grado de un polinomio.

Ejemplo 1.3

(12 min)

* Definir que el grado de un polinomio lo determina el término con el máximo grado.

¿Cuál es la cantidad de términos?, ¿cuál es el término que tiene mayor grado?

4. Resolver Ejercicio 1.3

(7 min)

Solución

a) 2 b) 2

c) 2 d) 1

5. Definir polinomio de primer y segundo grado.

(3 min)

Indicador de logro

Calcule

$(4x + 7y) + (x + 5y)$

1. Recordar términos semejantes y la propiedad distributiva

(5 min)

¿Cuándo dos términos son semejantes?

* Sumando $3x$ y $4x$, ¿cuál es el resultado?

2. Identificar términos semejantes. Ejemplo 1.4

(5 min)

* En el polinomio $6a + 2b + 3b - 4a$, ¿cuáles términos son semejantes?
* Concluir con la definición de términos semejantes.

3. Reducir términos semejantes.

Ejemplo 1.5

(7 min)

¿Cómo podemos simplificar los términos $6a$ con $-4a$ y $2b$ con $3b$ a un solo término?, ¿cuál es el resultado?

* Concluir que: $(6a - 4a) = (6 - 4)a$

4. Resolver Ejercicio 1.4

(8 min)

Solución

a) $11a - 3b$ b) $2x - 5y$

5. Definir reducción de términos semejantes.

(2 min)

* Concluir que reducir dos o más términos semejantes consiste en sumar o restar sus coeficientes y copiar la misma variable en el resultado.

6. Sumar dos polinomios.

Ejemplo 1.6

(8 min)

¿Qué pasos debe seguir para sumar los polinomios $(3a + 4b) + (5a + 2b)$?, ¿puede sumar los polinomios de forma vertical?, ¿cuál es el resultado?

7. Resolver Ejercicio 1.5

(10 min)

Solución

a) $5x + 12y$ b) $4a - 5b$

c) $4a - 6b$ d) $6a + 5b$

Unidad 1: Polinomios

Lección 1: (3/8) Clasificación y operaciones básicas con polinomios

Sección 2: Adición y sustracción de polinomios

Objetivo: Sumar polinomios.

Sección 2: Adición y sustracción de polinomios

En 7mo grado estudiamos que $3x$ y $4x$ son semejantes y sumandolos obtenemos un solo término es $7x$. De igual manera $-3ab^2$ y $7ab^2$ son términos semejantes, sumandolos obtenemos un solo término queda $4ab^2$.

Ejemplo 1.4

Identifique los términos semejantes en el polinomio $6a + 2b + 3b - 4a$.

Solución:

Son semejantes: $6a$ y $-4a$, también $2b$ y $3b$

Términos semejantes son aquellos términos que tienen las mismas variables con los mismos exponentes.

Ejemplo 1.5

Simplifique los términos que son semejantes en el polinomio $6a + 2b + 3b - 4a$

Semejantes

$6a + 2b + 3b - 4a$

Semejantes

Solución:

$6a + 2b + 3b - 4a = (6a - 4a) + (2b + 3b)$ ... Agrupar términos semejantes

$= (6 - 4)a + (2 + 3)b$ ... Sumar y restar sus coeficientes y copiar su variable

$= 2a + 5b$

Ejercicio 1.4 Simplifique los términos que son semejantes en los polinomios.

a) $3a - 6b + 8a + 3b$ b) $3x - 7y - x + 2y$

Los términos semejantes en un polinomio **se reducen sumando o restando** los coeficientes y al resultado se le copia la misma variable.

Ejemplo 1.6

Calcule: $(3a + 4b) + (5a + 2b)$

Solución:

$(3a + 4b) + (5a + 2b) = 3a + 4b + 5a + 2b$ ... Suprimir los paréntesis

$= 3a + 5a + 4b + 2b$ ... Agrupar los términos semejantes

$= 8a + 6b$ ... Sumar separadamente

En forma vertical:

$$\begin{array}{r} 3a + 4b \\ +)\ 5a + 2b \\ \hline 8a + 6b \end{array}$$

Se debe colocar término semejante bajo término semejante.

Ejercicio 1.5 Calcule:

a) $(4x + 7y) + (x + 5y)$ b) $(5a - 2b) + (-a - 3b)$ c) $(3a - 4b) + (a - 2b)$ d) $(a + 4b) + (5a + b)$

4 Unidad 1 - Polinomios

Ejercicios adicionales

Calcule.

a) $(3a + 2b) + (4a - 7b)$ b) $(4x - 3y) + (2x - 6y)$ c) $(3xy + 5) + (4xy - 8)$

Solución

a) $7a - 5b$ b) $6x - 9y$ c) $7xy - 3$

Unidad 1: Polinomios

Lección 1: (4/8) Clasificación y operaciones básicas con polinomios

Sección 2: Adición y sustracción de polinomios

Objetivo: Restar polinomios.

Ejemplo 1.7

Calcule $(3a + 4b) - (5a - 2b)$

Solución:

$(3a + 4b) - (5a - 2b) = 3a + 4b - 5a + 2b$ ... Cambiar de signo los términos que están dentro del paréntesis.

$= -2a + 6b$

$-(5a - 2b) = -5a + 2b$

Ejercicio 1.6 Calcule.

a) $(5x + 2y) - (3x - y)$ b) $(3a - 6b) - (2a + 4b)$

Ejercicio 1.7 Calcule.

a) $(3a + 5) + (a + 4)$

b) $(-2x + 4) - (x + 1)$

c) $(3m + 4n) + (2m - 2n)$

d) $(7x - 3y) - (2x - 5y)$

e) $$\begin{array}{rr} & 2x - 3y \\ +) & 4x + 5y \\ \hline \end{array}$$

f) $$\begin{array}{rr} & 5x - 2y \\ +) & -x + 3y \\ \hline \end{array}$$

5

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Indicador de logro

Calcule

$(5x + 2y) - (3x - y)$

1. **Restar dos polinomios**

Ejemplo 1.7

(8 min)

* En $-(5a - 2b)$, ¿qué pasa con el polinomio que está dentro del paréntesis?

* Concluir que para restar dos polinomios cambian de signo los términos que están dentro del paréntesis precedido por un signo (-) y luego se desarrolla como una suma.

2. **Resolver Ejercicio 1.6**

(7 min)

Solución

a) $2x + 3y$ b) $a - 10b$

3. **Resolver Ejercicio 1.7**

(30 min)

Solución

a) $4a + 9$ b) $-3x + 3$

c) $5m + 2n$ d) $5x + 2y$

e) $6x + 2y$ f) $4x + y$

Ejercicios adicionales

Calcule.

a) $(-3a + 5b) + (10a - 14b)$ b) $(3x - 5y) + (4x + 2y)$ c) $(3a + 4b) - (5a + 2b)$

d) $(a + 4b) - (5a - 3b)$ e) $(5x - 3y) - (4x + 2y)$ f) $(-a + b) - (a - b)$

Solución

a) $7a - 9b$ b) $7x - 3y$ c) $-2a + 2b$ d) $-4a + 7b$ e) $x - 5y$ f) $-2a + 2b$

Indicador de logro

Calcule

$7(5x + 4y)$

1. Multiplicar un número por un polinomio. *Ejemplo* **1.8**

(15 min)

¿Cómo podemos calcular el producto de $5(2a + 3)$?

¿Qué propiedad se debe aplicar?

* Desarrollar $(20a - 12b) \times (-\frac{1}{4})$ aplicando propiedad distributiva y luego simplificar las fracciones.

2. Resolver *Ejercicio* **1.8**

(10 min)

Solución

a) $35x + 28y$

b) $-8a + 12b$

c) $-3x + 4y$

d) $-2a + b$

3. Dividir un polinomio entre un número. *Ejemplo* **1.9**

(10 min)

* Desarrollar $(6y + 2) \div 2$ convirtiendo la división en una multiplicación.
* Multiplicar $(6y + 2)$ por el recíproco de 2 que es $\frac{1}{2}$.
* Aplicar propiedad distributiva y simplificar.
* ¿Cuál es el recíproco de $\frac{2}{3}$?
* Confirmar que los estudiantes simplifiquen correctamente las fracciones.

4. Resolver *Ejercicio* **1.9**

(10 min)

Solución

a) $-4x + 3y$

b) $-a + 3b$

c) $8x - 6y$

Unidad 1: **Polinomios**

Lección 1: (5/8) Clasificación y operaciones básicas con polinomios

Sección 3: Multiplicación y división de un polinomio por un número

Objetivo:
- Multiplicar un polinomio por un número.
- Dividir un polinomio entre un número.

Sección 3: Multiplicación y división de un polinomio por un número

Ejemplo **1.8**

Calcule:

a) $5(2a + 3)$ b) $(2a - 3) \times (-3)$ c) $(20a - 12b) \times (-\frac{1}{4})$

Soluciones:

a) $5(2a + 3) = 5 \times 2a + 5 \times 3$
$= 10a + 15$

b) $(2a - 3) \times (-3) = 2a \times (-3) - 3 \times (-3)$
$= -6a + 9$

c) $(20a - 12b) \times (-\frac{1}{4}) = 20a \times (-\frac{1}{4}) - 12b \times (-\frac{1}{4})$
$= -5a + 3b$

$5\,(2a + 3)$
$= 5 \times 2a + 5 \times 3$

Ejercicio **1.8** Calcule.

a) $7(5x + 4y)$ b) $-4(2a - 3b)$

c) $(12x - 16y) \times \left(-\frac{1}{4}\right)$ d) $(14a - 7b) \times \left(-\frac{1}{7}\right)$

Ejemplo **1.9**

Calcule.

a) $(6y + 2) \div 2$ b) $(4m - 6n + 2) \div \frac{2}{3}$

Solución:

a) $(6y + 2) \div 2 = (6y + 2) \times \frac{1}{2}$
$= 6y \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2}$
$= 3y + 1$

$A \div n = A \times \frac{1}{n} = \frac{A}{n}$, n es un número distinto de cero.

Otra forma:
$(6y + 2) \div 2 = \frac{6y + 2}{2} = \frac{\overset{3}{\cancel{6y}} + \overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 3y + 1$

b) $(4m - 6n + 2) \div \frac{2}{3} = (4m - 6n + 2) \times \frac{3}{2}$
$= 4m \times \frac{3}{2} - 6n \times \frac{3}{2} + 2 \times \frac{3}{2}$
$= 6m - 9n + 3$

Ejercicio **1.9** Calcule.

a) $(-8x + 6y) \div 2$ b) $(5a - 15b) \div (-5)$ c) $(12x - 9y) \div \frac{3}{2}$

6 Unidad 1 - Polinomios

Unidad 1: Polinomios

Lección 1: (6/8) Clasificación y operaciones básicas con polinomios

Sección 3: Multiplicación y división de un polinomio por un número

Objetivo: Sumar y restar productos de un número por polinomio.

Ejemplo 1.10

Calcule $2(-8a + b) - 3(2a - 4b)$

Solución:

$$2(-8a + b) - 3(2a - 4b) = -16a + 2b - 6a + 12b$$
$$= -16a - 6a + 2b + 12b$$
$$= -22a + 14b$$

$a(b + c) = a \times b + a \times c$

Ejercicio 1.10 Calcule.

a) $4(a + b) + 2(2a + b)$ b) $2(3x - y) + 3(x + 2y)$

c) $6(4x + y) - 7(x - 2y)$ d) $3(5a - b) - 2(2a - 2b)$

Ejemplo 1.11

Calcule $\frac{3x + 2y}{2} - \frac{2x - y}{3}$

Solución:

Al hacer cálculos con polinomios expresados de forma fraccionaria, hay que convertir las fracciones para que tengan igual denominador.
Por lo general, se utiliza el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores como común denominador.

6 es el m.c.m. de 2 y 3.

$$\frac{3x + 2y}{2} - \frac{2x - y}{3} = \frac{3(3x + 2y)}{6} - \frac{2(2x - y)}{6}$$
$$= \frac{3(3x + 2y) - 2(2x - y)}{6}$$
$$= \frac{9x + 6y - 4x + 2y}{6}$$
$$= \frac{5x + 8y}{6}$$

$\frac{3x + 2y}{2} \times \frac{3}{3} = \frac{3(3x + 2y)}{6}$

$\frac{2x - y}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{2(2x - y)}{6}$

Otra forma:

$\frac{5x + 8y}{6} = \frac{5}{6}x + \frac{8}{6}y$

$= \frac{5}{6}x + \frac{4}{3}y$

Ejercicio 1.11 Calcule.

a) $\frac{x + 5y}{2} + \frac{4x - 3y}{5}$ b) $\frac{x + 2y}{3} - \frac{2x - y}{2}$

Ejercicios adicionales

Calcule.

a) $\frac{2a + 2b}{3} + \frac{a + b}{4}$ b) $\frac{a - b}{2} - \frac{2a + b}{3}$

Solución

a) $\frac{11a + 11b}{12}$ b) $\frac{-a - 5b}{6}$

Indicador de logro

Calcule:

$2(3x - y) + 3(x + 2y)$

1. **Calcular la adición o sustracción de productos de un número por polinomio.**

   Ejemplo 1.10

   (8 min)

   ¿Cuál es la diferencia entre los ejercicios desarrollados anteriormente y el siguiente $2(-8a + b) - 3(2a - 4b)$?

   ¿Qué propiedad puede aplicar?

   * Aplicar lo aprendido en la clase anterior referente a la multiplicación de un número por un polinomio.
   * Recordar la reducción de términos semejantes.

2. **Resolver Ejercicio 1.10**

   (15 min)

   Solución

   a) $8a + 6b$ b) $9x + 4y$

   c) $17x + 20y$ d) $11a + b$

3. **Calcular la adición o sustracción de polinomios expresados en forma fraccionaria. Ejemplo 1.11**

   (10 min)

   ¿En que se diferencia el **Ejemplo 1.11** con el **Ejemplo 1.10**?

   * Recordar que para sumar fracciones con distinto denominador se convierten sus denominadores a un común denominador.

   ¿Cuál el m. c. m. de 2 y 3?

   ¿Qué hacemos ahora?

4. **Resolver Ejercicio 1.11**

   (12 min)

   Solución

   a) $\frac{13x + 19y}{10}$

   b) $\frac{-4x + 7y}{6}$

Indicador de logro

Calcule

$4x \times 2y$

1. **Multiplicar un monomio por un monomio.** *Ejemplo* **1.12**

   (12 min)

* Observar los rectángulos pequeños, ¿cuál es el área de cada rectángulo pequeño?, ¿cuántos rectángulos pequeños hay?, ¿cuál es el área total del rectángulo inicial?, ¿cuánto mide el largo y el ancho del rectángulo grande?, ¿cuál es la fórmula para calcular el área?

* Expresar el área del rectángulo grande.

* Concluir que para multiplicar un monomio por un monomio se multiplican los coeficientes y las variables.

2. **Resolver** *Ejercicio* **1.12**

   (10 min)

   Solución

   a) $8xy$ b) $40ab$ c) $5mn$

3. **Multiplicar monomio por monomio con término negativo.** *Ejemplo* **1.13**

   (8 min)

* Tener cuidado con los signos de los números al multiplicar.

* Multiplicando los coeficientes y luego las variables, ¿cuál es la respuesta?

4. **Resolver** *Ejercicio* **1.13**

   (15 min)

   Solución

   a) $-21y^2$

   b) $-8x^2$

   c) $-10a^2$

   d) $-6x^2$

   e) $-8ab^2$

Unidad 1: **Polinomios**

Lección 1: (7/8) Clasificación y operaciones básicas con polinomios

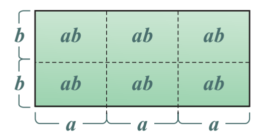
Sección 4: Multiplicación y división de monomios

Objetivo: Multiplicar un monomio por un monomio.

Sección 4: Multiplicación y división de monomios

Ejemplo **1.12**

Encuentre el área de un rectángulo cuyo largo es $3a$ y el ancho es $2b$.



Solución:
En la figura de la derecha se observa 6 rectángulos pequeños cuya área es ab que corresponden al rectángulo dado. Es decir el área del rectángulo es $6ab$.

Respuesta: $6ab$

Se puede considerar como lo siguiente:

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \text{largo} \times \text{ancho}\\ &= 3a \times 2b\\ &= 3 \times a \times 2 \times b\\ &= 3 \times 2 \times a \times b\\ &= 6ab\end{aligned}$$

$3a \times 2b = 6ab$

Para **multiplicar dos o más monomios** se multiplican los coeficientes y las variables.

Ejercicio **1.12** Calcule:

a) $4x \times 2y$ b) $8a \times 5b$ c) $m \times 5n$

Ejemplo **1.13**

Calcule $4x \times (-2x)$

Solución:

$$\begin{aligned}4x \times (-2x) &= 4 \times x \times (-2) \times x\\ &= 4 \times (-2) \times x \times x\\ &= -8x^2\end{aligned}$$

Ejercicio **1.13** Calcule:

a) $7y \times (-3y)$ b) $(-x) \times 8x$ c) $\frac{5}{3}a \times (-6a)$

d) $(-3x) \times 2x$ e) $4ab \times (-2b)$

8 Unidad 1 - Polinomios

Ejercicios adicionales

Calcule:

a) $6ab \times 2a$ b) $10xy \times 2y$ c) $3x \times 2xy$ d) $-5x^2 \times 2y$ e) $\frac{3}{2}a \times (-6b)$

Solución

a) $12a^2b$ b) $20xy^2$ c) $6x^2y$ d) $-10x^2y$ e) $-9ab$

Unidad 1: Polinomios

Lección 1: (8/8) Clasificación y operaciones básicas con polinomios

Sección 4: Multiplicación y división de monomios

Objetivo:
- Multiplicar un monomio por un monomio.
- Dividir un monomio entre un monomio.

Ejemplo 1.14

Calcule:

a) $2x^2 \times 3x$ b) $(-2a)^2$

Solución:

a) $2x^2 \times 3x = 2 \times x \times x \times 3 \times x$
$= 2 \times 3 \times x \times x \times x$
$= 6x^3$

b) $(-2a)^2 = (-2a) \times (-2a)$
$= (-2) \times a \times (-2) \times a$
$= (-2) \times (-2) \times a \times a$
$= 4a^2$

Ejercicio 1.14 Calcule:

a) $8a \times 3a^2$ b) $(-7a)^2$ c) $-2a \times 3a^3$

División de monomios: se dividen los coeficientes y se dividen las variables.

Ejemplo 1.15

Calcule:

a) $6a^2 \div 2a$ b) $8xy \div 4x$

$A \div B = \frac{A}{B}$

Solución:

a) $6a^2 \div 2a = \frac{6a^2}{2a}$
$= \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \times \overset{1}{\cancel{a}} \times a}{\underset{1}{\cancel{2}} \times \underset{1}{\cancel{a}}}$
$= 3a$

b) $8xy \div 4x = \frac{8xy}{4x}$
$= \frac{\overset{2}{\cancel{8}} \times \overset{1}{\cancel{x}} \times y}{\underset{1}{\cancel{4}} \times \underset{1}{\cancel{x}}}$
$= 2y$

Ejercicio 1.15 Calcule.

a) $(-6ab) \div 2a$ b) $8x^2 \div x$ c) $(-9x^2y) \div (-3y)$ d) $15x^3 \div 5x^2$

Indicador de logro

Calcule:

$(-6ab) \div 2a$

1. Multiplicar monomio por monomio.

Ejemplo 1.14 *(10 min)*

¿Cuántas variables x se están multiplicando en $2x^2$ y $3x$?

* Calcular el producto, multiplicando coeficientes y variables.

* Indicar que $(-2a)^2 = (-2a) \times (-2a)$

2. Resolver Ejercicio 1.14 *(10 min)*

Solución

a) $24a^3$ b) $49a^2$ c) $-6a^4$

3. Dividir monomio entre un monomio. Ejemplo 1.15 *(15 min)*

¿Cómo se divide una expresión algebraica entre un número?

* Escribir como fracción $6a^2 \div 2a$.

* Dividir coeficientes y variables.

* Otra manera es convertir la división a una multiplicación, $6a^2 \times \frac{1}{2a}$.

4. Resolver Ejercicio 1.15 *(10 min)*

Solución

a) $-3b$ b) $8x$
c) $3x^2$ d) $3x$

Ejercicios adicionales

Calcule.

a) $10xy^2 \div 5xy$ b) $-20x^4 \div 5x^2$ c) $21pqr \div 7pr$
d) $25ab^2 \div 5ab^2$ e) $32m^3n^2 \div 8m^2n^2$

Solución

a) $2y$ b) $-4x^2$ c) $3q$ d) 5 e) $4m$

1 **Identificar términos de un polinomio.**

Solución

a) Tiene 2 términos, $8x^2$ y $-3x$.
b) Tiene 3 términos, $5a$, $-4b^2$ y $-3x$
c) Tiene 2 términos 3 y $-2x$
d) Tiene 1 término $10mn$

2 **Identificar grado de un polinomio.**

Solución

a) 2 b) 4 c) 1

Sumar y restar polinomios.

Solución

3 a) $7a - 9b$ b) $5a + 5b$
c) $4a^2 - 3a$ d) $9a + 22$

4 a) $2a^2 + 5$ b) $5x - 20$
c) $10x^3 + 30x^2$ d) $-3x^2 - 11xy$
e) $7a + 4b$ f) $18a + 10b$

Multiplicar y dividir un polinomio por un monomio.

Solución

5 a) $28x - 8$ b) $20pq - 15p$
c) $-5x^2 + 3x$ d) $4y + 6$

6 a) $6x^2 + 3y$ b) $-8b^2 + 20b$

7 a) $3a^2 + 21$ b) $6x - 4$
c) $12x + 1$

8 a) $\frac{14x + 7}{6}$ b) $\frac{-2x - 5}{12}$
c) $\frac{9x + 5y}{6}$ d) $\frac{21xy - 1}{10}$

9 a) $-15xy$ b) $35x^3y^2$
c) $-9a^3b^2$ d) $6a^2b$

10 **Dividir monomios.**

Solución

a) $3y$ b) $3a^2$ c) $3a^2$

Unidad 1: Polinomios

(1~2/2) Ejercicios de la unidad

Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre polinomios.

Ejercicios

1 ¿Cuantos términos tienen los siguientes polinomios y cuáles son?
a) $8x^2 - 3x$ b) $5a - 4b^2 - 3x$ c) $3 - 2x$ d) $10mn$

2 ¿Cuál es el grado de los siguientes polinomios?
a) $3x + 4y^2$ b) $-4xy^3 - 5x^2y$ c) $4x + 1$

3 Simplifique los términos que son semejantes en los polinomios.
a) $(-3a + 5b) + (10a - 14b)$ b) $3a + 2b + 2a + 3b$
c) $a^2 + 2a + 3a^2 - 5a$ d) $4a + 12 + 5a + 10$

4 Calcule:
a) $(3a^2 + 4) - (a^2 - 1)$ b) $(3x - 10) - (-2x + 10)$
c) $(-15x^3 + 42x^2) - (-25x^3 + 12x^2)$ d) $(5x^2 - 7xy) - (8x^2 + 4xy)$
e) $(10a + 14b) + (-3a - 10b)$ f) $(13a + 12b) + (5a - 2b)$

5 Calcule:
a) $4(7x - 2)$ b) $5(4pq - 3p)$ c) $(10x^2 - 6x) \times (-\frac{1}{2})$ d) $8(\frac{1}{2}y + \frac{3}{4})$

6 Calcule:
a) $(30x^2 + 15y) \div 5$ b) $(4b^2 - 10b) \div (-\frac{1}{2})$

7 Calcule:
a) $6(a^2 + 4) - 3(a^2 + 1)$ b) $4(x + 1) + 2(x - 4)$ c) $2(3x - 1) - 3(-2x - 1)$

8 Calcule:
a) $\frac{x + 2}{3} + \frac{4x + 1}{2}$ b) $\frac{x + 1}{3} - \frac{2x + 3}{4}$ c) $\frac{x + 5y}{2} + \frac{3x - 5y}{3}$ d) $\frac{3xy + 2}{5} + \frac{3xy - 1}{2}$

9 Calcule
a) $5x \times (-3y)$ b) $5x^2y \times 7xy$ c) $-\frac{3}{2}ab^2 \times 6a^2$ d) $2ab \times 3a$

10 Calcule
a) $15xy^2 \div 5xy$ b) $21a^2 \div 7$ c) $6a^3b \div 2ab$

Unidad 2

Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Lección 1: Despeje de una variable

Lección 2: Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Lección 3: Aplicación de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

(20 horas)

Unidad 2

1 Expectativas de logro

- Reconocen situaciones que se pueden expresar con un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables.
- Resuelvan sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables.

2 Relación y desarrollo

Séptimo grado

Variables y expresiones
- Expresión algebraica (EA)
- Reglas convencionales
- Expresión de cantidades con variables
- Valor numérico de EAs
- Términos y coeficientes de EAs
- Adición y sustracción de EAs
- Multiplicación y división de EAs

Ecuaciones de primer grado en una variable
- Ecuaciones de primer grado (Definición)
- Propiedades de la igualdad y sus aplicaciones
- Resolución de ecuaciones de primer grado
- Aplicación

Octavo grado

Polinomios
- Monomios y polinomios
- Adición y sustracción de polinomios
- Multiplicación y división de polinomios por un número
- Multiplicación y división de monomios

Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables
- Despeje de una variable
- Sistema de dos ecuaciones de primer grado (Definición)
- Resolución de sistemas mediante:
  - Tablas
  - Método de eliminación
  - Método de sustitución
- Varios tipos de sistemas
- Aplicación

Funciones de primer grado
- Funciones de primer grado
- Razón de cambio
- Sistema de coordenadas
- Gráfica de funciones de primer grado
- Expresión de una función de primer grado $y = ax + b$ mediante su gráfica
- Expresión de una función de primer grado $y = ax + b$ a partir de dos puntos
- Criterio de paralelismo y perpendicularidad
- Solución gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables
- Gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables
- Solución gráfica de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables
- Aplicación

Noveno grado

Polinomios
- Multiplicación y división de un polinomio por un monomio
- Multiplicación de polinomios
- Valor numérico de un polinomio
- Productos notables
- Aplicación de productos notables
- Factorización de polinomios
- Aplicación de la factorización

Ecuaciones de segundo grado
- Ecuación de segundo grado (Definición)
- Resolución de ecuaciones mediante:
  - Sustitución de valores
  - Factorización
  - Raíz cuadrada
  - Completación de cuadrados
  - Fórmula cuadrática
- Aplicación

③ Plan de estudio (20 horas)

Lección	Distribución de horas	Contenidos
1. Despeje de una variable (1 hora)	1/1	• Despeje de una variable
2. Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables (14 horas)	1/14	• Ecuaciones de primer grado en dos variables • Resolución de ecuaciones de primer grado sustituyendo valores
	2/14	• Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables
	3/14	• Resolución de sistemas de dos ecuaciones sustituyendo valores
	4~8/14	• Método de eliminación
	9~10/14	• Método de sustitución
	11~14/14	• Tipos de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables (Eliminando paréntesis en una ecuación o en ambas, convirtiendo coeficientes fraccionario o coeficientes decimales a números enteros)
3. Aplicación de sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables (3 horas)	1~3/3	• Aplicación de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables (Situaciones que involucren dinero o relacionadas con la velocidad, la distancia y el tiempo)
Ejercicios (2 horas)	1~2/2	

④ Puntos de lección

Análisis de las pruebas diagnósticas 2016 - 2017

Unidad 2: Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

[Pregunta] Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Institutos: 13% CEB: 10% (2017)

b) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ y = 4x - 10 \end{cases}$

Institutos: 13% CEB: 7% (2017)

En estos sistemas de dos ecuaciones de primer grado, los coeficientes de las variables y sus soluciones son números enteros.

Así que se puede decir que son preguntas fáciles, sin embargo, los resultados son muy bajos.

El 13% significa, que si tiene 40 estudiantes en su clase, más de 34 estudiantes no pueden resolver estos sistemas.

Si se cambia los coeficientes de las variables y sus soluciones a números más complicados (como fracciones y decimales), obviamente los resultados salen más bajos. Para comprender el procedimiento de resolver sistema de dos ecuaciones de primer grado, es muy importante enseñar primero utilizando números sencillos.

Lección 1: Despeje de una variable

El objetivo de esta lección es que los estudiantes apliquen las propiedades de la igualdad para que aíslen una de las variables y a esto es lo que se le conoce como despeje de una variable. En 7mo grado los estudiantes aprendieron como despejar una variable pero en una ecuación que tenía solo una variable, en 9vo grado se presentarán varias variables.

Lección 2: Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Los estudiantes de 7mo grado aprendieron el concepto y la forma de resolver las ecuaciones de primer grado en una variable, aquí por primera vez se encuentran con ecuaciones en dos variables.

Una ecuación de primer grado en dos variables x y y es la igualdad $ax + by + c = 0$, donde a, b y c son números reales, a y b son ambos distintos de cero.

Este tipo de ecuación tiene infinitas soluciones que corresponden a los puntos en una recta en el plano con coordenadas como aprenderán en la Unidad 6: Funciones de primer grado.

La condición sobre la cantidad de soluciones de este sistema se trata en la unidad 6 donde se relaciona la solución con la gráfica.

En la Sección 1 de esta lección se introduce la ecuación de primer grado en dos variables y luego el sistema de dos ecuaciones en dos variables.

Se comienza buscando las soluciones sustituyendo números en las ecuaciones, pero en la Sección 2 se introducen dos métodos (igualación y sustitución) para resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables. Ambos métodos eliminan una variable obteniendo una ecuación de primer grado en términos de la otra variable.

El primer método llamado de Eliminación (también se le conoce con el nombre de Reducción por suma o resta) consiste en igualar los coeficientes de una variable multiplicando las ecuaciones por números adecuados (los que más convengan) para obtener coeficientes con signos contrarios de manera que al sumar las ecuaciones se elimine una de las variables.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 5x - y = 13 & \dots 1 \\ 2x + 3y = 9 & \dots 2 \end{cases}$$

Para igualar los coeficientes de la variable y y que tengan signos contrarios, se multiplican ambos miembros de las ecuaciones 1 y 2 por 3 y 2 respectivamente y luego se suman.

$$\begin{array}{lr} 1 \times 3 & 15x - 6y = 39 \\ 2 \times 2 & +)\ \underline{4x + 6y = 18} \\ & 19x = 57 \\ & x = 3 \end{array}$$

Sustituyendo $x = 3$ en 1 se obtiene:

$$5x - 2y = 13$$
$$5(3) - 2y = 13$$
$$y = 1$$

La solución del sistema es: $x = 3$, $y = 1$.

Para la justificación hay que usar las siguientes propiedades de la igualdad:

1. Si A = B entonces A + C = B + C.
2. Si A = B entonces AC = BC.
3. Si A = B y C = D entonces A + C = B + D, donde A, B, C y D son polinomios.

El segundo método es llamado de Sustitución y consiste en transformar una de las dos ecuaciones dadas a la forma x = (polinomio de y) o y = (polinomio de x) y sustituir x o y en la otra ecuación obteniendo una ecuación en una variable.

Cuando se manejan ambos métodos los estudiantes pueden elegir cual usar.

En la Sección 4 se tratan los casos donde hay que eliminar paréntesis en una de las ecuaciones o en ambas, asimismo se aborda el tratamiento cuando las coeficientes son números decimales o fracciones.

Lección 3: Aplicación de sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

En esta lección los estudiantes aplican el sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables a los problemas de aplicación. Como en el caso de los otros tipos de ecuaciones hay que realizar los siguientes pasos:

Paso 1. Decidir qué cantidades se representan con variables.

Paso 2. Expresar la relación entre las cantidades en la forma de un sistema de dos ecuaciones.

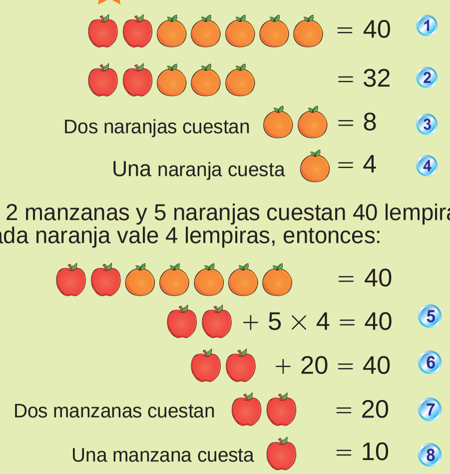
Paso 3. Resolver el sistema de ecuaciones.

Tema: Método de eliminación para resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado 1

Ejemplo 2.6 2 **Pág.** 19 3

2 manzanas y 5 naranjas cuestan 40 lempiras.
2 manzanas y 3 naranjas cuestan 32 lempiras.
¿Cuál es el precio de cada manzana y de cada naranja?

Solución 4



4 **Respuesta:** Cada manzana cuesta 10 lempiras. Cada naranja cuesta 4 lempiras.

Ejemplo 2.7 2 **Pág.** 20 3

Traduzca a lenguaje algebraico cada expresión del ejemplo anterior.

Solución 4

x: precio de una manzana

y: precio de una naranja

$$\begin{cases} 2x + 5y = 40 \\ 2x + 3y = 32 \end{cases}$$

$$2y = 8$$

$$y = 4$$

$$2x + 5y = 40$$

$$2x + 5 \times 4 = 40 \quad \text{... cuando } y = 4$$

$$2x + 20 = 40$$

$$2x = 20$$

$$x = 10$$

Respuesta: La solución del sistema es $x = 10$, $y = 4$. 4

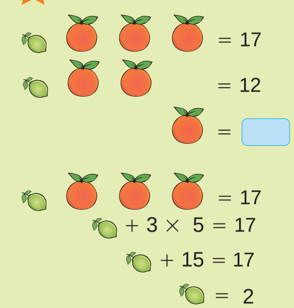
6 Al resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables eliminando una de las variables se le conoce como MÉTODO DE ELIMINACIÓN.

Ejercicio 2.4 2 **Pág.** 20 3

Un limón y tres toronjas cuestan 17 lempiras.
Un limón y dos toronjas cuestan 12 lempiras.

a) Encuentre el precio de cada limón y de cada toronja.

Solución 4



Respuesta: Un limón cuesta 2 lempiras y una toronja 5 lempiras. 4

Para seguir con la otra parte de este ejercicio se puede borrar la parte izquierda de la pizarra.

1 Al inicio de la clase escribir solo la palabra “**Tema**” y hasta el final de la clase (o en el desarrollo de la misma) escribir el contenido del tema.

2 Escribir el número del Ejemplo o Ejercicio.

3 Escribir el número de **Pág.** del LE para entender dónde se quedaron con respecto al tiempo.

4 Escribir la **Solución** y **Respuesta**.

5 En el problema planteado marcar los datos importantes para poder llegar a la respuesta.

6 Escribir la conclusión en un rectángulo de color rojo.

✓ Marcar en el Ejercicio cuando la solución o la respuesta sean correctas.

Nota: Los puntos aquí explicados no siempre aplican todos en un plan de pizarra.

Tema: Método de eliminación para resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado 1

Ejemplo 2.8 2 **Pág.** 21 3

Resuelva el siguiente sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 17 & ① \\ 2x - 3y = -5 & ② \end{cases}$$

Solución 4

¿Qué variable es más fácil de eliminar? ¿Por qué?

R: Se elimina la variable y porque los coeficientes tienen el mismo valor absoluto pero diferente signo y al sumarse se cancela la variable y.

$$\begin{array}{rl} 4x + \cancel{3y} &= 17 \\ +)\ 2x - \cancel{3y} &= -5 \\ \hline 6x \quad &= 12 \\ x &= 2 \end{array}$$

Encontrado el valor de una de las variables, sustituirlo en una de las ecuaciones originales para encontrar el valor de la otra variable.

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 17 \quad ① \\ 4(2) + 3y &= 17 \quad \text{... cuando } x = 2 \\ 8 + 3y &= 17 \\ 3y &= 17 - 8 \\ 3y &= 9 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Respuesta: La solución del sistema es $x = 2,\ y = 3$ 4 ✓

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -5 \quad ② \\ 2(2) - 3y &= -5 \quad \text{... cuando } x = 2 \\ 4 - 3y &= -5 \\ -3y &= -5 - 4 \\ -3y &= -9 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.5 2 **Pág.** 21 3

Resuelva utilizando el método de eliminación.

a) $$\begin{cases} 2x + y = 14 & ① \\ x - y = 4 & ② \end{cases}$$

Solución 4

$$\begin{array}{rl} 2x + \cancel{y} &= 14 \\ +)\ x - \cancel{y} &= 4 \\ \hline 3x \quad &= 18 \\ x &= 6 \end{array}$$

Se sustituye el valor de $x = 6$ en una de las ecuaciones originales.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 14 \quad ① \\ 2(6) + y &= 14 \quad \text{... cuando } x = 6 \\ 12 + y &= 14 \\ y &= 14 - 12 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Respuesta: La solución del sistema es $x = 6,\ y = 2$ 4 ✓

Para seguir con la otra parte de este ejercicio se puede borrar la parte izquierda de la pizarra.

1 Al inicio de la clase escribir solo la palabra "**Tema**" y hasta el final de la clase (o en el desarrollo de la misma) escribir el contenido del tema.

2 Escribir el número del Ejemplo o Ejercicio.

3 Escribir el número de **Pág.** del LE para entender dónde se quedaron con respecto al tiempo.

4 Escribir la **Solución** y **Respuesta**.

5 En el problema planteado marcar los datos importantes para poder llegar a la respuesta.

6 Escribir la conclusión en un rectángulo de color rojo.

✓ Marcar en el Ejercicio cuando la solución o la respuesta sean correctas.

Nota: Los puntos aquí explicados no siempre aplican todos en un plan de pizarra.

Indicador de logro

Despeje la variable que se expresa entre corchetes.

a) $9 = 5x + 3y$ [x]

b) $\ell = 2 + 7r$ [r]

1. Expresar una situación problemática con una ecuación.

Ejemplo 1.1

(10 min)

* Hacer preguntas para asegurar la comprensión del problema:

¿Cuántos galones tiene el tanque?

¿Cuántos galones se consumen por cada hora que se abre la válvula?

Si h representa las horas que se abre la válvula y a la cantidad de agua que queda en el tanque, ¿cómo se puede expresar la cantidad de galones que se consumen después de h horas de haber abierto la válvula?

¿Cómo se expresa la cantidad de agua a que queda en el tanque después de h horas que se abrió la válvula.

* Concluir que:

a) $5h$ representa la cantidad de galones consumidos después de h horas

b) $a = 58 - 5h$ representa la cantidad de agua que queda después de h horas.

2. Expresar la variable h en términos de la variable a.

(Ejemplo 1.1, inciso c)

(10 min)

* Aplicar las propiedades de la igualdad para despejar h.

* Realizar el despeje justificando cada paso.

* Llamar a este proceso "despeje de una variable".

* Leer el resumen sobre el despeje de una variable en una ecuación.

Unidad 2:	**Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables**
Lección 1: (1/1)	Despeje de una variable
Sección 1:	Despeje de una variable
Objetivo:	Despejar una variable aplicando las propiedades de la igualdad.

Unidad 2

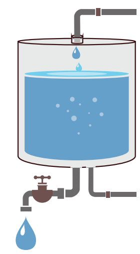
Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Lección 1: Despeje de una variable

Ejemplo 1.1

Un tanque de reserva tiene 58 galones de agua, por cada hora que se abre la válvula se consumen 5 galones. Si h representa las horas que se abre la válvula y a la cantidad de agua que queda en el tanque después de h horas, encuentre:

a) La cantidad de galones que se consumen después de h horas.
b) La cantidad de agua a que queda en el tanque luego de h horas que se abrió la válvula
c) Exprese la variable h en términos de la variable a, considerando el resultado del inciso b).



Solución:

a) Como h representa las horas que se abrió la válvula, entonces $5h$ es la cantidad de galones que se consumen después de h horas.
b) La cantidad de agua a que quedará después de h horas es: $a = 58 - 5h$.
c) Para expresar h en términos de la variable a, es necesario aplicar las propiedades de la igualdad.

$$a = 58 - 5\boxed{h}$$
$$a + 5h = 58 - \cancel{5h} + \cancel{5h} \quad \text{...Sumar } 5h \text{ a ambos lados}$$
$$\cancel{a} - \cancel{a} + 5h = 58 - a \quad \text{...Restar } a \text{ en ambos lados}$$
$$5h = 58 - a \quad \text{...Reducir términos semejantes}$$
$$\frac{\cancel{5}h}{\cancel{5}} = \frac{58 - a}{5} \quad \text{...Dividir entre 5 a ambos lados}$$
$$h = \frac{58 - a}{5}$$

El recuadro de $-5\boxed{h}$ representa la variable que se desea aislar.

Respuesta: $h = \dfrac{58 - a}{5}$

El proceso aplicado en c) para aislar la variable h de las otras cantidades y/o variables se le conoce como despeje.

Despejar una variable de una ecuación, es encontrar otra expresión equivalente donde la variable considerada quede aislada en uno de los lados de la igualdad.

continúa en la siguiente página...

Unidad 2: Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Lección 1: (1/1) Despeje de una variable

Sección 1: Despeje de una variable

Objetivo: Despejar una variable aplicando las propiedades de la igualdad.

Ejemplo 1.2

De la ecuación $2n = 5 - 3m$, despeje para m usando la transposición de términos.

Transposición de términos:

$A + B = C \rightarrow A = C - B$

$A - B = C \rightarrow A = C + B$

Solución:

$2n = 5 - 3m$

$2n + 3m = 5$ … Trasladar $-3m$ al lado izquierdo de la igualdad con signo +

$3m = 5 - 2n$ … Trasladar $2n$ al lado derecho de la igualdad con signo −

$\frac{3m}{3} = \frac{5-2n}{3}$ … Dividir entre 3 ambos lados

$m = \frac{5-2n}{3}$

Ejercicio 1.1 Despeje para la variable que se expresa entre corchetes usando la transposición de términos.

a) $y = 13 - 2x$; [x]   b) $5x + 3y = 9$; [y]

Ejemplo 1.3

Dada la ecuación $a = 17 + 3x$, despeje para x.

Propiedad
Si A = B, entonces B = A.

Ejemplo:
Si $a = 17 + 3x$ entonces $17 + 3x = a$.

Solución:

$a = 17 + 3x$

$17 + 3x = a$ ... Aplicar la propiedad: Si A = B entonces B = A

$3x = a - 17$ ... Trasladar 17 al lado derecho de la igualdad con signo −

$\frac{3x}{3} = \frac{a-17}{3}$ ... Dividir ambos lados entre 3

$x = \frac{a-17}{3}$

Ejercicio 1.2 Despeje para la variable que se expresa entre corchetes.

a) $9 = 5x + 3y$; [x]   b) $\ell = 2 + 7r$; [r]

Indicador de logro

Despeje la variable que se expresa entre corchetes.

a) $9 = 5x + 3y$ [x]

b) $\ell = 2 + 7r$ [r]

3. Despejar una variable usando la transposición de términos. Ejemplo 1.2

(10 min)

* Recordar la transposición de términos (lo que suma a un lado de la igualdad pasa a restar al otro y viceversa).
* Realizar el despeje justificando cada paso.

4. Resolver Ejercicio 1.1

(5 min)

Solución

a) $x = \frac{13 - y}{2}$

b) $y = \frac{9 - 5x}{3}$

5. Despejar una variable. Ejemplo 1.3

(5 min)

* Recordar la propiedad "Si A = B entonces B = A" para aplicarla en el despeje de variables.
* Realizar el despeje justificando cada paso.

6. Resolver Ejercicio 1.2

(5 min)

Solución

a) $x = \frac{9 - 3y}{5}$

b) $r = \frac{-2 + \ell}{7}$

Indicador de logro

Comprobar que los siguientes valores para x y y satisfacen la ecuación $3x + 2y = 17$.

a) $x = 1$, $y = 7$

b) $x = 3$, $y = 4$

1. Encontrar el número de cajas rojas y azules al tener 17 jabones. *Ejemplo* **2.1**

(10 min)

* Hacer preguntas para asegurar la comprensión del problema:

¿Cuántos jabones contienen las cajas azules?

¿Cuántos jabones contienen las cajas rojas?

¿Cuántos jabones se necesitan en total?

Si se toma una caja azul, ¿cuántas cajas rojas debe tomar para tener los 17 jabones?

* Sugerir hacer una representación gráfica de la situación o una tabla que contenga los datos.

* Pensar en el número de cajas azules que se pueden tomar (1, 2, 3, 4, 5 y 6) y en el número de cajas rojas para totalizar que la cantidad de jabones sea 17.

* Concluir que se pueden tomar:

a) 1 caja azul y 7 rojas,

b) 3 azules y 4 rojas.

* Concluir que hay varias respuestas para este problema.

2. Resolver *Ejercicio* **2.1**

(5 min)

Este ejercicio corresponde a la última parte del Ejemplo anterior, si los estudiantes ya encontraron la respuesta y la discutieron en la actividad anterior seguir con la clase.

Solución

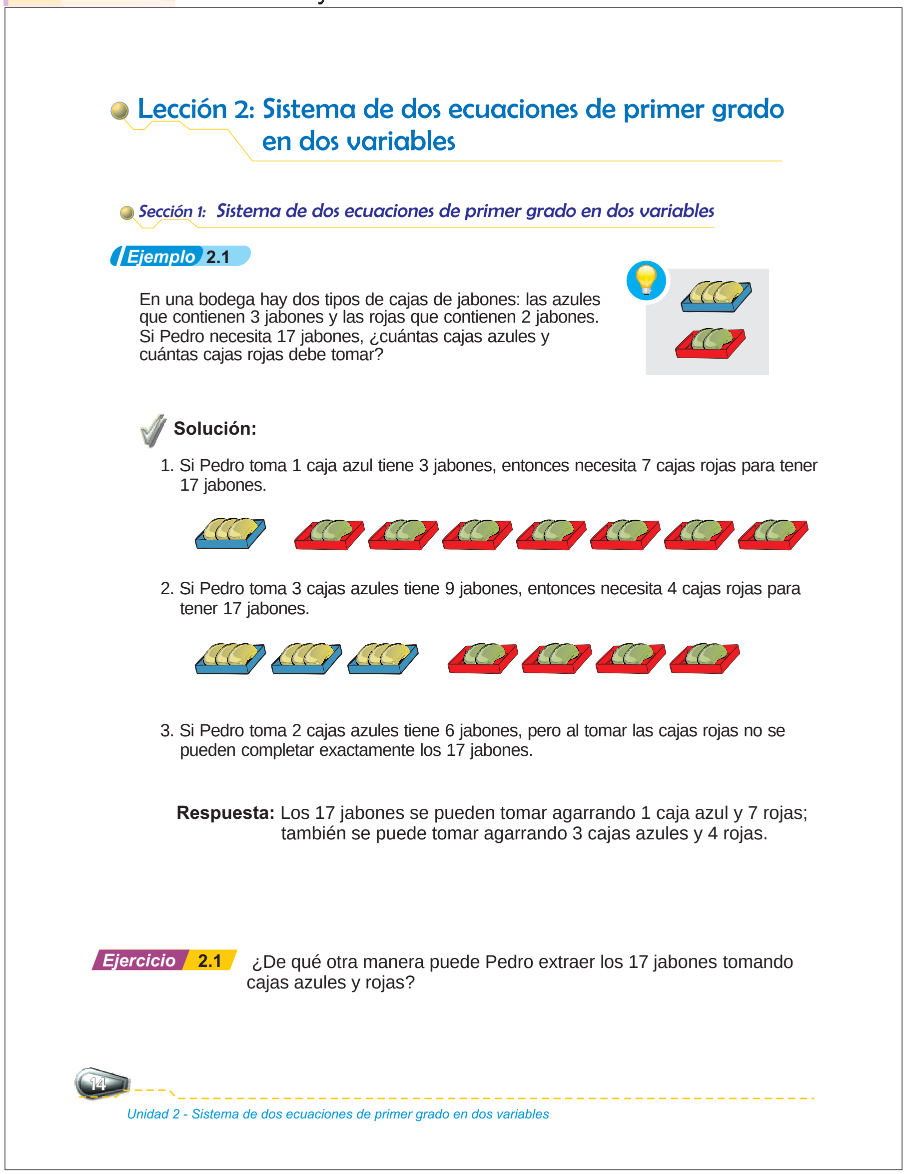
5 cajas azules y 1 caja roja

Unidad 2: **Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables**

Lección 2: (1/14) Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Sección 1: Sistema de dos ecuaciones de primer grado

Objetivos:
- Definir una ecuación de primer grado en dos variables.
- Resolver ecuaciones de primer grado en dos variables sustituyendo valores.



Lección 2: Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Sección 1: Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Ejemplo **2.1**

En una bodega hay dos tipos de cajas de jabones: las azules que contienen 3 jabones y las rojas que contienen 2 jabones. Si Pedro necesita 17 jabones, ¿cuántas cajas azules y cuántas cajas rojas debe tomar?

Solución:

1. Si Pedro toma 1 caja azul tiene 3 jabones, entonces necesita 7 cajas rojas para tener 17 jabones.
2. Si Pedro toma 3 cajas azules tiene 9 jabones, entonces necesita 4 cajas rojas para tener 17 jabones.
3. Si Pedro toma 2 cajas azules tiene 6 jabones, pero al tomar las cajas rojas no se pueden completar exactamente los 17 jabones.

Respuesta: Los 17 jabones se pueden tomar agarrando 1 caja azul y 7 rojas; también se puede tomar agarrando 3 cajas azules y 4 rojas.

Ejercicio **2.1** ¿De qué otra manera puede Pedro extraer los 17 jabones tomando cajas azules y rojas?

14 *Unidad 2 - Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables*

continúa en la siguiente página...

Unidad 2: Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Lección 2: (1/14) Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Sección 1: Sistema de dos ecuaciones de primer grado

Objetivos:
- Definir una ecuación de primer grado en dos variables.
- Resolver ecuaciones de primer grado en dos variables sustituyendo valores.

La cantidad de cajas azules y rojas que necesita Pedro está representada por la ecuación:

$3x + 2y = 17$ ... x: cantidad de cajas azules
y: cantidad de cajas rojas

Los datos de la tabla 1, resumen el número de cajas azules y rojas que necesita Pedro.

Tabla 1

Cajas azules	x	1	3	5
Cajas rojas	y	7	4	1

Al resolver una ecuación se obtienen valores de la variable que hacen verdadera la igualdad.
Al procedimiento de reemplazar estos valores en el lugar original de la variable y verificar que la igualdad se cumple, se le llama comprobación.

Ejemplo 2.2

Compruebe que los valores encontrados para las variables x y y en el Ejemplo 2.1 son correctos.

Solución:

a) Comprobar si se cumple o no, que cuando $x = 1$, $y = 7$ la igualdad $3x + 2y = 17$ es verdadera.

$3x + 2y = 17$ ... cuando $x = 1$, $y = 7$

$3(1) + 2(7) \overset{?}{=} 17$
$3 + 14 \overset{?}{=} 17$
$17 \overset{\checkmark}{=} 17$

Se cumple

Al comprobar que sí es verdadera la igualdad $3x + 2y = 17$ para los valores $x = 1$ y $y = 7$ se escribe al final $\overset{\checkmark}{=}$, pero antes de llegar a esta conclusión se expresa como $\overset{?}{=}$, porque todavía no se sabe si la igualdad se cumple o no.

b) Comprobar si se cumple o no, que cuando $x = 3$, $y = 4$ la igualdad $3x + 2y = 17$ es verdadera.

$3x + 2y = 17$ ... cuando $x = 3$, $y = 4$

$3(3) + 2(4) \overset{?}{=} 17$
$9 + 8 \overset{?}{=} 17$
$17 \overset{\checkmark}{=} 17$

Se cumple

c) Compruebe en su casa si se cumple cuando $x = 5$, $y = 1$.

La expresión $\mathbf{3x + 2y = 17}$ es una **ecuación de primer grado en dos variables**.

Una ecuación es una igualdad que involucra una o más variables. En esta unidad se estudiarán únicamente las ecuaciones de primer grado en dos variables.

15

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Indicador de logro

Comprobar que los siguientes valores para x y y satisfacen la ecuación $3x + 2y = 17$.

a) $x = 1$, $y = 7$

b) $x = 3$, $y = 4$

3. Expresar la cantidad de cajas y jabones como una ecuación de primer grado en dos variables.
(10 min)

* Asignar variables a las cantidades de cajas.

x: cantidad de cajas azules

y: cantidad de cajas rojas

* Formar la ecuación

$3x + 2y = 17$ (Esta parte es difícil para los estudiantes, inducirla con varias preguntas).

* Presentar la tabla reflexionando sobre los datos presentados.

4. Sustituir valores para x y y para comprobar que satisfacen la ecuación.
Ejemplo 2.2
(15 min)

* Dada la ecuación $3x + 2y = 17$, sustituir los valores de la tabla para x y y, verificando si hacen verdadera la ecuación.

* Concluir que los valores de la tabla hacen verdadera la ecuación.

* Reflexionar que hay varios valores (parejas de valores) que hacen verdadera la ecuación, comparando con las ecuaciones de primer grado vistas en 7mo grado donde estas solo tenían un valor que las satisfacía.

5. Definir una ecuación de primer grado en dos variables.
(5 min)

* Llamar a $3x + 2y = 17$ ecuación de primer grado en dos variables y analizar sus características.

Indicador de logro

Empleando tablas de valores encuentre la solución del sistema.

$$\begin{cases} x + 2 = 1 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

probando simultáneamente en cada ecuación con los valores 0, 1, 2 y 3.

1. **Identificar ecuaciones de primer grado en dos variables.**
   Ejemplo 2.3
   (5 min)

* Reflexionar por qué la ecuación $-10x - 7xy = 2$ no es una ecuación de primer grado aun cuando tiene dos variables.

2. **Resolver** **Ejercicio 2.2**
   (5 min)
   Solución
   a) y c)

3. **Encontrar la cantidad de cajas azules y de cajas rojas que suman 7 y el número de jabones es 17. (Ejemplo 2.4 inciso a)**
   (10 min)
   ¿Cuál es la nueva condición del problema?

* Asignar variables a las cantidades de cajas.
  x: cantidad de cajas azules
  y: cantidad de cajas rojas
* ¿Cuántas cajas de cada color se necesitan?
* Construir una tabla de manera que el total de cajas sea 7, es decir, que satisfagan la ecuación de primer grado en dos variables $x + y = 7$.

Unidad 2: Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Lección 2: (2/14) Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Sección 1: Sistema de dos ecuaciones de primer grado

Objetivos:
- Definir un sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables.
- Resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables sustituyendo valores.

Ejemplo 2.3

Identifique cuáles de las siguientes son ecuaciones de primer grado en dos variables.

a) $6x + y = 19$ b) $-10x - 7xy = 2$ c) $5x - y + 3 = 0$

Solución:
a) Sí es ecuación de primer grado en dos variables, porque el grado de los términos $6x$ y y es 1.
b) No, porque el término $-7xy$ tiene grado 2.
c) Sí, porque los términos $5x$ y $-y$ tienen grado 1, y se pueden igualar a -3, es decir, $5x - y = -3$.

$x = x^1$
Es de grado 1

$xy = x^1y^1$
El término xy es de grado $1 + 1 = 2$

Ejercicio 2.2 Identifique las ecuaciones de primer grado en dos variables.

a) $10x + y = 7$ b) $xy + x = 5$ c) $2x - 5y + 1 = 0$ d) $x^2 + 6y = 9$

Ejemplo 2.4

Ahora a la situación del Ejemplo 2.1 se agrega la siguiente condición "La cantidad total de las cajas entre azules y rojas que Pedro necesita es 7". Si se utilizan las mismas variables, ¿cuál es la ecuación que representa esta situación?

Solución: $x + y = 7$ x: cantidad de cajas azules
y: cantidad de cajas rojas

a) ¿Cuántas cajas de cada color se necesitan?
b) ¿Cuáles son los valores de x y de y que satisfacen simultáneamente la ecuación $3x + 2y = 17$ del Ejemplo 2.1 y la ecuación $x + y = 7$ del inciso anterior?

Solución:
a) Como la cantidad total de cajas entre azules y rojas es 7, se pueden tomar:
1 caja azul y 6 rojas,
2 cajas azules y 5 rojas,
3 cajas azules y 4 rojas,
4 cajas azules y 3 rojas,
y así sucesivamente.

No puede tomar solo cajas de un mismo color.

En la tabla 2 se resumen los datos de las cantidades de ambos tipos de caja.

Tabla 2 ($x + y = 7$)

x	1	2	3	4	5	6
y	6	5	4	3	2	1

continúa en la siguiente página...

Unidad 2: **Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables**

Lección 2: (2/14) Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Sección 1: Sistema de dos ecuaciones de primer grado

Objetivos:
- Definir un sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables.
- Resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables sustituyendo valores.

b) Los valores de x y y que satisfacen la ecuación $3x + 2y = 17$ se presentan en la **Tabla 1** y los valores de x y y que satisfacen la ecuación $x + y = 7$ en la **Tabla 2**.

Tabla 1 ($3x + 2y = 17$)

Cajas azules	x	1	3	5
Cajas rojas	y	7	4	1

Tabla 2 ($x + y = 7$)

x	1	2	3	4	5	6
y	6	5	4	3	2	1

Los valores que satisfacen al mismo tiempo las dos ecuaciones son $x = 3$, $y = 4$.

Cuando se buscan las soluciones comunes a dos ecuaciones de primer grado en dos variables se colocan de la siguiente manera y se le llama **sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables**:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

Un **sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables** es una pareja de ecuaciones de primer grado en dos variables.

La solución de un sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables son los valores de las variables que satisfacen simultáneamente las dos ecuaciones.

Resolver un sistema de ecuaciones de primer grado en dos variables es encontrar su solución.

La solución del sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ x + y = 7 \end{cases}$ es $x = 3$, $y = 4$.

También se puede escribir la solución de un sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables de la siguiente manera:

CS: $\{(x = 3, y = 4)\}$
CS significa conjunto solución.

17

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Indicador de logro

Empleando tablas de valores encuentre la solución del sistema.

$$\begin{cases} x + 2 = 1 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

probando simultáneamente en cada ecuación con los valores 0, 1, 2 y 3.

4. Encontrar los valores de x y y que satisfacen simultáneamente las ecuaciones: $3x + 2y = 17$; y $x + y = 7$.
(Ejemplo 2.4 inciso b)
(10 min)

* Comparar los valores en las tablas 1 y 2 y concluir que solo cuando $x = 3$ y $y = 4$ se satisfacen simultáneamente las dos ecuaciones.

* Llamar "sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables" a la pareja anterior de ecuaciones de primer grado.

* Hacer énfasis en su escritura.

* Definir la solución de un sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables y qué significa resolver un sistema.

* Concluir que la solución del sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

es $x = 3$, $y = 4$.

* Concluir que la solución también se puede escribir como:
CS: $\{ (x = 3, y = 4) \}$

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Empleando tablas de valores encuentre la solución del sistema.

$$\begin{cases} x + 2 = 1 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

probando simultáneamente en cada ecuación con los valores 0, 1, 2 y 3.

5. Encontrar la solución de un sistema de dos ecuaciones de primer grado sustituyendo valores. *Ejemplo* **2.5**

(10 min)

* Sustituir los valores en ambas ecuaciones y construir las dos tablas.

* Concluir que la solución es $x = 1$, $y = 2$.

6. Resolver *Ejercicio* **2.3**

(5 min)

Solución

Ecuación $x + y = 1$

x	0	1	2	3
y	1	0	-1	-2

Ecuación $3x + y = 5$

x	0	1	2	3
y	5	2	-1	-4

Respuesta: $x = 2$, $y = -1$

Unidad 2: Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Lección 2: (2/14) Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Sección 1: Sistema de dos ecuaciones de primer grado

Objetivos:
- Definir un sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables.
- Resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables sustituyendo valores.

Ejemplo **2.5**

Empleando tablas de valores, encuentre la solución del siguiente sistema probando simultáneamente en cada ecuación con los valores 0, 1, 2 y 3 para la variable x.

$$\begin{cases} x - y = -1 & ① \\ x + y = 3 & ② \end{cases}$$

Solución:

Ecuación ① $x - y = -1$	**Ecuación ②** $x + y = 3$
$x - y = -1$ $0 - y = -1$ ... cuando $x = 0$ $y = 1$	$x + y = 3$ $0 + y = 3$ ... cuando $x = 0$ $y = 3$
$x - y = -1$ $1 - y = -1$ ... cuando $x = 1$ $-y = -1 - 1$ $-y = -2$ $y = 2$	$x + y = 3$ $1 + y = 3$ ... cuando $x = 1$ $y = 3 - 1$ $y = 2$

Ecuación $x - y = -1$ ①

x	0	1	2	3
y	1	2		

Ecuación $x + y = 3$ ②

x	0	1	2	3
y	3	2		

Como $x = 1$, $y = 2$ es solución de ambas ecuaciones, no se necesita seguir probando con los valores de $x = 2$ y $x = 3$.

Respuesta: La solución común que tienen las ecuaciones ① y ② es $x = 1$, $y = 2$.

Ejercicio **2.3** Empleando tablas de valores, encuentre la solución del siguiente sistema probando simultáneamente en cada ecuación con los valores 0, 1, 2 y 3 para la variable x.

$$\begin{cases} x + y = 1 & ① \\ 3x + y = 5 & ② \end{cases}$$

18 Unidad 2 - Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Unidad 2: Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Lección 2: (3/14) Sistema de dos ecuaciones de primer grado

Sección 2: Métodos de eliminación para resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Objetivo: Comprender el método de eliminación para resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables.

Sección 2: ***Método de eliminación para resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables***

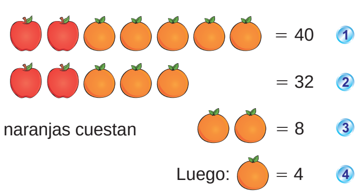
Introducción al método de eliminación

Ejemplo 2.6

2 manzanas y 5 naranjas cuestan 40 lempiras.
2 manzanas y 3 naranjas cuestan 32 lempiras.
¿Cuál es el precio de cada manzana y de cada naranja?

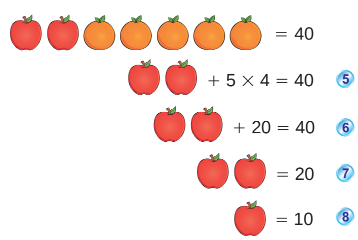
Solución:

Entonces, dos naranjas cuestan



Se concluye que una naranja vale 4 lempiras.

Luego, si 2 manzanas y 5 naranjas cuestan 40 lempiras
y cada naranja vale 4 lempiras, entonces:



Se concluye que una manzana vale 10 lempiras.

Respuesta: El precio de cada manzana es de 10 lempiras.
El precio de cada naranja es de 4 lempiras.

19
Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Indicador de logro

Encontrar el precio de cada limón y de cada toronja sabiendo que:

1 limón y 3 toronjas cuestan 17 lempiras y 1 limón y 2 toronjas cuestan 12 lempiras.

1. Resolver el problema analizando el dibujo

Ejemplo 2.6

(15 min)

* Hacer preguntas para comprobar la comprensión del problema.

* Hacer una representación del problema dibujando las manzanas y las naranjas junto con sus precios totales.

* Analizando el dibujo, determinar qué tienen en común los dos primeros dibujos para deducir que si se restan se puede saber que 2 naranjas cuestan 8 lempiras y que por lo tanto 1 naranja cuesta 4 lempiras.

  Luego sabiendo que 4 lempiras cuesta cada naranja se sustituye este valor en el primer dibujo para concluir que 2 manzanas cuestan 20 lempiras y que por la tanto una manzana cuesta 10 lempiras.

* Concluir que una manzana cuesta 10 lempiras y que una naranja cuesta 4 lempiras.

continúa en la siguiente página...

2. Traducir al lenguaje algebraico el problema y los pasos de su solución de la actividad anterior para deducir el método de eliminación. *Ejemplo* **2.7**

(15 min)

* Asignar variables a los precios de cada manzana y cada naranja.

 x: precio de una manzana

 y: precio de una naranja

* Traducir a lenguaje algebraico los dos primeros dibujos de la actividad anterior para armar el sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 40 \\ 2x + 3y = 32 \end{cases}$$

* Traducir a lenguaje algebraico los demás pasos de la representación del dibujo anterior y concluir que en el paso 3 lo que se ha hecho es restar las ecuaciones para encontrar el valor de y. Seguir con la sustitución de y en la primera ecuación para encontrar el valor de x.
* Concluir que la solución del sistema es: $x = 10$, $y = 4$.

3. Definir el método de eliminación para resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado.

(5 min)

* Leer el resumen del LE.

4. Resolver *Ejercicio* **2.4**

(10 min)

Solución

x: precio de un limón

y: precio de una toronja

$$\begin{cases} x + 3y = 17 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$$

$x = 2$, $y = 5$

Unidad 2: **Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables**

Lección 2: (3/14) Sistema de dos ecuaciones de primer grado

Sección 2: Métodos de eliminación para resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Objetivo: Comprender el método de eliminación para resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables.

Ejemplo **2.7**

Traduzca a lenguaje algebraico cada expresión del *Ejemplo* **2.6** donde:

x: precio de una manzana

y: precio de una naranja

Solución:

2 manzanas y 5 naranjas cuestan 40 lempiras

2 manzanas y 3 naranjas cuestan 32 lempiras

$$\begin{cases} 2x + 5y = 40 & (1) \\ 2x + 3y = 32 & (2) \end{cases}$$

$$2y = 8 \quad (3)$$

$$y = 4 \quad (4)$$

$$2x + 5 \times 4 = 40 \quad (5)$$

$$2x + 20 = 40 \quad (6)$$

$$2x = 20 \quad (7)$$

$$x = 10 \quad (8)$$

A la ecuación (1) se le resta la ecuación (2)

Sustituyendo el valor obtenido de y se obtiene una ecuación de primer grado en una variable.

Respuesta: La solución del sistema es $x = 10$, $y = 4$.

En un sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables, al eliminar una variable de una de las ecuaciones, esta se convierte en una ecuación de primer grado en una variable, la cual ya se sabe como resolver.

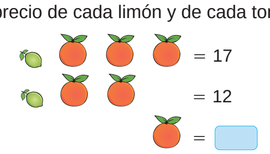
Al proceso de resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables eliminando una de las variables se le conoce como **método de eliminación**.

Al método de eliminación también se le conoce como método de reducción por suma o resta.

Ejercicio **2.4** Un limón y tres toronjas cuestan 17 lempiras.
Un limón y dos toronjas cuestan 12 lempiras.

a) Encuentre el precio de cada limón y de cada toronja, utilice la **pista 1**.

Pista 1



b) Traduzca a lenguaje algebraico cada ecuación del inciso a) según la **pista 2**.

Pista 2 x: precio de un limón

y: precio de una toronja

20 *Unidad 2 - Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables*

a) = 5

= 17

+ 5 x 3 = 17

+ 15 = 17

= 2

b) $x + 3y = 17$

$x + 2y = 12$

$y = 5$

$x + 5 \times 3 = 17$

$x + 15 = 17$

$x = 2$

Respuesta: Una toronja vale 5 lempiras y un limon 2 lempiras.

Unidad 2:

Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Lección 2: (4/14) Sistema de dos ecuaciones de primer grado

Sección 2: Métodos de eliminación para resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Objetivo: Resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado utilizando el método de eliminación (los coeficientes de x son opuestos o los de y).

Método de eliminación cuando los coeficientes de x o de y son opuestos

De aquí en adelante, se aprenderá como resolver diferentes tipos de sistemas de ecuaciones, usando el método de eliminación y empleando la suma para eliminar una variable.

Ejemplo 2.8

Resuelva el siguiente sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 17 & ① \\ 2x - 3y = -5 & ② \end{cases}$$

Solución:

En este caso se observa que los coeficientes de la variable y tienen el mismo valor absoluto y diferente signo: $+3$ y -3. Al sumar $+3y$ y $-3y$ el resultado es 0, y se elimina la variable y.

$$\begin{array}{rl} 4x + \cancel{3y} &= 17 \\ +)\ 2x - \cancel{3y} &= -5 \\ \hline 6x \qquad &= 12 \\ x &= 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} A = B \\ +)\ C = D \\ \hline A + C = B + D \end{array}$$

Una vez encontrado el valor de una variable, este puede utilizarse para encontrar el valor de la otra.

En la ecuación ① sustituya $x = 2$.

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 17 \quad ① \\ 4(2) + 3y &= 17 \quad \text{... cuando } x = 2 \\ 8 + 3y &= 17 \\ 3y &= 17 - 8 \\ 3y &= 9 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

También se puede tomar la ecuación ② para encontrar el valor de y, sustituyendo $x = 2$.

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -5 \quad ② \\ 2(2) - 3y &= -5 \quad \text{... cuando } x = 2 \\ 4 - 3y &= -5 \\ -3y &= -5 - 4 \\ -3y &= -9 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Se obtiene el mismo valor para y.

Respuesta: La solución del sistema es $x = 2$, $y = 3$.

Ejercicio 2.5 Resuelva usando el método de eliminación.

a) $\begin{cases} 2x + y = 14 \\ x - y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 5x - y = 14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x + 3y = 8 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 5y = 26 \\ -3x + 2y = 2 \end{cases}$

21

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Indicador de logro

Resuelva utilizando el método de eliminación el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 26 \\ -3x + 2y = 2 \end{cases}$$

1. **Resolver el sistema utilizando el método de eliminación.** **Ejemplo 2.8**

   (20 min)

* En el sistema

$$\begin{cases} 4x + 3y = 17 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$$

¿qué variable es más fácil de eliminar? ¿Por qué?

* Concluir que los términos que contienen la variable y tienen los mismos coeficientes pero con signos opuestos y que por eso se pueden sumar y se elimina la variable y.

* Eliminada la variable y y encontrado el valor de x, sustituir el valor de x en una de las ecuaciones originales para encontrar el valor de y.

* Enfatizar en la colocación del +) en el sistema y explicar que significa que las ecuaciones se están sumando.

* Probar que el valor de x puede sustituirse en la otra ecuación original y que siempre se obtendrá el mismo valor para y.

* Concluir que la solución del sistema es $x = 2$, $y = 3$.

2. **Resolver** **Ejercicio 2.5**

   (25 min)

Solución

a) $x = 6$, $y = 2$
b) $x = 3$, $y = 1$
c) $x = 2$, $y = 4$
d) $x = 2$, $y = 4$

Indicador de logro

Resuelva utilizando el método de eliminación el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 7x + 2y = 10 \\ 2x - 2y = 20 \end{cases}$$

1. Resolver el sistema utilizando el método de eliminación. *Ejemplo* **2.9**

(20 min)

* En el sistema

$$\begin{cases} x + 4y = 4 \\ x - y = -6 \end{cases}$$

¿qué variable es más fácil de eliminar? ¿Por qué?

* Concluir que los términos que contienen la variable x tienen los mismos coeficientes pero con el mismo signo y que si se suman no se elimina la variable x.

* ¿Qué puede hacerse para que se elimine la variable x?

* Concluir que se puede multiplicar la primera ecuación por -1 para que la x quede negativa y al sumarla con la otra ecuación se elimine dicha variable.

* Enfatizar que el -1 está multiplicando tanto al miembro izquierdo de la ecuación como al derecho.

* Eliminada la variable x y encontrado el valor de y, sustituir el valor de y en una de las ecuaciones originales para encontrar el valor de x.

* Concluir que la solución del sistema es $x = -4$, $y = 2$.

* Hacer que los estudiantes reflexionen en la diferencia entre este sistema y los de la clase pasada para que puedan establecer el procedimiento a seguir para encontrar su solución.

Unidad 2: **Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables**

Lección 2: (5/14) Sistema de dos ecuaciones de primer grado

Sección 2: Métodos de eliminación para resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Objetivo: Resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado utilizando el método de eliminación (los coeficientes de x son iguales o los de y).

Método de eliminación cuando los coeficientes de x o de y son iguales

Ejemplo **2.9**

Resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 4y = 4 & ① \\ x - y = -6 & ② \end{cases}$$

Solución

Ahora se presenta el caso donde los coeficientes de una de las variables son iguales, esta variable es la x. Al sumar $x + x$ no se elimina dicha variable, pero sí al sumar $x + (-x)$.

Para esto, la ecuación ② se multiplica por −1 para que el coeficiente de la variable x sea opuesto al coeficiente de x de la ecuación ①, y así poder eliminarla sumando la ecuación ②' con la ecuación ①.

②' se lee "2 prima".

$$-1(x - y = -6)$$
$$-x + y = 6 \quad ②'$$

Esta expresión significa que se multiplica −1 tanto al lado izquierdo de la igualdad, como al lado derecho.

$$-1(x - y = -6)$$

Se multiplica el lado izquierdo de la igualdad por −1: $-1(x - y) = -x + y$

Se multiplica el lado derecho de la igualdad por −1: $-1(-6) = 6$

También se puede tomar la ecuación ① y multiplicarla por −1.

Luego se suma la ecuación ① con la ecuación ②'.

$$\begin{array}{rl} \cancel{x} + 4y = 4 & ① \\ +)\ \cancel{-x} + \ \ y = 6 & ②' \\ \hline 5y = 10 & \\ y = 2 & \end{array}$$

La simbología +) significa que las ecuaciones se están sumando. Recuerde que se suman los términos semejantes.

Sustituya $y = 2$ en ① para encontrar el valor de x.

$$\begin{aligned} x + 4y &= 4 \\ x + 4(2) &= 4 \quad \text{... cuando } y = 2 \\ x + 8 &= 4 \\ x &= 4 - 8 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Se puede sustituir el valor encontrado de y en cualquiera de las dos ecuaciones.

Respuesta: La solución del sistema es $x = -4$, $y = 2$.

Ejercicio **2.6** Resuelva usando el método de eliminación.

a) $\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = -12 \\ x - y = 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -3x + 2y = -7 \\ 10x + 2y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 7x - 2y = 10 \\ 2x - 2y = 20 \end{cases}$

22

Unidad 2 - Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

2. Resolver *Ejercicio* **2.6** *(25 min)*

Solución

a) $x = 2$, $y = 1$

b) $x = 2$, $y = -7$

c) $x = 1$, $y = -2$

d) $x = -2$, $y = -12$

Unidad 2: **Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables**

Lección 2: (6/14) Sistema de dos ecuaciones de primer grado

Sección 2: Métodos de eliminación para resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Objetivo: Resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado utilizando el método de eliminación (los coeficientes de x son distintos o los de y).

Método de eliminación igualando coeficientes de x o de y

Hay sistemas donde una de las ecuaciones se debe multiplicar por un número entero (negativo o positivo) diferente de 1 para poder eliminar una de las variables, tal como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.10

Resuelva: $\begin{cases} 3x + 5y = 7 & ① \\ 2x - y = -4 & ② \end{cases}$

Solución:

Puesto que no se puede eliminar directamente la variable x, ni tampoco la variable y, se debe multiplicar una de las ecuaciones por un número entero diferente de 1 para eliminar una de las variables.

Convenientemente se multiplica la ecuación ② por 5 positivo, aprovechando el hecho de que el coeficiente de la variable y en la ecuación ② es -1, de esta forma $+5$ y -5 son opuestos y al sumarse $+5y$ y $-5y$ se eliminarían.

$$5(2x - y = -4)$$
$$10x - 5y = -20 \quad ②'$$

Luego se suma la ecuación ① con la ecuación ②' resultante.

$$\begin{array}{rl} 3x + \cancel{5y} = 7 & ① \\ +)\ 10x - \cancel{5y} = -20 & ②' \\ \hline 13x \quad = -13 & \\ x = -1 & \end{array}$$

Sustituya $x = -1$ en ① para encontrar el valor de la variable y.

$$3x + 5y = 7$$
$$3(-1) + 5y = 7 \qquad \text{... cuando } x \text{ es } = -1$$
$$-3 + 5y = 7$$
$$5y = 10$$
$$y = 2$$

Respuesta: La solución del sistema es $x = -1$, $y = 2$.

Ejercicio 2.7 Resuelva usando el método de eliminación.

a) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 5x + 2y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 5y = 17 \\ 2x - y = -6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 5y = -10 \\ 2x - 4y = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x - 2y = 14 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$

23

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Indicador de logro

Resuelva utilizando el método de eliminación el siguiente sistema:

$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 5x + 2y = 8 \end{cases}$

1. **Resolver el sistema utilizando el método de eliminación.** **Ejemplo 2.10**
   (20 min)

* En el sistema
  $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$
  ¿qué variable es más fácil de eliminar? ¿Por qué?
* Concluir que los términos que contienen la variable y tienen diferentes los coeficientes pero con el signo opuesto y que se puede buscar un número adecuado para multiplicar y eliminar la variable y.
* ¿Por qué número se debe multiplicar la segunda ecuación para eliminar la variable y?
* Concluir que se debe multiplicar la segunda ecuación por positivo 5 para poder eliminar la variable y y encontrar el valor de x.
* Concluir que una vez que se ha encontrado el número adecuado para multiplicar, el procedimiento es el mismo que el aplicado anteriormente.
* Concluir que la solución del sistema es $x = -1$, $y = 2$.
* Hacer que los estudiantes reflexionen en la diferencia entre este sistema y los de las clases anteriores.

2. **Resolver** **Ejercicio 2.7**
   (25 min)

Solución

a) $x = 2$, $y = -1$
b) $x = -1$, $y = 4$
c) $x = 5$, $y = 3$
d) $x = 2$, $y = -2$

Indicador de logro

Resuelva utilizando el método de eliminación el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ -3x + 5y = 7 \end{cases}$$

1. Resolver el sistema utilizando el método de eliminación. Ejemplo 2.11

(20 min)

* En el sistema

$$\begin{cases} 3x + 7y = -5 \\ -5x + 2y = -19 \end{cases}$$

¿qué variable es más fácil de eliminar? ¿Por qué?

* Concluir que se elige eliminar la variable x porque aunque sus coeficientes tienen distinto valor absoluto, los signos son opuestos y al buscar el número por el cual multiplicar este sería positivo.
* ¿Por qué número se debe multiplicar la primera ecuación para eliminar la variable x?, ¿y la segunda ecuación?
* Concluir que se debe multiplicar la primera ecuación por 5 y la segunda por 3.
* Seguir resolviendo el sistema en forma similar a los anteriores.
* Concluir que la solución del sistema es $x = 3$, $y = -2$.
* Hacer que los estudiantes reflexionen en la diferencia entre este sistema y los de las clases anteriores para que puedan establecer que procedimiento seguir para encontrar la solución.

2. Resolver Ejercicio 2.8

(25 min)

Solución

a) $x = -2$, $y = 1$

b) $x = 2$, $y = -1$

c) $x = 2$, $y = -1$

d) $x = 1$, $y = 2$

Unidad 2: Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Lección 2: (7/14) Sistema de dos ecuaciones de primer grado

Sección 2: Métodos de eliminación para resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Objetivo: Resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado utilizando el método de eliminación (los coeficientes de x son distintos (los coeficientes de x son distintos o los de y).

Método de eliminación

En el Ejemplo 2.10, fue suficiente multiplicar una de las ecuaciones por un número entero diferente a 1 para poder eliminar una de las variables. Sin embargo, en otros sistemas, uno de los valores absolutos de los coeficientes de la variable x o de la variable y no son múltiplos o divisores de otro y es necesario buscar la forma de que ambos tengan el mismo valor absoluto y diferente signo.

Ejemplo 2.11

Resuelva: $\begin{cases} 3x + 7y = -5 & (1) \\ -5x + 2y = -19 & (2) \end{cases}$

Solución:

Se elige eliminar la variable x, ya que aunque sus coeficientes tienen distinto valor absoluto, sí tienen signos opuestos, y al buscar eliminarla, la multiplicación se haría por números enteros positivos.

La ecuación (1) se multiplica por 5 y la ecuación (2) por 3.

$5(3x + 7y = -5)$ $\quad$ $3(-5x + 2y = -19)$

$15x + 35y = -25$ (1)' $\quad$ $-15x + 6y = -57$ (2)'

Luego se suman las ecuaciones resultantes (1)' y (2)'

$$\begin{array}{rl} \cancel{15x} + 35y = -25 & (1)' \\ +)\ \cancel{-15x} + 6y = -57 & (2)' \\ \hline 41y = -82 & \\ y = -2 & \end{array}$$

Los coeficientes de la variable x quedan con signos opuestos y con el mismo valor absoluto: 15 y − 15.

Sustituya $y = -2$ en (1)

$$\begin{aligned} 3x + 7y &= -5 \\ 3x + 7(-2) &= -5 \quad \text{... cuando } y = -2 \\ 3x - 14 &= -5 \\ 3x &= -5 + 14 \\ 3x &= 9 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Respuesta: La solución del sistema es $x = 3$, $y = -2$.

Ejercicio 2.8 Resuelva usando el método de eliminación.

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x - 2y = -8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -3x + 7y = -13 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 4y = 18 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ -3x + 5y = 7 \end{cases}$

24

Unidad 2 - Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Unidad 2: Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Lección 2: (8/14) Sistema de dos ecuaciones de primer grado

Sección 2: Métodos de eliminación para resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Objetivo: Resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado utilizando el método de eliminación (los coeficientes de x son distintos o los de y).

Indicador de logro

Resuelva utilizando el método de eliminación el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 17 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$$

Método de eliminación

A diferencia del Ejemplo 2.11, además de que los coeficientes de ambas variables no tienen los mismos valores absolutos, tampoco tienen signos opuestos, por lo que es necesario que los números enteros por los cuales se multipliquen tengan signos contrarios.

Ejemplo 2.12

Resuelva: $\begin{cases} 9x - 2y = 11 & ① \\ 4x - 5y = 9 & ② \end{cases}$

Solución:

Por tener coeficientes con valores pequeños, se eliminará la variable y y uno de los números que multiplicará a las ecuaciones será negativo.

Para eliminar la variable y, se multiplica la ecuación ① por 5 y la ecuación ② por −2.

$5(9x - 2y = 11)$ $\qquad$ $-2(4x - 5y = 9)$

$45x - 10y = 55$ ①' $\qquad$ $-8x + 10y = -18$ ②'

Luego se suman las ecuaciones resultantes ①' y ②'

$$\begin{array}{rl} & 45x - \cancel{10y} = 55 \\ +) & -8x + \cancel{10y} = -18 \\ \hline & 37x \qquad = 37 \\ & x = 1 \end{array}$$

Sustituya $x = 1$ en ②

$4x - 5y = 9$

$4(1) - 5y = 9$ $\qquad$ ... cuando $y = -2$

$4 - 5y = 9$

$-5y = 9 - 4$

$-5y = 5$

$y = -1$

Respuesta: La solución del sistema es $x = 1$, $y = -1$.

Ejercicio 2.9 Resuelva usando el método de eliminación. Elimine la variable y.

a) $\begin{cases} 5x + 3y = -7 \\ 7x + 4y = -8 \end{cases}$ $\qquad$ b) $\begin{cases} 5x + 2y = 17 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$

Para todos los sistemas resueltos anteriormente, es buena idea sustituir ambos valores de x y y en cada una de las ecuaciones del sistema original para comprobar que el cálculo es correcto.

25

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

1. **Resolver el sistema utilizando el método de eliminación.** Ejemplo 2.12
   (20 min)

* En el sistema

$$\begin{cases} 9x - 2y = 11 \\ 4x - 5y = 9 \end{cases}$$

¿qué variable es más fácil de eliminar? ¿Por qué?

* Concluir que se elige eliminar la variable y porque los valores de los coeficientes son pequeños.
* ¿Por qué número se debe multiplicar la primera ecuación para eliminar la variable y?, ¿y la segunda ecuación?
* Concluir que se debe multiplicar la primera ecuación por 5 y la segunda por -2.
* Seguir resolviendo el sistema en forma similar a los anteriores.
* Concluir que la solución del sistema es $x = 1$, $y = -1$.
* Hacer que los estudiantes reflexionen en la diferencia entre este sistema y los de las clases anteriores para que puedan establecer que procedimiento seguir para encontrar la solución.

2. **Resolver** Ejercicio 2.9
   (25 min)

Solución

a) $x = 4$, $y = -9$

b) $x = 3$, $y = 1$

Indicador de logro

Resuelva utilizando el método de sustitución el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = -8 \\ y = 3x \end{cases}$$

1. Resolver el problema analizando el dibujo.

Ejemplo **2.13**

(10 min)

* Hacer preguntas para comprobar la comprensión del problema.
* Hacer una representación del problema dibujando las naranjas y las manzanas junto con sus precios totales.
* Analizando el dibujo, determinar qué se puede hacer para encontrar el precio de cada una de las frutas.
* Concluir que se puede sustituir el valor de la manzana en la primera representación del dibujo para concluir que 3 naranjas valen 15 lempiras y deducir que una naranja vale 5 lempiras.
* De la segunda representación del dibujo sustituyendo el valor de la naranja concluir que la manzana vale 9 lempiras.
* Concluir que una manzana cuesta 9 lempiras y que una naranja cuesta 5 lempiras.

Unidad 2: Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Lección 2: (9/14) Sistema de dos ecuaciones de primer grado

Sección 3: Método de sustitución para resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Objetivo: Resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado utilizando el método de sustitución (Con coeficiente igual a 1 en la variable a sustituir).

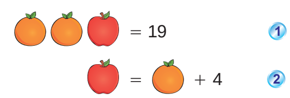
Sección 3: Método de sustitución para resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Método de sustitución sin coeficiente en la variable a sustituir

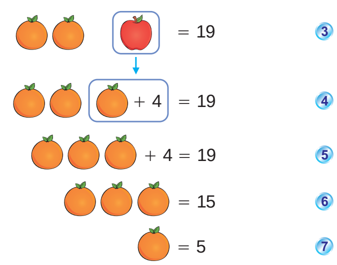
Ejemplo **2.13**

En un supermercado: 2 naranjas y 1 manzana valen 19 lempiras y 1 manzana es 4 lempiras más cara que 1 naranja. ¿Cuál es el precio de cada manzana y de cada naranja?

Solución:

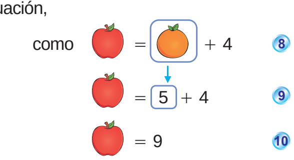


Sustituya el valor de la manzana en la primera ecuación.



Luego, una naranja vale 5 lempiras.

De la segunda ecuación,



Respuesta: Una manzana vale 9 lempiras.
Una naranja vale 5 lempiras.

26

Unidad 2 - Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

continúa en la siguiente página...

Unidad 2: **Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables**

Lección 2: (9/14) Sistema de dos ecuaciones de primer grado

Sección 3: Método de sustitución para resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Objetivo: Resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado utilizando el método de sustitución (Con coeficiente igual a 1 en la variable a sustituir).

Ejemplo 2.14

Traduzca a lenguaje algebraico el Ejemplo 2.13 y resuelva el sistema.

Solución:

Traducido a lenguaje algebraico, el sistema del Ejemplo 2.13 se expresaría como:
x: precio de una naranja
y: precio de una manzana

$$\begin{cases} 2x + y = 19 & ① \\ y = x + 4 & ② \end{cases}$$

Sustituya $y = x + 4$ en la ecuación ①.

$$2x + \boxed{y} = 19 \quad ③$$
$$2x + \boxed{x + 4} = 19 \quad ④$$
$$3x + 4 = 19 \quad ⑤$$
$$3x = 15 \quad ⑥$$
$$x = 5 \quad ⑦$$

$3x + 4 = 19$ es la nueva ecuación con solo una variable.

Para encontrar el valor de y sustituya $x = 5$ en la ecuación ②.

$$y = \boxed{x} + 4 \quad ⑧$$
$$= \boxed{5} + 4 \quad ⑨ \quad \text{... cuando } x = 5$$
$$= 9 \quad ⑩$$

Respuesta: La solución del sistema es $x = 5$, $y = 9$.

El **método de sustitución** consiste en sustituir el valor de la variable despejada en la otra ecuación, para que en la nueva ecuación solo haya una variable.

Ejercicio 2.10 Resuelva usando el método de sustitución.

a) $\begin{cases} x + y = -8 \\ y = 3x \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 7 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$

27

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Indicador de logro

Resuelva utilizando el método de eliminación el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = -8 \\ y = 3x \end{cases}$$

2. Traducir al lenguaje algebraico el problema y los pasos de su solución de la actividad anterior para deducir el método de sustitución. Ejemplo 2.14
(10 min)

* Asignar variables a los precios de cada naranja y de cada manzana.

  x: precio de una naranja

  y: precio de una manzana

* Traducir a lenguaje algebraico los dos primeros dibujos de la actividad anterior para armar el sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables:

  $$\begin{cases} 2x + y = 19 \\ y = x + 4 \end{cases}$$

* Traducir a lenguaje algebraico los demás pasos de la representación del dibujo anterior y concluir que en los pasos 3 y 4 lo que se hizo es sustituir el valor $x + 4$ en el lugar de y.
* Encontrar el valor de y sustituyendo el valor de x.
* Concluir que la solución del sistema es: $x = 5$, $y = 9$.

3. Definir el método de sustitución para resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado.
(5 min)

* Leer el resumen del LE

4. Resolver Ejercicio 2.10
(20 min)

Solución

a) $x = -2$, $y = -6$

b) $x = 3$, $y = 4$

Indicador de logro

Resuelva utilizando el método de eliminación el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ 3x + 2y = 16 \end{cases}$$

Unidad 2: **Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables**

Lección 2: (10/14) Sistema de dos ecuaciones de primer grado

Sección 3: Método de sustitución para resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Objetivo: Resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado utilizando el método de sustitución (Con coeficiente distinto de 1 en la variable a sustituir).

1. Resolver el sistema utilizando el método de sustitución. *Ejemplo* **2.15**

(15 min)

* Dado el sistema

$$\begin{cases} -5x + y = 9 \\ x = 3y + 1 \end{cases}$$

hay que sustituir la variable $x = 3y + 1$ en la ecuación $-5x + y = 9$. Al sustituir la variable x ¿qué está haciendo el número -5?

* Concluir que se aplica la propiedad distributiva.
* Al sustituir la variable x en la primera ecuación se encuentre el valor de y, luego este se sustituye en la otra ecuación para encontrar el valor de x.
* Concluir que en el método de sustitución, al sustituir el valor de la variable despejada en la otra ecuación se encuentra el valor de la otra variable y después este valor se sustituye para encontrar el valor de la otra variable.
* Concluir que el último paso del método de sustitución es el mismo del método de eliminación.
* Concluir que la solución del sistema es $x = -2$, $y = -1$.

2. Resolver *Ejercicio* **2.11**

(30 min)

Solución

a) $x = 2$, $y = 1$

b) $x = 2$, $y = -3$

c) $x = -2$, $y = -7$

d) $x = 4$, $y = 2$

Método de sustitución con coeficiente en la variable a sustituir

Ejemplo **2.15**

Resuelva: $\begin{cases} -5x + y = 9 & ① \\ x = 3y + 1 & ② \end{cases}$

Solución

Paso 1: Sustituya $x = 3y + 1$ en ①

$$\begin{aligned} -5x + y &= 9 \\ -5(3y + 1) + y &= 9 \\ -15y - 5 + y &= 9 \\ -14y &= 9 + 5 \\ -14y &= 14 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Observe que hay un coeficiente en la variable a sustituir, en este caso −5. Se aplica la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned} -5(3y + 1) &= -5 \times 3y + (-5) \times 1 \\ &= -15y - 5 \end{aligned}$$

Paso 2: Use la ecuación ② y el valor de $y = -1$ para obtener el valor de x.

$$\begin{aligned} x &= 3y + 1 \\ &= 3(-1) + 1 \quad \text{... cuando } y = -1 \\ &= -3 + 1 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Respuesta: La solución del sistema es $x = -2$, $y = -1$.

Ejercicio **2.11** Resuelva usando el método de sustitución, observe que la variable a sustituir tiene coeficiente.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x = 3y - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ x = -2y - 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ x - 2y = 12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = x - 2 \\ 3x + 2y = 16 \end{cases}$

Nota: De ahora en adelante puede utilizar cualquier método: sustitución o eliminación.

28 *Unidad 2 - Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables*

Unidad 2: **Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables**

Lección 2: (11/14) Sistema de dos ecuaciones de primer grado

Sección 4: Tipos de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Objetivo: Resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado donde una de las ecuaciones tiene paréntesis.

Sección 4: Tipos de sistemas de ecuaciones de primer grado en dos variables

Eliminación de paréntesis en una ecuación

Ejemplo 2.16 Resuelva: $\begin{cases} 4x + 7y = 39 & ① \\ 2(x + y) = -3y + 15 & ② \end{cases}$

Solución:
En este caso elimine el paréntesis aplicando la propiedad distributiva y simplifique.

Paso 1: La ecuación ② se puede expresar como:

$$\begin{aligned} 2(x + y) &= -3y + 15 \\ 2x + 2y &= -3y + 15 \\ 2x + 2y + 3y &= 15 \\ 2x + 5y &= 15 \quad ②' \end{aligned}$$

Paso 2: El sistema queda de la siguiente manera: $\begin{cases} 4x + 7y = 39 & ① \\ 2x + 5y = 15 & ②' \end{cases}$

Siguiendo el procedimiento la ecuación ②' se multiplica por −2.

$$\begin{aligned} -2(2x + 5y &= 15) \\ -4x - 10y &= -30 \quad ②'' \end{aligned}$$

②'' se lee "2 biprima".

Luego, se suma la ecuación ① con la ecuación ②'' resultante.

$$\begin{array}{rl} \cancel{4}x + 7y = 39 & ① \\ +)\ -\cancel{4}x - 10y = -30 & ②'' \\ \hline -3y = 9 & \\ y = -3 & \end{array}$$

Sustituya $y = -3$ en ①.

$$\begin{aligned} 4x + 7y &= 39 \\ 4x + 7(-3) &= 39 \quad \text{... cuando } y = -3 \\ 4x - 21 &= 39 \\ 4x &= 60 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Respuesta: La solución del sistema es $x = 15$, $y = -3$.

Pasos para resolver sistemas con paréntesis en una o más ecuaciones
1. Se eliminan los paréntesis usando la propiedad distributiva.
2. Se reducen términos semejantes.
3. Se reescriben las ecuaciones de manera que el sistema pueda resolverse por los métodos de eliminación o sustitución.

Ejercicio 2.12 Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones eliminando paréntesis.

a) $\begin{cases} 3(x + y) = 2x - 1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + y = 10 \\ 5x - 2(3x - y) = -7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 3x - 4(x + y) = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3(x + y) = 2x - 1 \\ x + y = -5 \end{cases}$

Indicador de logro

Resuelva el siguiente sistema:
$\begin{cases} 3(x + y) = 2x - 1 \\ x + y = -5 \end{cases}$

1. Resolver el sistema eliminando los paréntesis.

Ejemplo 2.16

(15 min)

* Dado el sistema:
$\begin{cases} 4x + 7y = 39 \\ 2(x + y) = -3y + 15 \end{cases}$
¿qué diferencia existe entre este sistema y los estudiados anteriormente?
* ¿Cómo se pueden eliminar los paréntesis?
* Concluir que se aplica la propiedad distributiva y después se reducen los términos semejantes.
* Concluir que la ecuación $2(x + y) = -3y + 15$ se transforma en $2x + 5y = 15$ y que el sistema también se transforma en:
$\begin{cases} 4x + 7y = 39 \\ 2x + 5y = 15 \end{cases}$
* Una vez eliminado los paréntesis y el sistema transformado se aplica cualquiera de los dos métodos (eliminación y sustitución) para resolver el sistema.
* Concluir que la solución del sistema es $x = 15$, $y = -3$.

2. Concluir con los pasos a seguir al resolver sistemas con paréntesis.

(5 min)

* Leer el resumen del LE

3. Resolver Ejercicio 2.12

(25 min)

Solución
a) $x = 5$, $y = -2$
b) $x = 3$, $y = -2$
c) $x = 1$, $y = -2$
d) $x = -7$, $y = 2$

Indicador de logro

Resuelva el siguiente sistema

$$\begin{cases} 2(x + y) - 3y = -1 \\ 4(x - y) + 3y = -3 \end{cases}$$

1. Resolver el sistema eliminando los paréntesis.

Ejemplo **2.17**

(15 min)

* ¿Qué hacemos para resolver el sistema?
* Concluir que hay que transformar cada una de las ecuaciones aplicando la propiedad distributiva y reduciendo los términos semejantes.
* Una vez transformadas las ecuaciones escribir el nuevo sistema y resolverlo aplicando cualquiera de los métodos.
* Concluir que la solución del sistema es $x = -1$, $y = -2$.

2. Resolver *Ejercicio* **2.13**

(30 min)

Solución

a) $x = 5$, $y = 1$

b) $x = 4$, $y = 3$

c) $x = 2$, $y = 3$

d) $x = -1$, $y = -1$

Unidad 2: Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Lección 2: (12/14) Sistema de dos ecuaciones de primer grado

Sección 4: Tipos de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Objetivo: Resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado donde las dos ecuaciones tienen paréntesis.

Eliminación de paréntesis en ambas ecuaciones

Ejemplo **2.17**

Resuelva: $\begin{cases} 2x - (x + 7y) = 13 & ① \\ 2(x + 3y) - 5y = -4 & ② \end{cases}$

Solución:

Paso 1

La ecuación ① se puede expresar como:

$$\begin{aligned} 2x - (x + 7y) &= 13 \\ 2x - x - 7y &= 13 \\ x - 7y &= 13 \quad ①' \end{aligned}$$

Paso 2

La ecuación ② se puede expresar como:

$$\begin{aligned} 2(x + 3y) - 5y &= -4 \\ 2x + 6y - 5y &= -4 \\ 2x + y &= -4 \quad ②' \end{aligned}$$

Paso 3

El sistema es equivalente a: $\begin{cases} x - 7y = 13 & ①' \\ 2x + y = -4 & ②' \end{cases}$

La ecuación ②' se multiplica por 7 para poder eliminar la variable y.

$$\begin{aligned} 7(2x + y &= -4) \\ 14x + 7y &= -28 \quad ②'' \end{aligned}$$

Luego se suma la ecuación ①' y la ecuación ②'' resultante.

$$\begin{array}{rl} x - \cancel{7y} = 13 & ①' \\ +)\ 14x + \cancel{7y} = -28 & ②'' \\ \hline 15x \quad = -15 & \\ x = -1 & \end{array}$$

Sustituya $x = -1$ en ②'

$$\begin{aligned} 2x + y &= -4 \\ 2(-1) + y &= -4 \quad \text{... cuando } x = -1 \\ -2 + y &= -4 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Respuesta: La solución del sistema es $x = -1$, $y = -2$.

Ejercicio **2.13** Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 3(x - 2) - 2y = 7 \\ 2x - 4(y - 3) = 18 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5(x - 2) - 3y = 1 \\ 4x - 5(y + 1) = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2(y - 6) + x = -4 \\ 3(5y - 4) + 4x = 41 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2(x + y) - 3y = -1 \\ 4(x - y) + 3y = -3 \end{cases}$

30

Unidad 2 - Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Unidad 2: Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Lección 2: (13/14) Sistema de dos ecuaciones de primer grado

Sección 4: Tipos de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Objetivo: Resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado convirtiendo los coeficientes fraccionarios en números enteros.

Conversión de coeficientes fraccionarios a números enteros

En los sistemas de ecuaciones de primer grado en dos variables, se presentan casos donde los coeficientes de las variables son números fraccionarios, para resolver el sistema se convierten los coeficientes fraccionarios a números enteros.

Ejemplo 2.18 Resuelva: $\begin{cases} x + y = 25 & ① \\ \frac{1}{4}x + y = 10 & ② \end{cases}$

Solución:

Convierta el coeficiente fraccionario $\frac{1}{4}$ a un número entero multiplicando la ecuación ② por 4.

$$4\left(\frac{1}{4}x + y = 10\right)$$
$$x + 4y = 40 \quad ②'$$

$\frac{1}{4} \times \boxed{4} = 1$

$\frac{1}{a} \times \boxed{a} = 1,\ a \neq 0$

El sistema queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x + y = 25 & ① \\ x + 4y = 40 & ②' \end{cases}$$

Se multiplica la ecuación ① por -1

$$-1(x + y = 25)$$
$$-x - y = -25 \quad ①'$$

También se puede multiplicar la ecuación ② por -1.

Luego se suman las ecuaciones ①' y ②' resultantes.

$$\begin{array}{rl} -\cancel{x} - y = -25 & ①' \\ +)\ \cancel{x} + 4y = 40 & ②' \\ \hline 3y = 15 & \\ y = 5 & \end{array}$$

Sustituya $y = 5$ en ① para encontrar el valor de la variable x.

$$x + y = 25$$
$$x + 5 = 25 \quad \text{... cuando } y = 5$$
$$x = 20$$

Respuesta: La solución del sistema es $x = 20$, $y = 5$.

Para convertir los coeficientes fraccionarios a números enteros, se multiplica cada miembro de la ecuación por el número que convierte la fracción a número entero, para luego resolver el sistema resultante.

Ejercicio 2.14 Resuelva los siguientes sistemas convirtiendo los coeficientes fraccionarios a números enteros.

a) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + 2y = 5 \\ x - 3y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = 1 \\ x - 5y = 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y = -4 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = -5 \end{cases}$

31

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Indicador de logro

Resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$$

1. Resolver el sistema convirtiendo los coeficientes fraccionarios en números enteros. Ejemplo 2.18

(15 min)

* ¿Qué diferencia existe entre este sistema y los estudiados anteriormente?
* Si queremos evitar trabajar con las fracciones ¿qué debemos hacer?, ¿Por cuál número debemos multiplicar la segunda ecuación para eliminar los números del denominador?
* Concluir que si se quiere evitar trabajar con las fracciones hay que multiplicar toda la ecuación por el mcm de los denominadores.
* Al multiplicar por 4 la ecuación $\frac{1}{4}x + y = 10$ ¿cómo queda transformada?
* Con las ecuaciones transformadas el sistema queda como:

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ x + 4y = 40 \end{cases}$$

* Resolver el sistema aplicando cualquiera de los métodos.
* Concluir que la solución del sistema es $x = 20$, $y = 5$.

2. Resolver Ejercicio 2.14

(30 min)

Solución

a) $x = 3$, $y = 2$
b) $x = 4$, $y = -1$
c) $x = -1$, $y = 4$
d) $x = -8$, $y = 2$

Indicador de logro

Resuelva el siguiente sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ 0.2x - 0.5y = 3 \end{cases}$$

1. Resolver el sistema convirtiendo los coeficientes decimales en números enteros. *Ejemplo* **2.19**

(15 min)

* ¿Qué diferencia existe entre este sistema y los estudiados anteriormente?
* Si queremos evitar trabajar con los números decimales ¿qué debemos hacer?, ¿Por cuál número debemos multiplicar la primera ecuación para eliminar los números decimales?
* Concluir que si se quiere evitar trabajar con los números decimales hay que multiplicar toda la ecuación por la unidad seguida de ceros según la cantidad de cifras decimales que tengan los números.
* Al multiplicar por 10 la ecuación $0.5x + y = 5$ ¿cómo queda transformada?
* Con las ecuaciones transformadas el sistema queda como

$$\begin{cases} 5x + 10y = 50 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

* Resolver el sistema aplicando cualquiera de los métodos.
* Concluir que la solución del sistema es $x = 6$, $y = 2$.

2. Resolver *Ejercicio* **2.15**

(30 min)

Solución

a) $x = -1$, $y = 2$

b) $x = 10$, $y = -2$

c) $x = 5$, $y = -4$

d) $x = 1$, $y = -9$

Unidad 2: **Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables**

Lección 2: (14/14) Sistema de dos ecuaciones de primer grado

Sección 4: Tipos de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Objetivo: Resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado convirtiendo los coeficientes decimales en números enteros.

Conversión de coeficientes decimales a números enteros

En los sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables, también se presentan casos donde los coeficientes de las variables son números decimales, para resolver el sistema se convierten los coeficientes decimales a números enteros.

Ejemplo **2.19** Resuelva: $\begin{cases} 0.5x + y = 5 & ① \\ x + y = 8 & ② \end{cases}$

Solución:

Convierta el coeficiente decimal a número entero, multiplicando la ecuación ① por 10.

$10(0.5x + y = 5)$

$5x + 10y = 50 \quad ①'$

$0.5 \times 10 = 5$

Se mueve el punto decimal un lugar a la derecha.

El sistema queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 5x + 10y = 50 & ①' \\ x + y = 8 & ② \end{cases}$$

Se multiplica la ecuación ② por -5

$-5(x + y = 8)$

$-5x - 5y = -40 \quad ②'$

Luego se suman las ecuaciones resultantes ①' y ②'

$$\begin{array}{rl} \cancel{5x} + 10y = 50 & ①' \\ +)\ -\cancel{5x} - 5y = -40 & ②' \\ \hline 5y = 10 & \\ y = 2 & \end{array}$$

Sustituya $y = 2$ en ② para encontrar el valor de x.

$x + y = 8$

$x + 2 = 8$ ... cuando $y = 2$

$x = 6$

Respuesta: La solución del sistema es $x = 6$, $y = 2$.

Para convertir los coeficientes decimales a números enteros, se multiplica por la unidad seguida de ceros según las cifras decimales que tenga el número.

Ejercicio **2.15** Resuelva los siguientes sistemas convirtiendo los coeficientes decimales a números enteros.

a) $\begin{cases} 0.3x + 0.4y = 0.5 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ 0.2x - 0.5y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 0.2x + 0.3y = -0.2 \\ 5x + 2y = 17 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 0.4x - 0.1y = 1.3 \\ 12x + y = 3 \end{cases}$

Unidad 2: Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Lección 3: (1/3) Aplicación de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Sección 1: Situaciones que involucran dinero

Objetivo: Resolver problemas utilizando los sistemas de dos ecuaciones de primer grado.

Lección 3: Aplicación de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Sección 1: Situaciones que involucran dinero

Ejemplo 3.1

En una tienda de ropa donde todo estaba en promoción, Mónica compró 2 pantalones y 3 blusas por 350 lempiras, mientras que Emilia por 2 pantalones y 5 blusas pagó 450 lempiras. ¿Cuál era el precio de cada prenda?

Solución:

1) Mónica compró 2 pantalones y 3 blusas por 350 lempiras.
Emilia compró 2 pantalones y 5 blusas por 450 lempiras.

2) x: precio de un pantalón
y: precio de una blusa

3) Sistema: $\begin{cases} 2x + 3y = 350 & ① \\ 2x + 5y = 450 & ② \end{cases}$

Resuelva usando el método de eliminación tal como se estudió en el Ejemplo 2.9.

La ecuación ② se multiplica por −1

$$-1(2x + 5y = 450)$$
$$-2x - 5y = -450 \quad ②'$$

Se suma la ecuación ① y la ecuación ②' resultante.

$$\begin{array}{rl} & \cancel{2x} + 3y = 350 \\ +) & \cancel{-2x} - 5y = -450 \\ \hline & -2y = -100 \\ & y = 50 \end{array}$$

Sustituya $y = 50$ en ①

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 350 \\ 2x + 3(50) &= 350 \quad \text{... cuando } y = 50 \\ 2x + 150 &= 350 \\ 2x &= 200 \\ x &= 100 \end{aligned}$$

Respuesta: El precio de un pantalón era de 100 lempiras.
El precio de una blusa era de 50 lempiras.

Ejercicio 3.1 Un grupo de amigos pagó 120 lempiras por 4 empanadas y 6 refrescos. El día anterior habían cancelado 150 lempiras por 4 empanadas y 9 refrescos. ¿Cuál es el precio de cada refresco?

Indicador de logro

Resuelva el siguiente problema:

Un grupo de amigos pagó 120 lempiras por 4 empanadas y 6 refrescos. El día anterior habían cancelado 150 lempiras por 4 empanadas y 9 refrescos. ¿Cuál es el precio de cada refresco?

1. Resolver el problema utilizando un sistema de dos ecuaciones. Ejemplo 3.1
(20 min)

* Hacer preguntas para lograr la comprensión del problema (preguntas sobre los datos y lo que se pide encontrar).
* ¿A qué cantidades se les debe asignar variables?
  ¿Cuáles ecuaciones se forman?
  ¿Cuál es el sistema que se forma?
* Concluir que el sistema que se forma es
  $\begin{cases} 2x + 3y = 350 \\ 2x + 5y = 450 \end{cases}$
* Resolver el problema aplicando cualquiera de los dos métodos.
* Comprobar que la solución del sistema es $x = 100$, $y = 50$.
* Confirmar la respuesta del problema.

2. Resolver Ejercicio 3.1
(25 min)

Solución

x: precio de una empanada
y: precio de una refresco

$$\begin{cases} 4x + 6y = 120 \\ 4x + 9y = 150 \end{cases}$$

$x = 15$, $y = 10$

Respuesta: Cada refresco cuesta 10 lempiras.

Indicador de logro

Resuelva el siguiente problema:

En la tienda estudiantil, Marcos con 32 lempiras compró 4 lápices y 2 cuadernos y Fernando con 39 lempiras compró 3 lápices y 3 cuadernos. ¿Cuánto vale cada lápiz y cada cuaderno?

1. Resolver el problema utilizando un sistema de dos ecuaciones. *Ejemplo* **3.2**

(20 min)

* Hacer preguntas para lograr la comprensión del problema (preguntas sobre los datos y lo que se pide encontrar).
* ¿A qué cantidades se les debe asignar variables?

  ¿Cuáles ecuaciones se forman?

  ¿Cuál es el sistema que se forma?
* Concluir que el sistema que se forma es

$$\begin{cases} 3x + 5y = 105 \\ 2x + 4y = 80 \end{cases}$$

* Resolver el problema aplicando cualquiera de los dos métodos.
* Comprobar que la solución del sistema es $x = 10$, $y = 15$.
* Confirmar la respuesta del problema.

2. Resolver *Ejercicio* **3.2**

(25 min)

Solución

x: precio de un lápiz

y: precio de un cuaderno

$$\begin{cases} 4x + 2y = 32 \\ 3x + 3y = 39 \end{cases}$$

$x = 3$, $y = 10$

Respuesta: Un lápiz cuesta 3 lempiras y un cuaderno 10 lempiras.

Unidad 2: **Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables**

Lección 3: (2/3) Aplicación de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Sección 1: Situaciones que involucran dinero

Objetivo: Resolver problemas utilizando los sistemas de dos ecuaciones de primer grado.

Ejemplo **3.2**

Josué se compró 3 CDs y 5 DVDs gastando 105 lempiras, mientras Roxana gastó 80 lempiras por la compra de 2 CDs y 4 DVDs. ¿Cuál era el precio de un CD y cuál el de un DVD?

Solución

1) Josué compró 3CDs y 5 DVDs por 105 lempiras.
   Roxana compró 2CDs y 4 DVDs por 80 lempiras.

2) x: precio de un CD
   y: precio de un DVD

3) Sistema: $\begin{cases} 3x + 5y = 105 & ① \\ 2x + 4y = 80 & ② \end{cases}$

Resuelva usando el método de eliminación:

La ecuación ① se multiplica por −2

$-2(3x + 5y = 105)$

$-6x - 10y = -210$ ①'

La ecuación ② se multiplica por 3

$3(2x + 4y = 80)$

$6x + 12y = 240$ ②'

Luego se suman las ecuaciones resultantes ①' y ②'.

$$\begin{array}{rl} -\cancel{6x} - 10y = -210 & ①' \\ +)\ \cancel{6x} + 12y = 240 & ②' \\ \hline 2y = 30 & \\ y = 15 & \end{array}$$

Sustituya $y = 15$ en ①

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 105 \\ 3x + 5(15) &= 105 \quad \text{... cuando } y = 15 \\ 3x + 75 &= 105 \\ 3x &= 105 - 75 \\ 3x &= 30 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Respuesta: El precio de un CD era de 10 lempiras.
El precio de un DVD era de 15 lempiras.

Ejercicio **3.2** En la tienda estudiantil, Marcos con 32 lempiras compró 4 lápices y 2 cuadernos y Fernando con 39 lempiras compró 3 lápices y 3 cuadernos. ¿Cuánto vale cada lápiz? y ¿Cuánto vale cada cuaderno?

34

Unidad 2 - Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Unidad 2: Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Lección 3: (3/3) Aplicación de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Sección 2: Situaciones que involucran distancia y tiempo

Objetivo: Resolver problemas utilizando los sistemas de dos ecuaciones de primer grado.

Indicador de logro

Resuelva el siguiente problema:

Un bote para ir del punto A al punto B que dista 110 km se tarda 4 horas. En agua tranquila viaja a 25 km por hora y corriente abajo viaja a 30 km por hora. ¿Cuánto tiempo navega el bote en agua tranquila y cuánto tiempo corriente abajo?

Sección 2: *Situaciones que involucran distancia y tiempo*

Ejemplo 3.3

Un auto se tarda 12 horas cuando se traslada del punto A al punto B que dista 750 km. En carretera pavimentada corre a 80 km por hora y en carretera de tierra a 50 km por hora. ¿Cuánto tiempo recorre el auto en carretera pavimentada y cuánto tiempo en carretera de tierra?

Solución:

x: tiempo en carretera pavimentada
y: tiempo en carretera de tierra

1) Como el viaje tarda 12 horas.

$x + y = 12$

distancia recorrida = velocidad × tiempo

2) Se recorren 750 km en total, de los cuales x horas se recorren a 80 km por hora y y horas se recorren a 50 km por hora, se forma la ecuación:

$80x + 50y = 750$

3) Sistema:

$$\begin{cases} x + y = 12 & ① \\ 80x + 50y = 750 & ② \end{cases}$$

Este sistema se puede resolver por el método de eliminación.

La ecuación ① se multiplica por −50

$-50(x + y = 12)$

$-50x - 50y = -600$ ①'

Luego se suman la ecuación ①' resultante y la ecuación ②.

$$\begin{array}{rl} -50x - \cancel{50y} = -600 & ①' \\ +)\ 80x + \cancel{50y} = 750 & ② \\ \hline 30x \quad = 150 & \\ x = 5 & \end{array}$$

Sustituya $x = 5$ en ①

$x + y = 12$
$5 + y = 12$ ... cuando $x = 5$
$y = 7$

Respuesta: El auto recorre 5 horas en carretera pavimentada y 7 horas en carretera de tierra.

Ejercicio 3.3 Un bote para ir del punto A al punto B que dista 110 km se tarda 4 horas. En agua tranquila viaja a 25 km por hora y corriente abajo viaja a 30 km por hora. ¿Cuánto tiempo navega el bote en agua tranquila y cuánto tiempo corriente abajo?

35

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

---

1. Resolver el problema utilizando un sistema de dos ecuaciones. Ejemplo 3.3

(20 min)

* Hacer preguntas para lograr la comprensión del problema (preguntas sobre los datos y lo que se pide encontrar).

¿A qué cantidades se les debe asignar variables?

¿Qué ecuación se forma con el tiempo de 12 horas?

¿Cómo se forma la ecuación con los 750 km?

* Si 750 km representa la distancia ¿cómo podemos relacionar los datos 80 km por hora y 50 km por hora? ¿Qué fórmula podemos utilizar?

* Concluir que se puede utilizar la fórmula:

distancia recorrida = velocidad × tiempo

* Concluir que se forma el sistema

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 80x + 50y = 750 \end{cases}$$

* Resolver el sistema aplicando cualquiera de los dos métodos.

* Comprobar que la solución del sistema es $x = 5$, $y = 7$.

* Confirmar la respuesta del problema.

2. Resolver Ejercicio 3.3 *(25 min)*

Solución

x: número de horas en agua tranquila
y: número de horas corriente abajo

$$\begin{cases} 25x + 30y = 110 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$x = 2$, $y = 2$

Respuesta: 2 horas en agua tranquila y 2 horas corriente abajo

Unidad 2: ## Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

(1/2) Ejercicios de la unidad

Objetivo: Aplicar lo aprendido sobre los sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables.

1 Despejar una variable.
Solución

a) $b = \frac{a - 2}{3}$

b) $n = \frac{6m - 11}{7}$

c) $r = \frac{d - 1}{2}$

2 Resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado utilizando el método de eliminación.
Solución

a) $x = -1,\ y = 0$
b) $x = 8,\ y = -7$
c) $x = 5,\ y = -9$
d) $x = 2,\ y = 4$
e) $x = 1,\ y = 0$
f) $x = 2,\ y = -3$
g) $x = 3,\ y = 2$
h) $x = 1,\ y = 1$
i) $x = -1,\ y = 3$
j) $x = -2,\ y = 3$
k) $x = 3,\ y = -2$
l) $x = 2,\ y = -1$

3 Resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado utilizando el método de sustitución.
Solución

a) $x = 2,\ y = 10$
b) $x = -3,\ y = -4$
c) $x = 1,\ y = -2$
d) $x = 3,\ y = 1$
e) $x = -7,\ y = -3$
f) $x = -1,\ y = 2$

4 Resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado eliminando paréntesis.
Solución

a) $x = -10,\ y = -8$
b) $x = 7,\ y = -4$
c) $x = -1,\ y = -2$
d) $x = 4,\ y = 9$
e) $x = 2,\ y = 3$
f) $x = -1,\ y = -2$

Ejercicios

1 Despeje para la variable que se expresa entre corchetes.

a) $a = 2 + 3b$ [b] b) $6m - 7n = 11$ [n] c) $d = 1 + 2r$ [r]

2 Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método de eliminación.

a) $\begin{cases} 9x - 10y = -9 \\ 5x + 10y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -4x - 3y = -11 \\ -5x + 3y = -61 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -7x - 4y = 1 \\ 7x - 2y = 53 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ -x - 2y = -10 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ -x + y = -1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 5x - y = 13 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 5x - 2y = 3 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x - 8y = -25 \\ 3x + 4y = 9 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x + 7y = 17 \\ 5x + 4y = 2 \end{cases}$ k) $\begin{cases} 5x + 2y = 11 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$ l) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

3 Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método de sustitución.

a) $\begin{cases} 3x + y = 16 \\ y = 5x \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = y + 1 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = x - 3 \\ 5x + y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x - 2y = 13 \\ x = -3y + 6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = 5y + 8 \\ -7x + 8y = 25 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$

4 Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 2x - 5y = 20 \\ -3(x - y) + y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2(x - 3) + y = 4 \\ x + 4y = -9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x + y = -6 \\ 2x - 3(x - y) = -5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3(x + 2) = 2y \\ 2(y + 5) = 7x \end{cases}$ e) $\begin{cases} -2(2x - 7) = -3x + 4y \\ -(2y - 1) = -5x + 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + 5 = 2(y - 4x) \\ 10(y - x) = 11y - 12x \end{cases}$

36
Unidad 2 - Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

5 Resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado convirtiendo los coeficientes fraccionarios a números enteros.
Solución

a) $x = 0,\ y = -1$
b) $x = 2,\ y = 2$
c) $x = 3,\ y = 5$

Unidad 2: **Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables**

(2/2) Ejercicios de la unidad

Objetivo: Aplicar lo aprendido sobre los sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables.

5 Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones convirtiendo los coeficientes fraccionarios a números enteros.

a) $\begin{cases} x + y = -1 \\ \frac{1}{7}x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + \frac{1}{5}y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

6 Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones convirtiendo los coeficientes decimales a números enteros.

a) $\begin{cases} 0.3x + 0.4y = 0.5 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0.9x - 0.2y = 1.3 \\ x + y = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 1.2x - 0.7y = -1.3 \\ 4x - 5y = 9 \end{cases}$

7 Resuelva los siguientes problemas.

a) Un auto se traslada del punto A al punto B que dista 450 km y tarda 10 horas. Durante el trayecto corre a 60 km por hora en carretera pavimentada y a 30 km por hora en carretera de tierra. ¿Cuánto tiempo recorre el auto en carretera pavimentada y cuánto tiempo en carretera de tierra?

b) Raúl y Esteban fueron a una papelería a comprar un material que les encargaron para su clase de geometría. Esteban compró 4 hojas de papel milimetrado y 5 hojas de papel china y pagó 80 lempiras, mientras que Raúl pagó 39 lempiras por 3 hojas de papel milimetrado y 2 hojas de papel china. ¿Cuál era el precio de cada tipo de hoja?

c) Al cine a ver una película infantil fueron 22 personas entre adultos y niños. Para los adultos la entrada costó 40 lempiras y para los niños 20 lempiras. ¿Cuántos adultos y cuántos niños entraron, si entre todos pagaron 620 lempiras?

37

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

c) x: cantidad de adultos

y: cantidad de niños

$$\begin{cases} x + y = 22 \\ 40x + 20y = 620 \end{cases}$$

$x = 9$, $y = 13$

Respuesta: Entraron 9 adultos y 13 niños.

6 **Resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado convirtiendo los coeficientes decimales a números enteros.**

Solución

a) $x = -1$, $y = 2$

b) $x = 3$, $y = 7$

c) $x = -4$, $y = -5$

7 **Resolver problemas aplicando los sistemas de dos ecuaciones de primer grado.**

Solución

a) x: tiempo en carretera pavimentada

y: tiempo en carretera de tierra

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 60x + 30y = 450 \end{cases}$$

$x = 5$, $y = 5$

Respuesta: Recorre 5 horas en carretera pavimentada y 5 horas en carretera de tierra.

b) x: precio de una hoja de papel milimetrado

y: precio de una hoja de papel china

$$\begin{cases} 4x + 5y = 80 \\ 3x + 2y = 39 \end{cases}$$

$x = 5$, $y = 12$

Respuesta: El papel milimetrado cuesta 5 lempiras y el papel china 12 lempiras.

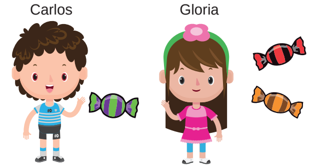
Unidad 2: Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

¿Cuántos confites tienen?

Un maestro tiene 20 confites y los reparte todos entre dos estudiantes, Gloria y Carlos. No deben sobrar confites.

El maestro no tiene un orden para repartir los confites, lo que si hace es que cada vez que le da confites a Gloria, le da 2 y dice "Si" y cada vez que le da a Carlos, le da 1 y también dice "Si".

Carlos Gloria



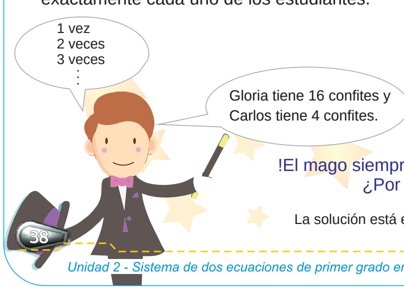
Ejemplo:
El maestro puede repartir todos los confites a Gloria (G) y a Carlos (C) en el siguiente orden.

	1 G →	2 C →	3 C →	4 G →	5 G →	6 C →	7 G →	8 G →	9 G →	10 G →	11 C →	12 G
Gloria												
Carlos												

El maestro dice "Si" cada vez. En este caso, el maestro dijo "Si" 12 veces en total para repartir los 20 confites, y le dio 16 confites a Gloria y 4 confites a Carlos.
*No hay necesidad de repartir los confites en un orden determinado entre Gloria y Carlos, como así:

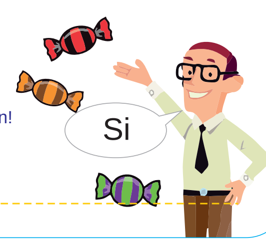
G → C → G → C → G → ...

Un mago solo escucha al maestro decir "Si" y cuenta las veces que lo dice sin mirar nada. Cuando el maestro termina de repartir, el mago siempre sabe cuántos confites tienen exactamente cada uno de los estudiantes.



!El mago siempre contesta bien!
¿Por qué?

La solución está en la página 162



Unidad 3
Paralelismo

Lección 1: Paralelismo

Unidad 3

Paralelismo

(8 horas)

1 Expectativas de logro

- Operan con ángulos y sus relaciones con líneas.

2 Relación y desarrollo

Séptimo grado

Conjunto de puntos
- Puntos, rectas y planos
- Rayos y segmentos
- Longitud de un segmento
- Segmentos congruentes
- Distancia entre puntos
- Punto medio de un segmento
- Bisector de un segmento
- Puntos colineales

Ángulos
- Ángulo, medida y congruencia
- Clasificación de ángulos
- Construcción de la bisectriz
- Rectas perpendiculares y mediatriz de un segmento
- Construcción de la mediatriz
- Construcción de una perpendicular usando definición de mediatriz

Octavo grado

Paralelismo
- Rectas paralelas y transversales
- Ángulos formados por dos rectas paralelas y una transversal
- Congruencia de ángulos formados por dos rectas paralelas y una transversal
- Demostraciones sobre paralelismo
- Distancia entre rectas paralelas
- Construcción de rectas paralelas

Congruencia de triángulos
- Suma de las medidas de los ángulos de un triángulo
- Suma de las medidas de los ángulos de un polígono
- Congruencia de triángulos
- Triángulos isósceles y rectángulo

Cuadriláteros
- Elementos y clasificación de los cuadriláteros
- Paralelogramos
- Rectángulos, rombos y cuadrados
- Trapecios

Noveno grado

Semejanza de triángulos
- Figuras semejantes
- Triángulos semejantes
- Criterios de semejanza de triángulos
- Relación entre triángulos y proporción
- Relación entre paralelas y proporción
- Aplicación de la semejanza de triángulos

Teorema de Pitágoras
- Teorema de Pitágoras
- Recíproco del teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Polígonos regulares y el círculo
- Polígonos regulares
- Medida de los ángulos internos de un polígono regular
- Centro de un polígono regular
- Círculos
- Tangente a un círculo
- Área del círculo

Sólidos geométricos
- Áreas laterales de sólidos geométricos (cubos, prismas, pirámides, cilindros conos y esferas)
- Volumen de sólidos geométricos (pirámides, conos, cilindros y esferas)

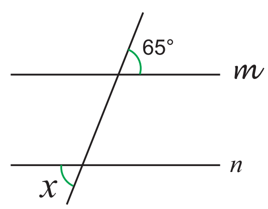
3 Plan de estudio (8 horas)

Lección	Distribución de horas	Contenidos
1. Paralelismo (7 horas)	1/7	• Rectas paralelas y transversales
	2/7	• Ángulos formados por dos rectas y una transversal y la relación entre ángulos correspondientes
	3/7	• Relación de ángulos alternos internos entre rectas paralelas
	4~5/7	• Demostraciones sobre paralelismo
	6/7	• Distancia entre rectas paralelas
	7/7	• Construcción de rectas paralelas
Ejercicios (1 hora)	1/1	

4 Puntos de lección

Análisis de las pruebas diagnósticas 2016 - 2017

[Pregunta] Las rectas m y n son paralelas, ¿Cuál es la medida del ángulo x?



Institutos: 38%   CEB: 26%   (2017)

Es probable que contesten correctamente sin saber los conocimientos de paralelismo, por eso los resultados no son bajos relativamente. (De hecho, en muchos centros educativos no enseñan esta unidad)

Los conocimientos de paralelismo son necesarios para aprender el bloque de Geometría (especialmente en caso de demostraciones) y no son tan complicados para los estudiantes.

Lección 1. Paralelismo

La definición de paralelismo, se dice que dos rectas son paralelas si no se cortan. Esta definición tiene la desventaja que no se puede probar.

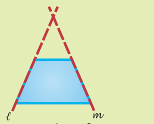
Un criterio práctico para verificar el paralelismo es trazar una transversal y determinar la congruencia de los ángulos correspondientes o de los ángulos alternos internos.

Esta propiedad ya es familiar a los estudiantes porque en los grados anteriores aprendieron a trazar líneas paralelas con escuadras, por lo tanto, es preferible inducirlos de modo que hallen esta propiedad antes de aprenderla.

También se abordará la construcción de rectas paralelas, dibujándolas con regla y compás. Es importante inducir a los estudiantes a buscar estrategias para la construcción de estas rectas y dar las orientaciones necesarias como docentes para que logren hacer estas construcciones, en esta lección se hace uso de la definición de rombo y romboide para la construcción de rectas paralelas.

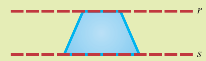
Tema: Rectas paralelas y transversales 1

Observe:



Las rectas ℓ y m se cortan en un punto.

Dos rectas que se cortan en un punto no son paralelas



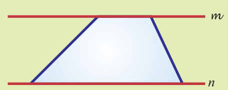
Las rectas r y s no se cortan.

Dos rectas que no se cortan son paralelas

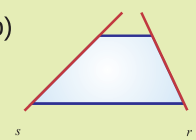
Ejemplo 1.1 2 Pág. 40 3

En los siguientes trapecios las rectas m, n, r y s son las prolongaciones de sus lados. Identifique cuales son rectas paralelas.

a)



b)



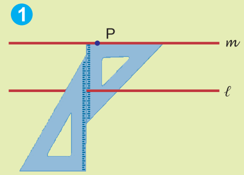
Respuesta 4

a) m es paralela a n (se escribe $m \parallel n$)

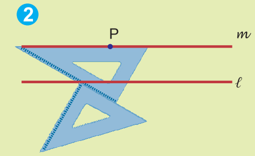
b) s no es paralela a r (a veces se escribe $s \nparallel r$)

Trazar rectas paralelas que pasan a un punto exterior a una recta. Utilizando solo escuadras

1

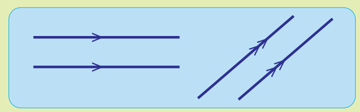


2



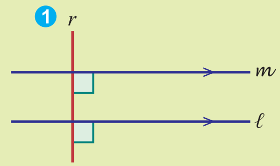
Por un punto cualquiera que no está en una recta puede trazarse una y sólo una recta paralela a la recta dada

Si dos rectas se marcan ">", ">>".



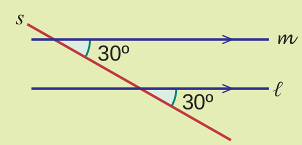
Observe: Si dos rectas se marcan ">", ">>".

1



La recta r es transversal

2

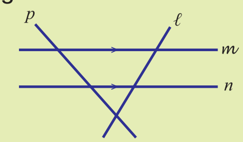


La recta s es transversal

Al cortarse las rectas r o s forman ángulos de la misma medida.

Ejemplo 1.2 2 Pág. 42 3

Dada la figura



a) Indique que rectas son transversales a las rectas m y n.

a) Usando el símbolo de paralelismo (II) indique que rectas son paralelas

Respuesta: 4

a) Las rectas ℓ y p son transversales a las rectas m y n. ✓

b) $m \parallel n$ ✓

Ejercicio 1.1 2

Ver figura del Libro del estudiante

a) Indique qué rectas son transversales a las rectas p y q.

b) Usando el símbolo de paralelismo (||), indique qué rectas son paralelas.

Respuesta: 4

a) Las rectas r y s son transversales a las rectas p y q. ✓

b) $p \parallel q$ ✓

1. Al inicio de la clase escribir solo la palabra "**Tema**" y hasta el final de la clase (o en el desarrollo de la misma) escribir el contenido del tema.
2. Escribir el número del Ejemplo o Ejercicio.
3. Escribir el número de **Pág.** del LE para entender dónde se quedaron con respecto al tiempo.
4. Escribir la **Solución** y **Respuesta**.
5. En el problema planteado marcar los datos importantes para poder llegar a la respuesta.
6. Escribir la conclusión en un rectángulo de color rojo.

✓ Marcar en el Ejercicio cuando la solución o la respuesta sean correctas.

Nota: Los puntos aquí explicados no siempre aplican todos en un plan de pizarra.

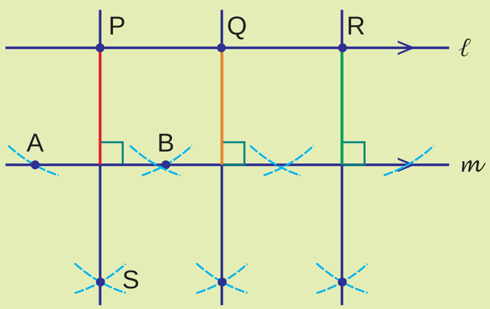
Tema: Distancia entre rectas paralelas 1

Ejemplo 1.9 2 Pág. 51 3

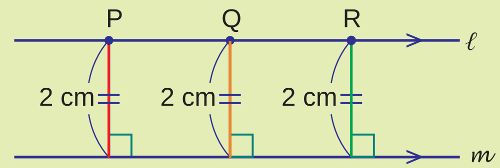
En la siguiente figura, las rectas ℓ y m son paralelas. En la recta ℓ están los puntos P, Q y R. Compare las distancias entre cada punto y la recta m.

Solución 4

Paso 1. Trazar cada perpendicular a la recta que pase por los puntos P, Q y R.



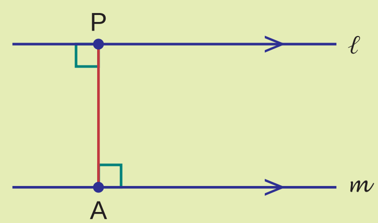
Paso 2. Medir la longitud de los segmentos que unen cada punto a la recta m.



La distancia entre el punto P y recta m es 2 cm, igual que entre Q y m, lo mismo que entre R y m.

Respuesta: Son iguales 4

Si las rectas ℓ y m son paralelas y se marca cualquier punto P en la recta ℓ, la distancia entre ese punto P y la recta m, es siempre igual. A esta distancia se le llama distancia entre dos rectas paralelas.



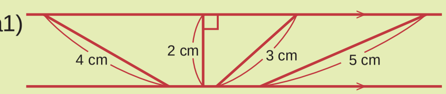
6

PA es la distancia entre las rectas ℓ y m

Ejercicio 1.9 2 Pág. 52 3

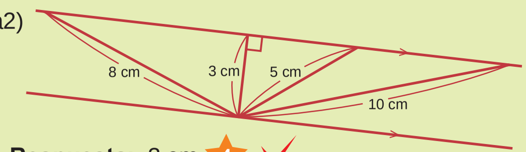
a) Indique la distancia entre los siguientes pares de rectas paralelas.

a1)



Respuesta: 2 cm 4

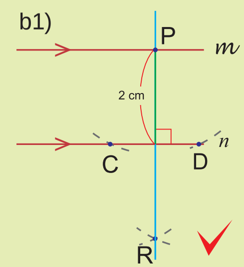
a2)



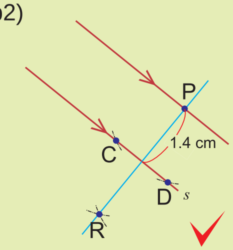
Respuesta: 3 cm 4

b) Encuentre la distancia en cm entre los siguientes pares de rectas paralelas. Haga uso de la construcción de la perpendicular

b1)



b2)



1 Al inicio de la clase escribir solo la palabra “**Tema**” y hasta el final de la clase (o en el desarrollo de la misma) escribir el contenido del tema.

2 Escribir el número del Ejemplo o Ejercicio .

3 Escribir el número de **Pág.** del LE para entender dónde se quedaron con respecto al tiempo.

4 Escribir la **Solución** y **Respuesta**.

5 En el problema planteado marcar los datos importantes para poder llegar a la respuesta.

6 Escribir la conclusión en un rectángulo de color rojo.

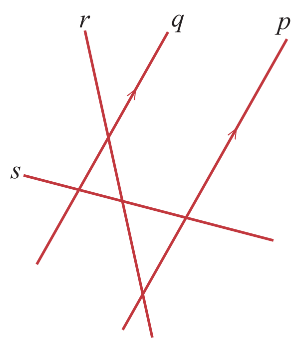
✓ Marcar en el Ejercicio cuando la solución o la respuesta sean correctas.

Nota: Los puntos aquí explicados no siempre aplican todos en un plan de pizarra.

Indicador de logro

a) Indique qué rectas son transversales a las rectas p y q

b) Usando el símbolo de paralelismo (II), indique qué rectas son paralelas



1. Recordar la definición de rectas paralelas.

(6 min)

* Observar las figuras para dar respuesta a lo siguiente

¿Qué pasa con las rectas ℓ y m?

¿Qué pasa con las rectas r y s?

¿Cuándo dos rectas son paralelas?

¿Cuándo decimos que dos rectas son paralelas?

2. Identificar cuales son rectas paralelas. *Ejemplo* **1.1**

(6 min)

* Como podemos darnos cuenta cuáles de esas rectas son paralelas.

Unidad 3: **Paralelismo**

Lección 1: ***(1/7)*** Paralelismo

Sección 1: Rectas paralelas y transversales

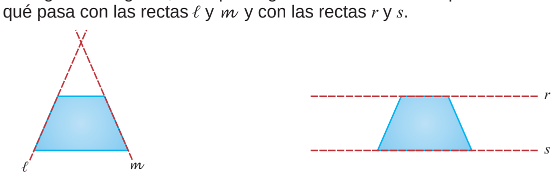
Objetivos:
- Definir y designar rectas paralelas.
- Definir y reconocer rectas transversales.

Unidad 3 **Paralelismo**

Lección 1: Paralelismo

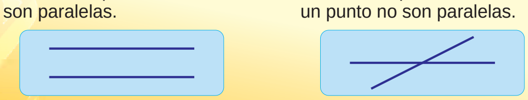
Sección 1: Rectas paralelas y transversales

Observe las siguientes figuras, si se prolongan los lados de los trapecios como rectas, explique qué pasa con las rectas ℓ y m y con las rectas r y s.



Las rectas ℓ y m se cortan en un punto. Las rectas r y s no se cortan.

Dos rectas que no se cortan son paralelas. Dos rectas que se cortan en un punto no son paralelas.

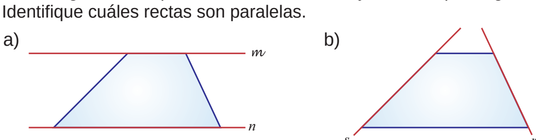


Para expresar el paralelismo se utiliza el símbolo $\parallel$. En las figuras anteriores $r \parallel s$, se lee "r es paralela a s" o viceversa.

Ejemplo **1.1**

En los siguientes trapecios las rectas m, n, r, y s son las prolongaciones de sus lados. Identifique cuáles rectas son paralelas.

a) b)



Respuesta

a) m es paralela a n (se escribe $m \parallel n$)

b) s no es paralela a r

En caso de b) a veces se escribe $s \nparallel r$

continúa en la siguiente página...

Unidad 3: Paralelismo

Lección 1: (1/7) Paralelismo

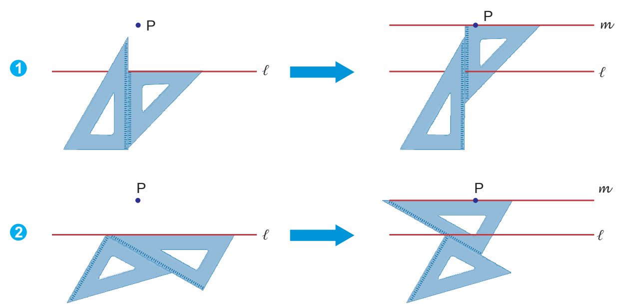
Sección 1: Rectas paralelas y transversales

Objetivos:
- Definir y designar rectas paralelas.
- Definir y reconocer rectas transversales.

Trazar rectas paralelas que pasan por un punto exterior a una recta.

Utilizando solo escuadras, trace una recta que pase por el punto P y que sea paralela a la recta . Piense en cuántas rectas paralelas pueden pasar por el punto P.

Se explicarán dos procedimientos para trazar rectas paralelas con escuadras:

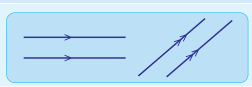


Se concluye que solo puede trazarse una única recta paralela a que pasa por el punto P.

En 3er grado se aprendió como trazar líneas paralelas usando escuadras.

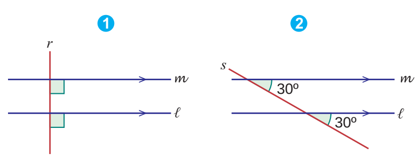
Por un punto cualquiera que no está en una recta puede trazarse una y sólo una recta paralela a la recta dada

Si dos rectas son paralelas, se marcan las rectas como se muestra en las figuras de la derecha, usando ">", ">>".



A partir del procedimiento anterior para trazar rectas paralelas usando escuadras.

Se observa que en ambos casos una recta como r o s corta las dos rectas paralelas formando ángulos de la misma medida.



La recta que corta dos o más rectas se llama **recta transversal**. En los casos anteriores r y s son rectas transversales.

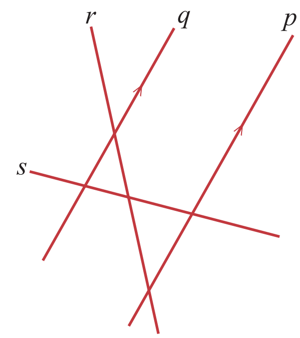
41

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Indicador de logro

a) Indique qué rectas son transversales a las rectas p y q

b) Usando el símbolo de paralelismo (II), indique qué rectas son paralelas



3. Trazar rectas paralelas que pasan por un punto exterior a una recta.

(7 min)

¿Cómo podemos trazar rectas paralelas utilizando solo las escuadras?

¿Cuántas rectas paralelas se pueden trazar a una recta dada y que pasen por un punto exterior a ella?

* Concluir que se puede trazar una sola recta.

4. Analizar los ángulos formados por una recta que corta dos rectas.

(5 min)

¿Cómo son los ángulos formados por una recta que corta dos rectas paralelas?

* Concluir que al utilizar las escuadras la recta que no se mueve es paralela a la que se mueve y no cambian sus ángulos.

5. Definir una recta transversal.

(6 min)

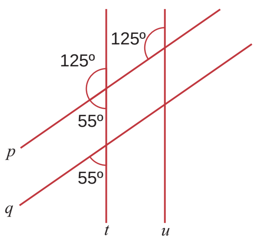
¿Cómo se llama la recta que interseca a las otras dos?

* Pedir a los estudiantes que identifiquen la transversal de la figura 1 y 2.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Cuáles de las rectas son paralelas marque con “>”, “>>”



6. **Identificar rectas transversales.** *Ejemplo* **1.2**
   (8 min)
   ¿Qué rectas son transversales a la recta m y n?

7. **Resolver** *Ejercicio* **1.1**
   (7 min)
   Solución
   a) Las rectas r y s son transversales a las rectas p y q.
   b) $p \parallel q$.

[Hasta aquí Clase 1]
[Desde aquí Clase 2]

1. **Identificar los ángulos que se forman con dos rectas y su transversal.**
   (8 min)

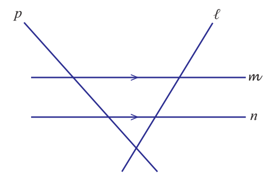
* Trazar dos rectas y una transversal, ¿cuántos ángulos se forman?
* Designar con una letra minúscula cada ángulo formado (que coincida con el LE)
* Observar la figura.
* En qué posición están los ángulos respecto a las rectas ℓ y m.

  ¿Cuáles son ángulos internos?
* Indicar que los ángulos internos se ubican en el interior de las rectas ℓ y m y son $\angle b$, $\angle c$, $\angle e$ y $\angle h$.

  ¿Cuáles son ángulos externos?
* Indicar que los ángulos externos se ubican en el exterior de las rectas ℓ y m y son $\angle a$, $\angle d$, $\angle f$ y $\angle g$.

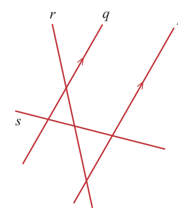
Unidad 3: **Paralelismo**
Lección 1: Paralelismo
(2/7)
Sección 2: Ángulos formados por dos rectas y una transversal y relación entre ángulos correspondientes
Objetivo:
• Identificar y clasificar los ángulos formados por dos rectas y una transversal.
• Reconocer las rectas que son paralelas dadas las medidas de los ángulos correspondientes y viceversa.

Ejemplo **1.2**
En la figura de la derecha:
a) Indique qué rectas son transversales a las rectas m y n.
b) Usando el símbolo de paralelismo (||), indique qué rectas son paralelas.



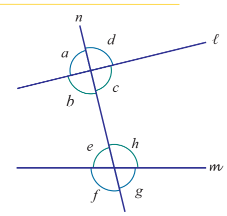
Respuesta
a) Las rectas ℓ y p son transversales a las rectas m y n.
b) $m \parallel n$.

Ejercicio **1.1** En la figura de la derecha:
a) Indique qué rectas son transversales a las rectas p y q.
b) Usando el símbolo de paralelismo (||), indique qué rectas son paralelas.

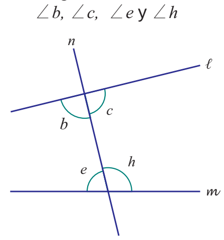


Sección 2: Ángulos formados por dos rectas y una transversal y relación entre ángulos correspondientes

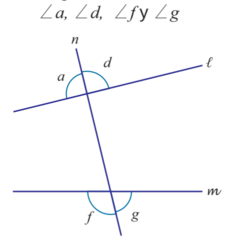
En la figura de la derecha, la recta n es transversal a las rectas ℓ y m, observe que se forman los siguientes ángulos que se nombran según su posición como:



Ángulos internos:
$\angle b$, $\angle c$, $\angle e$ y $\angle h$



Ángulos externos:
$\angle a$, $\angle d$, $\angle f$ y $\angle g$



continúa en la siguiente página...

Unidad 3: **Paralelismo**

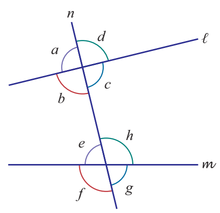
Lección 1: Paralelismo
(2/7)

Sección 2: Ángulos formados por dos rectas y una transversal y relación entre ángulos correspondientes

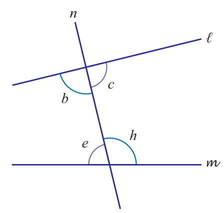
Objetivos:
- Identificar y clasificar los ángulos formados por dos rectas y una transversal.
- Reconocer las rectas que son paralelas dadas las medidas de los ángulos correspondientes y viceversa.

Relación entre los ángulos formados por dos rectas y una transversal, según su posición.

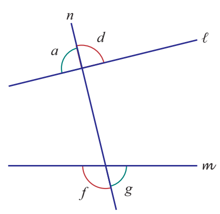
Ángulos correspondientes:
$\angle a$ y $\angle e$, $\angle b$ y $\angle f$, $\angle c$ y $\angle g$, $\angle d$ y $\angle h$



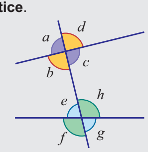
Ángulos alternos internos:
$\angle b$ y $\angle h$, $\angle c$ y $\angle e$



Ángulos alternos externos:
$\angle a$ y $\angle g$, $\angle d$ y $\angle f$



Los ángulos que están uno frente al otro se llaman **ángulos opuestos por el vértice**.

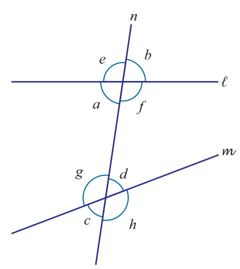


$\angle a$ y $\angle c$, $\angle b$ y $\angle d$, $\angle e$ y $\angle g$, $\angle f$ y $\angle h$

Ejemplo 1.3

En la siguiente figura, la recta n es transversal a las rectas ℓ y m, indique:

a) El ángulo correspondiente con el $\angle h$
b) El ángulo alterno interno con el $\angle d$
c) El ángulo alterno externo con el $\angle c$
d) El ángulo opuesto por el vértice con el $\angle f$



Respuesta
a) $\angle f$
b) $\angle a$
c) $\angle b$
d) $\angle e$

¿Cual es el ángulo alterno externo con el $\angle c$?

* Indicar que el $\angle b$.

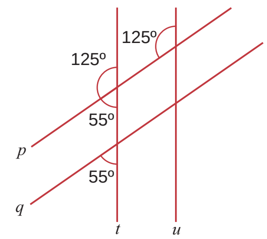
¿Cual es el ángulo opuesto por el vértice con el $\angle f$?

* Indicar que el $\angle e$.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Cuáles de las rectas son paralelas marque con “>”, “>>”



2. Clasificar los ángulos formados por dos rectas y una transversal según su posición.

(7 min)

¿Cuáles son las parejas de ángulos correspondientes?

* Indicar que se ubican al mismo lado de las rectas ℓ y m y al mismo lado de la transversal y son $\angle a$ y $\angle c$, $\angle b$ y $\angle f$, $\angle c$ y $\angle g$, $\angle d$ y $\angle h$.

¿Cuáles son las parejas de ángulos alternos internos?

* Indicar que se ubican al interior de las rectas ℓ y m y en distinto lado de la transversal y son $\angle b$ y $\angle h$, $\angle c$ y $\angle e$.

¿Cuáles son las parejas de ángulos alternos externos?

* Indicar que se ubican al exterior de las rectas ℓ y m y en distinto lado de la transversal y son $\angle a$ y $\angle g$, $\angle d$ y $\angle f$.
* Es importante recordar que los ángulos que comparten vértice y son opuestos se llaman opuestos por el vértice.

3. Encontrar los diferentes ángulos dada la recta n transversal a la recta ℓ y m.

Ejemplo 1.3

(5 min)

* Observar la figura.
* Identificar los ángulos de acuerdo a lo que se pide.

¿Cual es el ángulo correspondiente con el $\angle h$?

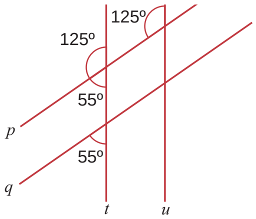
* Indicar que el $\angle f$.

¿Cual es el ángulo alterno interno con el $\angle d$?

* Indicar que el $\angle a$.

Indicador de logro

Cuáles de las rectas son paralelas marque con “>”, “>>”



4. Resolver Ejercicio **1.2**

(7 min)

Solución

a) $\angle c, \angle d, \angle x$ y $\angle w$

b) $\angle a, \angle b, \angle y$ y $\angle z$

c) $\angle a$ y $\angle w$, $\angle b$ y $\angle x$, $\angle c$ y $\angle y$, $\angle d$ y $\angle z$

d) $\angle c$ y $\angle w$, $\angle d$ y $\angle x$

e) $\angle a$ y $\angle c$, $\angle b$ y $\angle d$, $\angle x$ y $\angle z$, $\angle y$ y $\angle w$

* En c) y e) se pueden elegir dos pares de los cuatro dados.

5. Relación de las rectas paralelas en ángulos correspondientes.

(7 min)

¿Qué se puede decir del ángulo a y el ángulo b?

* Concluir que las rectas ℓ y m son paralelas.

* Recordar que si una recta transversal corta a dos rectas paralelas estas forman ángulos correspondientes con la misma medida.

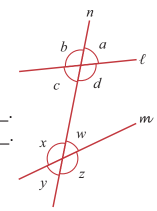
Unidad 3: Paralelismo

Lección 1: (2/7) Paralelismo

Sección 2: Ángulos formados por dos rectas y una transversal y relación entre ángulos correspondientes

Objetivos:
- Identificar y clasificar los ángulos formados por dos rectas y una transversal.
- Reconocer las rectas que son paralelas dadas las medidas de los ángulos correspondientes y viceversa.

Ejercicio **1.2** Observe la siguiente figura complete los incisos.



a) Ángulos internos: ____, ____, ____, ____

b) Ángulos externos: ____, ____, ____, ____

c) Dos pares de ángulos correspondientes:____ y ____,____ y ____.

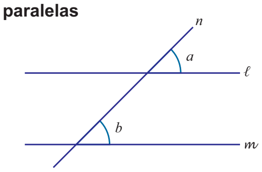
d) Dos pares de ángulos alternos internos: ____ y ____,____ y ____.

e) Dos pares de ángulos opuestos por el vértice:
____ y ____,____ y ____.

Relación de ángulos correspondientes en rectas paralelas

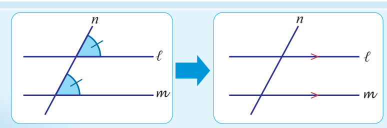
En la figura de la derecha $m\angle a = 45°$ y $m\angle b = 45°$. Observe que los ángulos son correspondientes y al compararse tienen la misma medida.

A continuación, empleando los procedimientos para trazar rectas paralelas (ver 1 y 2 página 41) se concluye que $\ell \parallel m$.

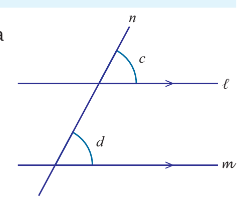


Como los ángulos correspondientes tienen la misma medida, se concluye que $\ell \parallel m$.
En general se puede decir lo siguiente:

Si la recta n corta a las rectas ℓ y m y los ángulos correspondientes tienen la misma medida, entonces $\ell \parallel m$.

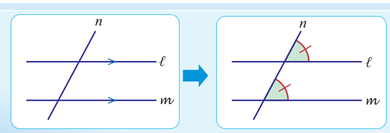


Ahora observe la figura de la derecha donde $\ell \parallel m$, mida con el transportador los ángulos correspondientes c y d. Compare sus medidas.
Se tiene que $m\angle c = m\angle d = 60°$.



En general, se puede decir lo siguiente:

Si $\ell \parallel m$ y son cortadas por la recta n, entonces sus ángulos correspondientes tienen la misma medida.



44
Unidad 3 - Paralelismo

continúa en la siguiente página...

Unidad 3: **Paralelismo**

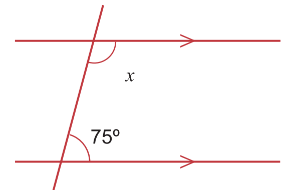
Lección 1: (3/7) Paralelismo

Sección 1: Relación de ángulos alternos internos en rectas paralelas

Objetivo: Encontrar la medida de los ángulos internos de dos rectas paralelas y una transversal dado un ángulo externo.

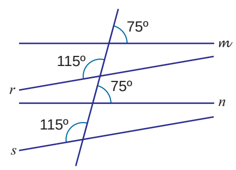
Indicador de logro

En la siguiente figura dado el ángulo de 75°, encuentre la medida del ángulo x

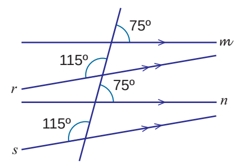


Ejemplo 1.4

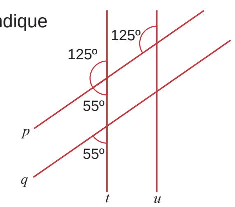
Observe la figura de la derecha. Indique cuáles de las rectas son paralelas, marcando las rectas con “>”, “>>”.



Solución:
Comparando los ángulos correspondientes, se observa que la recta m es paralela a n y r es paralela a s, se marcan las rectas como en la figura de la derecha:



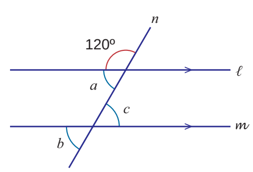
Ejercicio 1.3 Observe la figura de la derecha e indique cuáles de las rectas son paralelas, marcando las rectas con “>”, “>>”.



Sección 3: ***Relación de ángulos alternos internos en rectas paralelas***

Ejemplo 1.5

En la figura de la derecha, dadas las rectas $\ell \parallel m$ y el ángulo de 120°:
a) Encuentre la medida de los ángulos:
a1) $\angle a$ a2) $\angle b$ a3) $\angle c$
b) Compare las medidas del $\angle a$ y el $\angle c$.



Solución:

a1) $m\angle a + 120° = 180°$ ... El $\angle a$ y el ángulo dado de 120° son suplementarios.
$m\angle a = 180° - 120°$
$= 60°$

a2) $m\angle b = 60°$ ... El $\angle b$ es correspondiente con el $\angle a$ en rectas paralelas.

a3) $m\angle c = m\angle b$ ... El $\angle c$ es opuesto por el vértice al $\angle b$.
$= 60°$

b) $m\angle a = m\angle c = 60°$

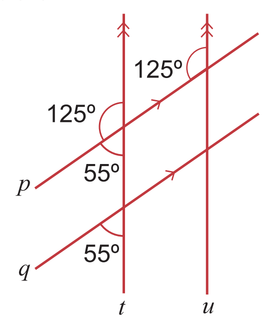
45

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

* Tomando en cuenta lo aprendido anteriormente ¿Qué conceptos vamos a emplear para encontrar la medida de los ángulos?
* Concluir que se necesita el concepto de ángulos suplementarios, ángulos correspondientes, ángulos alternos internos y opuestos por el vértice.
* Observando la figura encontrar la medida de los ángulos empleando las ideas dadas en el LE.

6. Identificar cuáles rectas son paralelas. *Ejemplo* **1.4**
(6 min)
¿Cuáles de las siguientes rectas son paralelas y por qué?
* Escuchar algunas respuestas de los alumnos
* Inducir a los estudiantes a que relacionen las situación con ángulos correspondientes.
* Concluir que al comparar los ángulos correspondientes la recta m es paralela a la recta n y la recta r es paralela a la recta s.
* No olvidar marcar las rectas con el símbolo de paralelas.

7. Resolver *Ejercicio* **1.3**
(5 min)
Solución



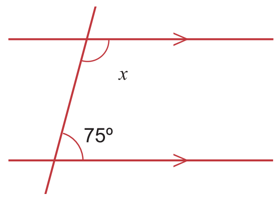
[Hasta aquí Clase 2]
[Desde aquí Clase 3]

1. Encontrar la medida de los ángulos. *Ejemplo* **1.5**
(8 min)
¿Qué datos nos dan?
¿Qué nos piden?

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

En la siguiente figura dado el ángulo de 75°, encuentre la medida del ángulo x



2. Relación de ángulos alternos internos en rectas paralelas.

⏱ *(6 min)*

* Observar las figuras, ℓ y m son paralelas, ¿que se puede decir de los ángulos alternos internos.

* Concluir que si las rectas ℓ y m son paralelas los ángulos alternos internos tienen la misma medida.

* Al observar la figura. Si se sabe que $m\angle b = m\angle c$, $m\angle c = 60°$ y también que $m\angle b = m\angle a$, ¿qué se concluye de las rectas ℓ y m?

* Concluir que las rectas ℓ y m son paralelas por que los ángulos alternos internos son congruentes.

3. Relación de ángulos alternos externos en rectas paralelas.

⏱ *(6min)*

* Al observar las figuras, ¿qué se puede decir de los ángulos alternos externos si las rectas ℓ y m son paralelas?

* Concluir que si son paralelas los ángulos alternos externos tienen la misma medida

4. Resolver Ejercicio **1.4**

⏱ *(6 min)*

Solución

$m\angle a = 50°$

$m\angle b = 130°$

$m\angle c = 50°$

$m\angle d = 130°$

Unidad 3: Paralelismo

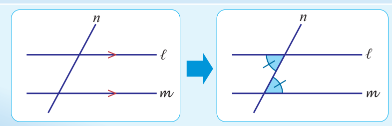
Lección 1: (3/7) Paralelismo

Sección 3: Relación de ángulos alternos internos en rectas paralelas

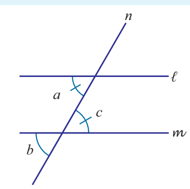
Objetivo: Encontrar la medida de los ángulos internos de dos rectas paralelas y una transversal dado un ángulo externo.

Observe que en el Ejemplo 1.5 $\ell \parallel m$ y el $\angle a$ con el $\angle c$ son ángulos alternos internos, se concluye que $m\angle a = m\angle c$. En general, se puede decir lo siguiente:

Si $\ell \parallel m$ y son cortadas por la recta n, entonces los ángulos alternos internos tienen la misma medida.

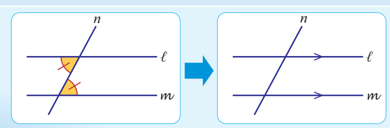


Ahora piense en lo siguiente: Si se sabe que el $\angle a$ y el $\angle c$ son ángulos alternos internos y $m\angle a = m\angle c$, ¿qué se concluye de las rectas ℓ y m?
Observe que $\angle b$ es opuesto por el vértice al $\angle c$, por lo que, $m\angle b = m\angle c$.
Se sabe que $m\angle a = m\angle c$, por lo tanto, $m\angle b = m\angle a$.
El $\angle a$ y $\angle b$ son correspondientes y tienen la misma medida entonces $\ell \parallel m$.



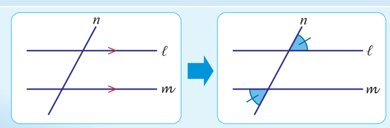
En general, se puede decir lo siguiente:

Si la recta n corta a las rectas ℓ y m y los ángulos alternos internos tienen la misma medida, entonces $\ell \parallel m$.

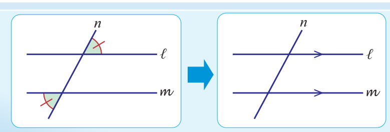


De esta manera se concluye lo mismo para los ángulos alternos externos como sigue:

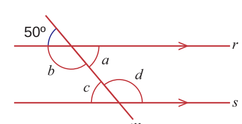
Si $\ell \parallel m$ y son cortadas por la recta n, entonces los ángulos alternos externos tienen la misma medida.



Si la recta n corta a las rectas ℓ y m y los ángulos alternos externos tienen la misma medida, entonces $\ell \parallel m$.



Ejercicio **1.4** En la siguiente figura dado el ángulo de 50° y $r \parallel s$. Encuentre la medida de los ángulos a, b, c y d.



46

Unidad 3 - Paralelismo

* Indicar que estos ángulos tendrán la misma medida solo cuando la transversal corte a rectas paralelas.

continúa en la siguiente página...

Unidad 3: **Paralelismo**

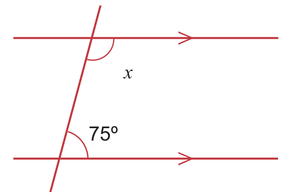
Lección 1: (3/7) Paralelismo

Sección 3: Relación de ángulos alternos internos en rectas paralelas

Objetivo: Encontrar la medida de los ángulos internos de dos rectas paralelas y una transversal dado un ángulo externo.

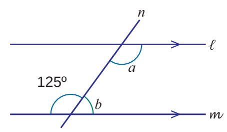
Indicador de logro

En la siguiente figura dado el ángulo de 75°, encuentre la medida del ángulo x



Ejemplo 1.6

En la figura de la derecha dado el ángulo de 125º y sea $\ell \parallel m$. Encuentre la suma de las medidas de los ángulos a y b ($m\angle a + m\angle b = ?$).



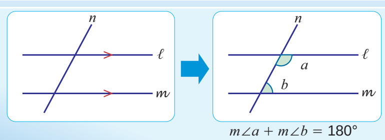
Solución:

1. $m\angle a = 125°$ ... El $\angle a$ y el ángulo dado de 125° son ángulos alternos internos en rectas paralelas.
2. $125° + m\angle b = 180°$ ... El $\angle b$ y el ángulo dado son suplementarios.
   $m\angle b = 180° - 125°$
   $m\angle b = 55°$
3. $m\angle a + m\angle b = 125° + 55°$
   $= 180°$

Observe que el $\angle a$ y el $\angle b$ están al mismo lado de la recta n, son ángulos internos y las rectas ℓ y m son paralelas. Se concluye que $m\angle a + m\angle b = 180°$. Es decir, el $\angle a$ y el $\angle b$ son ángulos suplementarios.

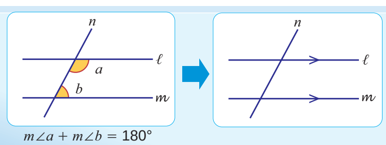
En general, se puede decir lo siguiente:

Si $\ell \parallel m$ y son cortadas por la recta n, entonces los ángulos internos al mismo lado de la recta son suplementarios.

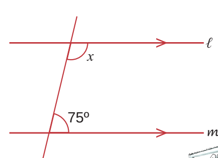


De igual manera, se dice que:

Si la recta n corta las rectas ℓ y m y los ángulos internos al mismo lado de la recta n son suplementarios, entonces $\ell \parallel m$.



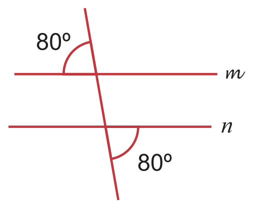
Ejercicio 1.5 En la siguiente figura, dado el ángulo de 75º, encuentre la medida del ángulo x.



5. **Encontrar la suma de los ángulos. Ejemplo 1.6**
   (7 min)
   ¿Que estrategia podemos utilizar para encontrar las medidas de los ángulos a y b?
   ¿Qué datos nos dan?
   * Tomar en cuenta lo aprendido anteriormente, ¿qué conceptos vamos a utilizar para encontrar las respuestas?
   * Auxiliarse de la figura para encontrar la respuesta.
   * Concluir que el $\angle a$ y el ángulo dado de 125°son ángulos alternos internos en rectas paralelas.
   * Se puede observar que el ángulo dado y el $\angle b$ son suplementarios. Por lo tanto, la $m\angle a + m\angle b = 180°$.
6. **Identificar ángulos suplementarios a un lado de la transversal.**
   (6 min)
   * Concluir que si dos rectas paralelas son cortadas por una recta transversal entonces forma ángulos suplementarios y viceversa, si dos rectas cortadas por una transversal forman ángulos suplementarios entonces las rectas son paralelas.
7. **Resolver Ejercicio 1.5**
   (6 min)
   Solución
   $m\angle x = 105°$

Indicador de logro

¿Qué condición hace que los siguientes pares de rectas sean paralelas?



Unidad 3: **Paralelismo**

Lección 1: Paralelismo
(4/7)

Sección 3: Relación de ángulos alternos internos en rectas paralelas

Objetivo: Indicar que si dos rectas son paralelas entonces:
a) Los ángulos correspondientes son congruentes
b) Los ángulos alternos internos son congruentes
c) Los ángulos alternos externos son congruentes
d) Dos ángulos internos consecutivos son suplementarios

1. **Propiedades que se establecen de los ángulos en rectas paralelas.**
   (30 min)

* Si dos rectas son paralelas y cortadas por una transversal se cumplen las siguientes propiedades.
* Pueden tener abierto el LE y leer cada una de las propiedades.
* Observar la figura del inciso a) ¿Cuántos ángulos se forman si se cortan dos rectas paralelas por una transversal?
* Concluir que se forman 8 ángulos y se clasifican de acuerdo a la posición

  ¿Qué podemos decir de la figura del inciso b)? En que posición están los ángulos, ¿qué nombre reciben? ¿qué relación hay entre los ángulos 1 y 2?

  ¿Qué podemos decir de la figura del inciso c)?, ¿en qué posición están los ángulos?, ¿qué nombre reciben?, ¿qué relación hay entre los ángulos 1 y 2?

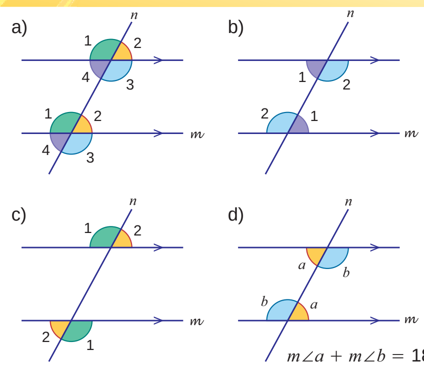
  ¿Qué podemos decir de la figura del inciso d)?, ¿en qué posición están los ángulos?, ¿qué nombre reciben?, ¿qué relación hay entre los ángulos a y b?
* Concluir que, si dos rectas son cortadas por una transversal, estas son paralelas cuando satisface las condiciones antes mencionadas.

Propiedades de ángulos formados por rectas paralelas y una transversal.

En las secciones anteriores se verificó las relaciones de igualdad entre los ángulos que se forman cuando dos rectas paralelas son cortadas por una transversal.

Las siguientes son propiedades que se establecen de los ángulos en rectas paralelas:

Si dos rectas son paralelas y son cortadas por una transversal se cumple que:
a) Los ángulos correspondientes tienen la misma medida.
b) Los ángulos alternos internos tienen la misma medida.
c) Los ángulos alternos externos tienen la misma medida.
d) Los ángulos internos al mismo lado de la transversal son suplementarios.



$m\angle a + m\angle b = 180º$

Para contenidos posteriores, se hará más referencia a los incisos a) y b)

Si dos rectas son cortadas por una transversal, éstas son paralelas cuando se satisface una de las siguientes condiciones:
a) Los ángulos correspondientes tienen la misma medida.
b) Los ángulos alternos internos tienen la misma medida.
c) Los ángulos alternos externos tienen la misma medida.
d) Los ángulos internos al mismo lado de la transversal son suplementarios.

Ejercicio **1.6** Haga relacionar los numerales con los incisos de las figuras.

1) Los ángulos correspondientes tienen la misma medida.
2) Los ángulos alternos internos tienen la misma medida.
3) Los ángulos alternos externos tienen la misma medida.
4) Los ángulos internos al mismo lado de la transversal son suplementarios.

48 *Unidad 3 - Paralelismo*

2. **Resolver** *Ejercicio* **1.6**
   (10 min)
   Solución
   1) c) 2) b) 3) a) 4) d)

Unidad 3: **Paralelismo**

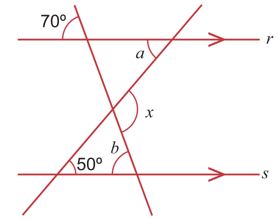
Lección 1: (5/7) Paralelismo

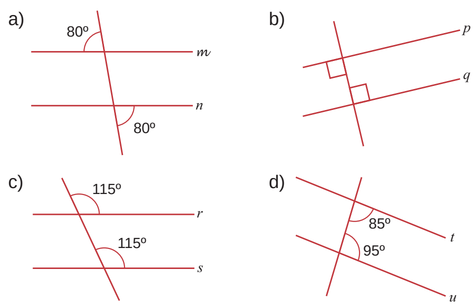
Sección 4: Ejercicios sobre paralelismo

Objetivo: Indicar que si dos rectas son paralelas entonces:
a) Los ángulos correspondientes son congruentes
b) Los ángulos alternos internos son congruentes
c) Los ángulos alternos externos son congruentes
d) Dos ángulos internos consecutivos son suplementarios

Indicador de logro

Los ángulos de 50° y 70°, encuentre la medida del ángulo x

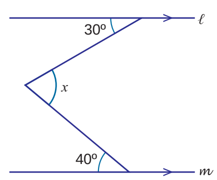




Sección 4: Ejercicios sobre paralelismo

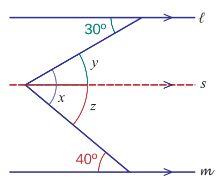
Ejemplo 1.7

En la figura de la derecha sea $\ell \parallel m$. Encuentre la medida del ángulo x.



Solución:

1) Trazar una recta paralela a la recta m que pase por el vértice del $\angle x$, nombrarla recta s (puede ser cualquier nombre). Observe que $m \parallel s$ y $\ell \parallel s$.



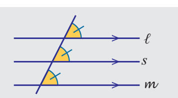
2) Observar que se divide el $\angle x$ en dos ángulos, nombrar estos ángulos con y y z.
Entonces $m\angle x = m\angle y + m\angle z$

3) $m\angle y = 30°$ ... El $\angle y$ y el ángulo dado de 30° son ángulos alternos internos en rectas paralelas.

$m\angle z = 40°$ ... El $\angle z$ y el ángulo dado de 40° son ángulos alternos internos en rectas paralelas.

$m\angle x = m\angle y + m\angle z$
$= 30° + 40°$
$= 70°$

Respuesta: $m\angle x = 70°$



Si $\ell \parallel m$ y $m \parallel s$, entonces $\ell \parallel s$.

49

Libro del Estudiante - Matemáticas 8° grado

1. Encontrar la medida del ángulo x. Ejemplo 1.7

(15 min)

* Pedir a los estudiantes que den estrategias para encontrar la medida del ángulo x, teniendo en cuenta que $\ell \parallel m$.

* Escuchar las respuestas de los alumnos y discutir las mismas.

* Indicar que se debe trazar una recta paralela que pase por el vértice del $\angle x$ y nombrarla recta s.

* Por tanto, se puede observar que $m \parallel s$ y que $\ell \parallel s$.
¿Qué sucede con el ángulo x al construir otra recta paralela?

* Concluir que corta al ángulo en dos ángulos y los vamos a nombrar y y z.

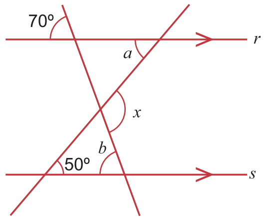
* Entonces para encontrar $m\angle x$ hay que encontrar la suma del $m\angle y + m\angle z$.

* Luego para encontrar $m\angle x$ se tiene en cuenta el concepto de ángulos alternos internos.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Los ángulos de 50° y 70°, encuentre la medida del ángulo x



2. Resolver *Ejercicio* **1.7**

(10 min)

Solución

a) $m\angle y$ = 80°

b) $m\angle z$ = 115°

3. Encontrar la medida del ángulo x. *Ejemplo* **1.8**

(10 min)

¿Cómo se puede encontrar la medida del $\angle x$?

* Pedir a los estudiantes que den estrategias para encontrar la medida del ángulo x, teniendo en cuenta que $r \parallel s$.
* Indicar que se hará lo mismo que en el ejemplo anterior trazar una recta paralela.
* Luego para encontrar $m\angle x$ se tiene en cuenta el concepto de ángulos alternos internos y también de ángulos correspondientes.

4. Resolver *Ejercicio* **1.8**

(8 min)

Solución

a) $m\angle a$ = 50°, $m\angle b$ = 70°,
$m\angle x$ = 120°

b) $m\angle c$ = 40°, $m\angle d$ = 45°,
$m\angle z$ = 85°

Unidad 3: Paralelismo

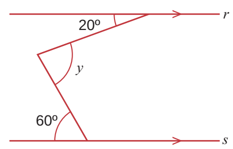
Lección 1: (5/7) Paralelismo

Sección 4: Ejercicios sobre paralelismo

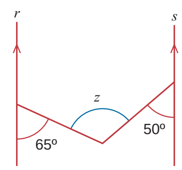
Objetivo: Indicar que si dos rectas son paralelas entonces:
a) Los ángulos correspondientes son congruentes
b) Los ángulos alternos internos son congruentes
c) Los ángulos alternos externos son congruentes
d) Dos ángulos internos consecutivos son suplementarios

Ejercicio **1.7** En las siguientes figura, si $r \parallel s$, encuentre la medida de los ángulos y y z.

a)

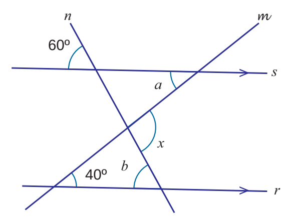


b)



Ejemplo **1.8**

En la figura de la derecha dados $s \parallel r$ y los ángulos de 40° y 60°. Encuentre la medida del ángulo x.



Solución:

$m\angle a$ = 40° ....El $\angle a$ y el ángulo dado de 40° son ángulos alternos internos en rectas paralelas.

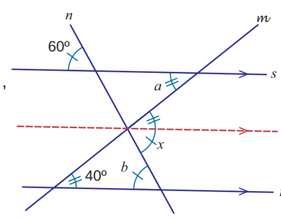
$m\angle b$ = 60° ....El $\angle b$ es correspondiente con el ángulo dado de 60° en rectas paralelas.

De la misma manera que en el *Ejemplo* 1.7, se sabe que:

$m\angle x = m\angle a + m\angle b$

$= 40° + 60°$

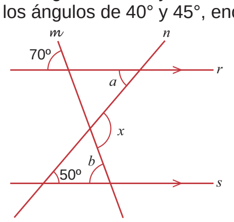
$= 100°$



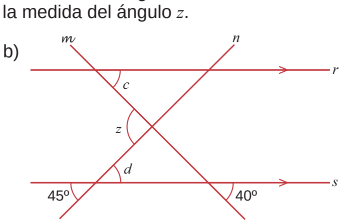
Ejercicio **1.8** En las siguientes figuras, dados $r \parallel s$ y

a) los ángulos de 50° y 70°, encuentre la medida del ángulo x.
b) los ángulos de 40° y 45°, encuentre la medida del ángulo z.

a)



b)



50

Unidad 3 - Paralelismo

Unidad 3: Paralelismo

Lección 1: (6/7) Paralelismo

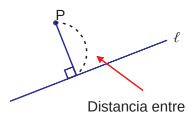
Sección 5: Distancia entre rectas paralelas

Objetivos:

- Construir una recta perpendicular en un punto cualquiera P de una de las rectas paralelas y calcular su distancia a la otra recta.
- Definir distancia entre rectas paralelas.

Se aprendió que la distancia entre un punto y una recta es la longitud del segmento que une el punto con la recta y que es perpendicular a dicha recta.

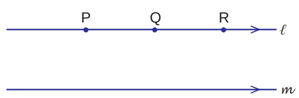
Ahora piense sobre la distancia entre dos rectas paralelas.



Distancia entre el punto P y la recta ℓ

Ejemplo 1.9

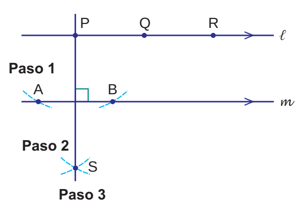
En la siguiente figura, las rectas ℓ y m son paralelas. En la recta ℓ están los puntos P, Q y R. Compare las distancias entre cada punto y la recta m.



La distancia entre un punto y una recta es la longitud del segmento que une el punto con la recta y que es perpendicular a dicha recta.

Solución:

Paso 1. Trazar cada perpendicular a la recta que pase por los puntos P, Q y R.



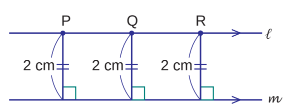
Construcción de la perpendicular

Paso 1 Trazar el arco con centro en P y que corte la recta m en los puntos A y B.

Paso 2 Con el mismo radio trazar dos arcos con centro en A y B que se corten en el punto S.

Paso 3 Trazar la recta PS. La recta PS es la perpendicular a la recta m que pasa por el punto P.

Paso 2. Medir la longitud de los segmentos que unen cada punto a la recta m.

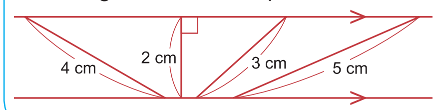


La distancia entre el punto P y recta m es 2 cm, igual que entre Q y m, lo mismo que entre R y m.

Respuesta: Las distancias son iguales

Indicador de logro

Indique cuál es la distancia entre las siguientes rectas paralelas



1. Comparar longitudes entre un punto y la recta m.

Ejemplo 1.9

(20 min)

* Recordar el concepto de distancia que se aprendió anteriormente que al trazar una perpendicular de un punto a una recta se obtiene la distancia entre el punto y la recta.

¿Cómo son las rectas ℓ y m? ¿Cómo podemos comparar esas longitudes?

* Indicar que se puede hacer haciendo uso de la construcción de la perpendicular que pase por los puntos.

* Comparar las longitudes de los puntos P, Q, y R que están en la recta ℓ y la recta m.

* Concluir si hay dos rectas ℓ y m, las distancias de cualquier punto de la recta ℓ a la m, son iguales.

continúa en la siguiente página...

Unidad 3: **Paralelismo**

Lección 1: (6/7) Paralelismo

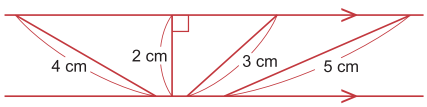
Sección 5: Distancia entre dos rectas paralelas

Objetivos:

- Construir una recta perpendicular en un punto cualquiera P de una de las rectas paralelas y calcular su distancia a la otra recta.
- Definir distancia entre rectas paralelas.

Indicador de logro

Indique cuál es la distancia entre las siguientes rectas paralelas



2. Concluir sobre la distancia entre dos rectas paralelas.

(10 min)

* Observar la figura.
* No importa donde marquemos un punto en la recta ℓ por ser paralelas ℓ y m la distancia entre el punto P y la recta m siempre es la misma.
* Esta distancia que observamos entre el punto P y el punto A es a lo que llamamos distancia entre dos rectas paralelas.

3. Resolver *Ejercicio* **1.9**

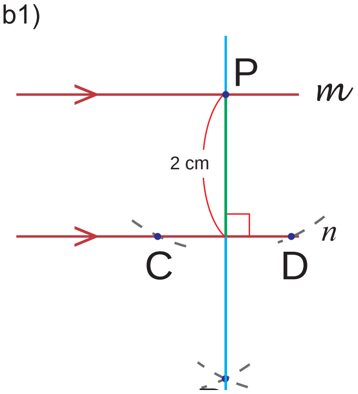
(15 min)

Solución

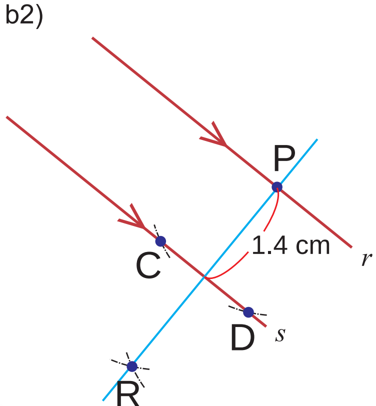
a1) 2 cm

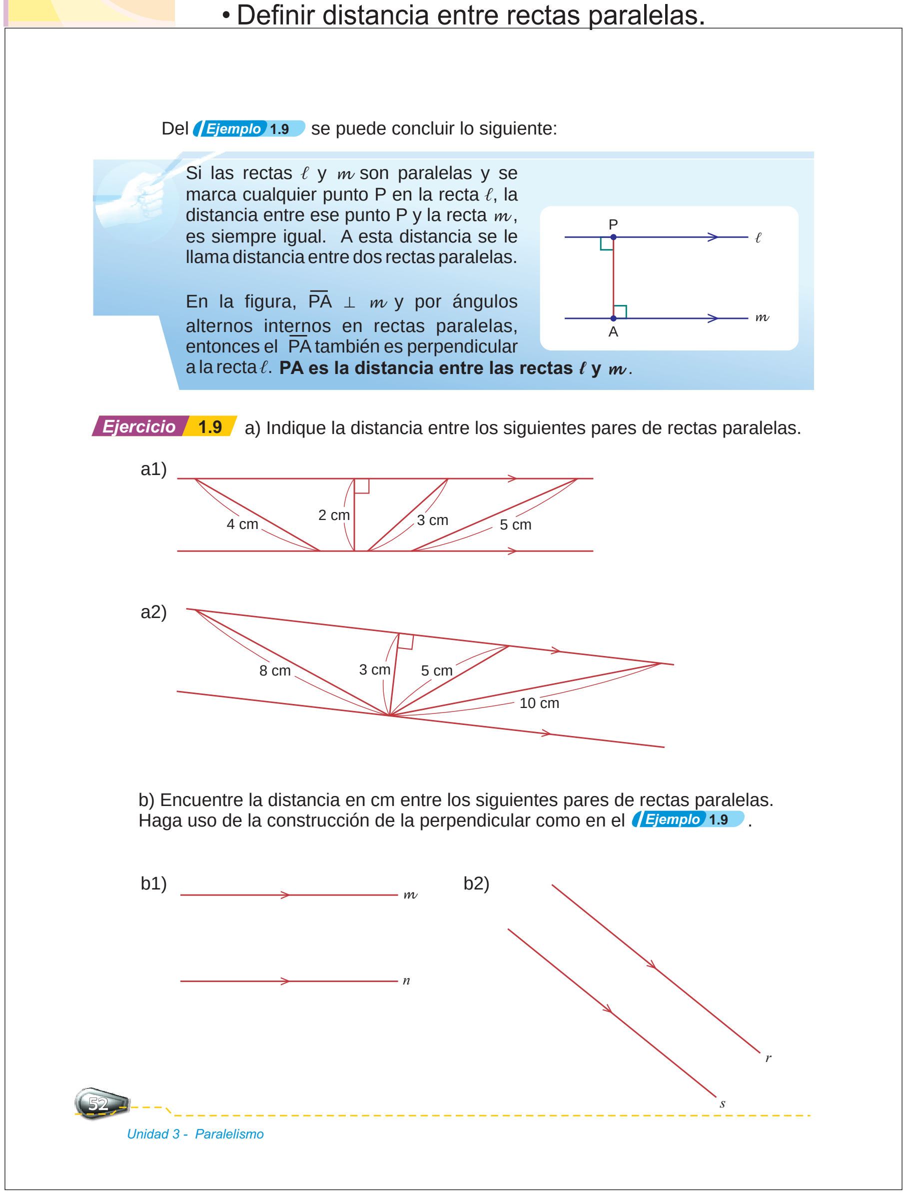
a2) 3 cm

b1)



b2)





Del *Ejemplo* 1.9 se puede concluir lo siguiente:

Si las rectas ℓ y m son paralelas y se marca cualquier punto P en la recta ℓ, la distancia entre ese punto P y la recta m, es siempre igual. A esta distancia se le llama distancia entre dos rectas paralelas.

En la figura, $\overline{PA} \perp m$ y por ángulos alternos internos en rectas paralelas, entonces el $\overline{PA}$ también es perpendicular a la recta ℓ. **PA es la distancia entre las rectas ℓ y m.**

Ejercicio **1.9** a) Indique la distancia entre los siguientes pares de rectas paralelas.

a1) 4 cm, 2 cm, 3 cm, 5 cm

a2) 8 cm, 3 cm, 5 cm, 10 cm

b) Encuentre la distancia en cm entre los siguientes pares de rectas paralelas. Haga uso de la construcción de la perpendicular como en el *Ejemplo* 1.9 .

b1) m, n b2) r, s

52 Unidad 3 - Paralelismo

* Para la construcción de b1) y b2) ver *Ejemplo* **1.9** .

Unidad 3: **Paralelismo**

Lección 1: (7/7) Paralelismo

Sección 6: Construcción de rectas paralelas

Objetivo: Construir la recta que pasa por un punto exterior a una recta dada y es paralela a esta, utilizando el concepto de a) ángulos correspondientes b) ángulos alternos internos.

Indicador de logro

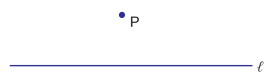
Haciendo uso de las características del rombo construya la recta s que sea paralela a la recta r y pasa por el punto P

Sección 6: ***Construcción de rectas paralelas***

Anteriormente se trazaron rectas paralelas utilizando escuadras, ahora se construirán rectas paralelas. Recuerde que construir figuras es dibujarlas utilizando solo regla y compás.

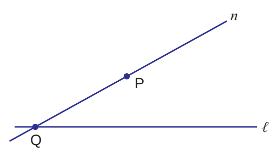
Ejemplo 1.10

Dada la recta y un punto P que no está en ella, construya la recta m que pase por el punto P y es paralela a la recta .

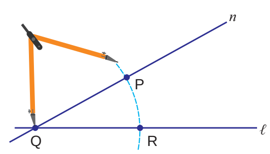


Solución:

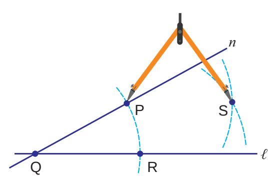
Paso 1. Trazar la recta n que pase por el punto P y corte a la recta ℓ en el punto Q.



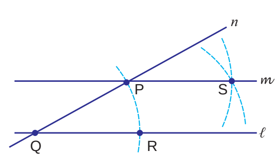
Paso 2. Trazar un arco de radio QP que corte la recta ℓ en el punto R.



Paso 3. Con el mismo radio QP trazar dos arcos, uno con centro en el punto P y otro con centro en el punto R que se corten en el punto S.



Paso 4. Trazar la recta que pase por los puntos P y S.



La recta m es la recta paralela a la recta ℓ, que pasa por el punto P.

1. Construcción de rectas paralelas. **Ejemplo 1.10**

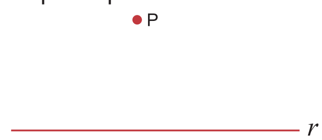
(15 min)

* ¿Cómo se puede hacer esta construcción?
* Pedir a los estudiantes que den estrategias para la construcción.
* Hacer la construcción siguiendo los pasos dados en el LE.
* Indicar que dibujen una recta ℓ y un punto P que no este en ella.
* Se construirá la recta m que pase por el punto P y es paralela a la recta ℓ.
* Trazar la recta n que pase por el punto P y corte a la recta ℓ en el punto Q.
* Trazar un arco de radio QP que corte al recta ℓ en el punto R.
* Con el mismo radio QP trazar dos arcos, uno con centro en el punto P y otro con centro en el punto R que se corten en el punto S.
* Trazar la recta que pase por los puntos P y S.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Haciendo uso de las características del rombo construya la recta s que sea paralela a la recta r y pasa por el punto P.



Unidad 3: Paralelismo

Lección 1: (7/7) Paralelismo

Sección 6: Construcción de rectas paralelas

Objetivo: Construir la recta que pasa por un punto exterior a una recta dada y es paralela a esta, utilizando el concepto de a) ángulos correspondientes b) ángulos alternos internos.

2. Explicación de la construcción anterior.

(15 min)

¿Qué se puede decir del cuadrilátero PQRS?

* Se puede decir que el cuadrilátero PQRS es un rombo porque sus cuatro lados son iguales. Esa es una condición suficiente para que este cuadrilátero sea un paralelogramo.

* Por lo tanto, si $\overline{PS} \parallel \overline{QR}$ y $\overline{QP} \parallel \overline{RS}$ entonces la recta m contiene al $\overline{PS}$ y es paralela a recta ℓ que contiene al $\overline{QR}$.

3. Resolver *Ejercicio* **1.10**

(15 min)

Solución

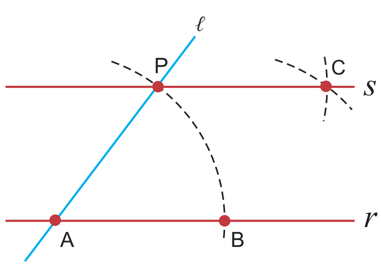
* Paso 1. Trazar la recta ℓ que pase por el punto P y corte a la recta r en el punto A.

* Paso 2. Trazar un arco de radio AP que corte al recta r en el punto B.

* Paso 3. Con el mismo radio AP trazar dos arcos, uno con centro en el punto P y otro con centro en el punto B que se corten en el punto C.

* Trazar la recta que pase por los puntos P y C.

* La recta s es la recta paralela a al recta r.

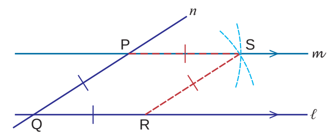


Explicación de la construcción anterior

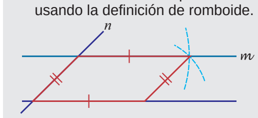
Observe que el cuadrilátero PQRS es un rombo porque sus cuatro lados son iguales. Lo anterior es una condición suficiente para que este cuadrilátero sea un paralelogramo.
De esta manera, $\overline{PS} \parallel \overline{QR}$ y $\overline{QP} \parallel \overline{RS}$.

Por lo tanto, la recta m que pasa por $\overline{PS}$ es paralela a la recta ℓ que pasa por $\overline{QR}$.

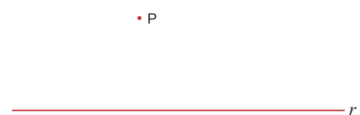
Un **paralelogramo** es un cuadrilátero cuyos dos pares de lados opuestos son paralelos.



En la construcción anterior piense como construir rectas paralelas usando la definición de romboide.



Ejercicio **1.10** Haciendo uso de las características del rombo construya la recta s que sea paralela a la recta r y pasa por el punto P.



Unidad 3: Paralelismo

(1/1) Ejercicios de la unidad

Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre paralelismo.

Ejercicios

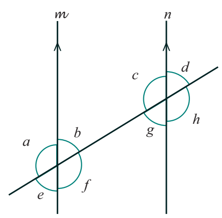
1 En la figura de la derecha $m \parallel n$, identifique el ángulo:

a) Correspondiente con el $\angle a$.

b) Alterno interno con el $\angle b$.

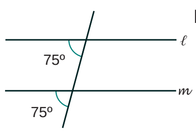
c) Alterno externo con el $\angle d$.

d) Opuesto por el vértice con $\angle c$.

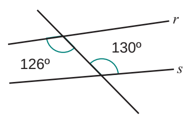


2 Indique cuáles de los siguientes pares de rectas son paralelas.

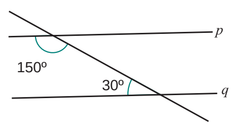
a)



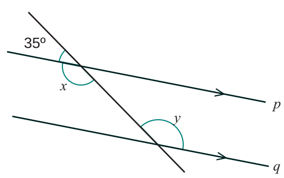
b)



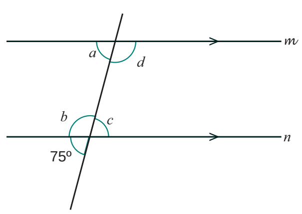
c)



3 En la siguiente figura, si $p \parallel q$, y dado el ángulo de 35°, encuentre la medida de los ángulos x y y.



4 En la siguiente figura, si $m \parallel n$, encuentre la medida de los ángulos internos dado el ángulo de 75°.



55

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

1 Identificar ángulos.

Solución

a) $\angle c$

b) $\angle g$

c) $\angle e$

d) $\angle h$

2 Determinar pares de rectas paralelas.

Solución

Incisos a) y c)

3 Encontrar la medida de los ángulos.

Solución

$m\angle x$ = 145°

$m\angle y$ = 145°

4 Encontrar la medida de los ángulos internos.

Solución

$m\angle a$ = 75°

$m\angle b$ = 105°

$m\angle c$ = 75°

$m\angle d$ = 105°

continúa en la siguiente página...

5 Criterios de paralelismo.
Solución

a) Ángulos correspondientes tienen la misma medida.

b) Ángulos suplementarios al mismo lado de la recta transversal.

c) Ángulos alternos internos tienen la misma medida.

6 Encontrar la medida del ángulo x.
Solución

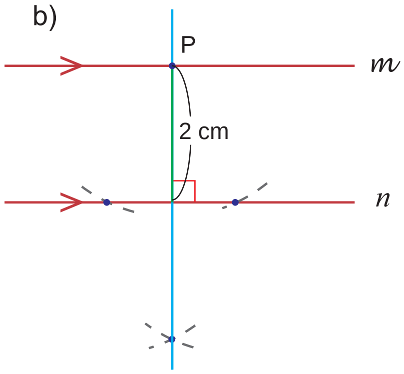
a) $m\angle x = 70°$

b) $m\angle x = 20°$

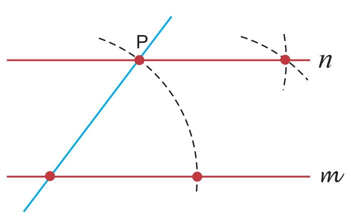
7 Distancia entre rectas.
Solución

a) 1 cm

b)



8 Construcción de una recta paralela.
Solución

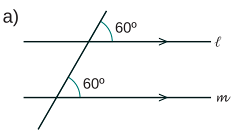


Unidad 3: Paralelismo
(1/1) Ejercicios de la unidad

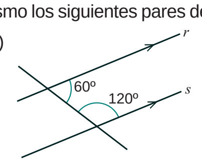
Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre paralelismo.

5 Indique por qué criterio de paralelismo los siguientes pares de rectas son paralelas.

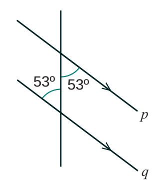
a)



b)

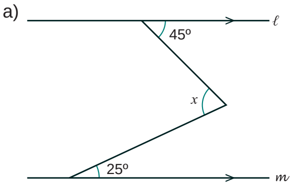


c)

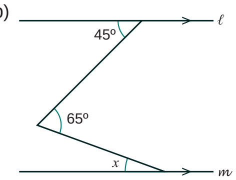


6 En las siguientes figuras si $\ell \parallel m$. Encuentre la medida del ángulo x.

a)

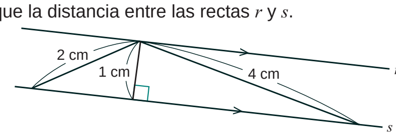


b)

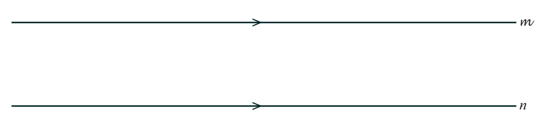


7 En las siguientes figuras:

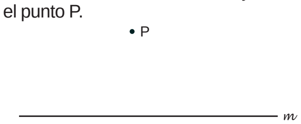
a) Si $r \parallel s$, indique la distancia entre las rectas r y s.



b) Encuentre la distancia entre las rectas paralelas m y n (sugerencia: marque el punto P en la recta m y trace la recta perpendicular a n que pase por P).



8 Haciendo uso de las características del rombo, construya la recta n que sea paralela a la recta m y pasa por el punto P.



Unidad 4
Congruencia de triángulos

Unidad 4

Congruencia de triángulos

(21 horas)

1 Expectativas de logro

- Usan las propiedades de triángulos y sus elementos para resolver problemas reales.
- Reconocen triángulos en situaciones reales.
- Construyen triángulos aplicando criterios o propiedades de congruencia o semejanza a otro dado.

2 Relación y desarrollo

Séptimo grado

Conjunto de puntos
- Puntos, rectas y planos
- Rayos y segmentos
- Longitud de un segmento
- Segmentos congruentes
- Distancia entre puntos
- Punto medio de un segmento
- Bisector de un segmento
- Puntos colineales

Ángulos
- Ángulo, medida y congruencia
- Clasificación de ángulos
- Construcción de la bisectriz
- Rectas perpendiculares y mediatriz de un segmento
- Construcción de la mediatriz
- Construcción de una perpendicular usando definición de mediatriz

Octavo grado

Paralelismo
- Rectas paralelas y transversales
- Ángulos formados por dos rectas paralelas y una transversal
- Congruencia de ángulos formados por dos rectas paralelas y una transversal
- Demostraciones sobre paralelismo
- Distancia entre rectas paralelas
- Construcción de rectas paralelas

Congruencia de triángulos
- Suma de las medidas de los ángulos de un triángulo
- Suma de las medidas de los ángulos de un polígono
- Congruencia de triángulos
- Triángulos isósceles y rectángulo

Cuadriláteros
- Elementos y clasificación de los cuadriláteros
- Paralelogramos
- Rectángulos, rombos y cuadrados
- Trapecios

Noveno grado

Semejanza de triángulos
- Figuras semejantes
- Triángulos semejantes
- Criterios de semejanza de triángulos
- Relación entre triángulos y proporción
- Relación entre paralelas y proporción
- Aplicación de la semejanza de triángulos

Teorema de Pitágoras
- Teorema de Pitágoras
- Recíproco del teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Polígonos regulares y el círculo
- Polígonos regulares
- Medida de los ángulos internos de un polígono regular
- Centro de un polígono regular
- Círculos
- Tangente a un círculo
- Área del círculo

Sólidos geométricos
- Áreas laterales de sólidos geométricos (cubos, prismas, pirámides, cilindros conos y esferas)
- Volumen de sólidos geométricos (pirámides, conos, cilindros y esferas)

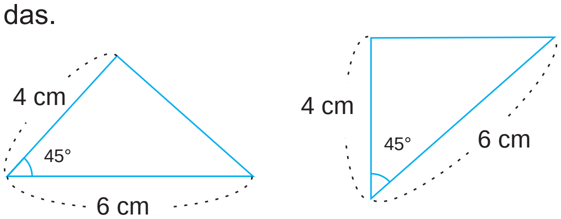
3 Plan de estudio (21 horas)

Lección	Distribución de horas	Contenidos
1. Suma de las medidas de los ángulos de un triángulo (2 horas)	1/2	• La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo
	2/2	• Medida de ángulos externos de un triángulo
2. Suma de las medidas de los ángulos de un polígono (3 horas)	1/3	• Definición y elementos de un polígono
	2~3/3	• La suma de las medidas de los ángulos de polígonos
3. Congruencia de triángulos (7 horas)	1/7	• Figuras congruentes
	2~4/7	• Criterios de congruencia de triángulos
	5/7	• Demostraciones geométricas
	6~7/7	• Demostraciones sobre congruencia de triángulos
4. Triángulos isósceles y rectángulo (7 horas)	1~3/7	• Triángulo isósceles y demostraciones de propiedades
	4/7	• Triángulo equilátero
	5~6/7	• Criterios de congruencia de triángulos rectángulos
	7/7	• Demostraciones sobre congruencia de triángulos y triángulos rectángulos
Ejercicios (2 horas)	1~2/2	

4 Puntos de lección

Análisis de las pruebas diagnósticas 2016 - 2017

[Pregunta] Los siguientes triángulos son congruentes. Escriba el criterio de congruencia que puede utilizar con las medidas presentadas.



Institutos: 15% CEB: 4% (2017)

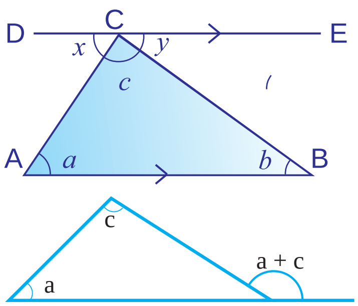
Para contestar esta pregunta, los estudiantes debían elegir uno de tres criterios de congruencia de triángulos (LLL, LAL, ALA). Sin embargo, los resultados son bajos. En esta unidad y en las posteriores, hay ejercicios de demostración.

Si no sabe las condiciones de congruencia de triángulos, es imposible demostrar aplicando esas condiciones.

Se debe asegurar el aprendizaje de estas condiciones en los estudiantes.

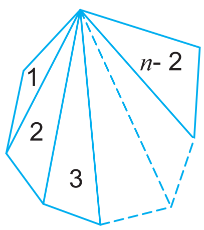
Lección 1: Suma de las medidas de los ángulos de un triángulo

En 4to grado, los estudiantes aprendieron de forma experimental que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°. Esta unidad inicia con la demostración de ese teorema, pero basada en la relación de los ángulos formados por rectas paralelas y su transversal. Por lo anterior, la actual secuencia curricular, permite que los estudiantes dominen el tema de paralelismo al ubicarla como la unidad anterior a ésta. Aplicando los conocimientos recién adquiridos, se proponen ejercicios para encontrar la medida de ángulos internos y/o externos de un triángulo.



Lección 2: Polígonos

La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo ahora se emplea para deducir la fórmula de la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono de n lados.



También se deducen las fórmulas para encontrar el número de triángulos y el número de diagonales que pasan por un mismo vértice de un polígono de n lados.

Al igual que en la Lección 1, se plantean ejercicios para encontrar la medida de ángulos internos y externos ahora de polígonos.

Lección 3: Congruencia de triángulos

Por ser el triángulo la figura fundamental que se estudia en esta unidad, se introduce la congruencia como el resultado de sobreponer un triángulo en otro usando giros, volteos o deslizamientos.

No se profundiza en los movimientos de rotación, reflexión o traslación. Luego, se proponen ejercicios para completar congruencias entre partes correspondientes.

Para establecer los criterios de congruencia, los estudiantes construyen triángulos dadas las siguientes condiciones:

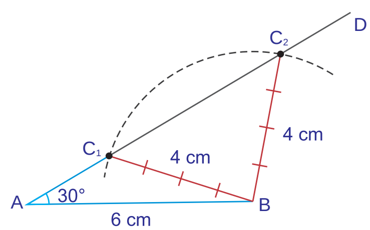
i) La medida de los 3 lados (LLL).

ii) La medida de 2 lados y el ángulo comprendi -do entre ellos (LAL).

iii) La medida de 1 lado y los ángulos adyacentes a él (ALA).

Concluyen que bajo cada una de esas condiciones, solo puede construirse un único triángulo. Con lo anterior, surge de manera natural el concepto y las condiciones mínimas necesarias para establecer la congruencia de triángulos. El objetivo principal de esta lección se cumple con los ejercicios que identifican el criterio de congruencia (LLL, LAL, ALA) utilizado para indicar que cada pareja de triángulos es congruente.

De la construcción del triángulo bajo las condiciones: Lado-Lado-Ángulo no comprendido, conocido como caso ambiguo, se concluye que en general no puede tomarse como un criterio de congruencia de triángulos. Esto es así, porque una circunferencia con centro en B y radio 4 cm, corta a la recta AD en dos puntos, C_1 y C_2. Se sugiere no profundizar en este tema, ya que será abordado en cursos posteriores.



Para finalizar la lección, se introduce el concepto de demostración geométrica. El objetivo es completar el esquema de demostración propuesto, aplicando los criterios de congruencia de triángulos.

Lección 4: Triángulos isósceles y rectángulos.

En esta lección se introduce el término “propiedad”. Se plantean demostraciones y ejercicios que hacen uso de las propiedades acerca de los triángulos isósceles.

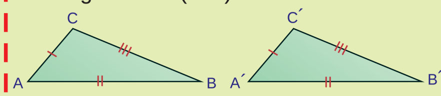
Finalmente, aplicando el conocimiento sobre triángulos isósceles, se introducen los criterios de congruencia para triángulos rectángulos.

Tema: Criterios de congruencia de triángulos ★1

Pág. 73 ★3

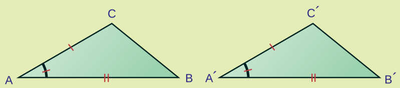
★6 Dos triángulos son congruentes si se satisface uno de los siguientes criterios:

1 Los tres lados son respectivamente congruentes. (LLL)



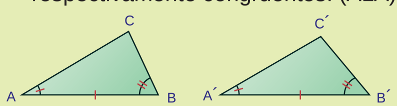
$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$
$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$
$\overline{CA} \cong \overline{C'A'}$

2 Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos son respectivamente congruentes. (LAL)



$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$
$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$
$\angle A \cong \angle A'$

3 Un lado y los dos ángulos adyacentes a él son respectivamente congruentes. (ALA)

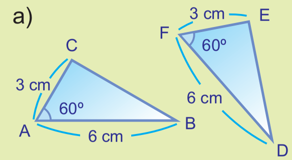


$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$
$\angle A \cong \angle A'$
$\angle B \cong \angle B'$

Ejemplo 3.4 ★2 **Pág.** 73 ★3

Identifica el criterio de congruencia de triángulos (LLL, LAL, ALA) utilizado para indicar que los siguientes triángulos son congruentes.

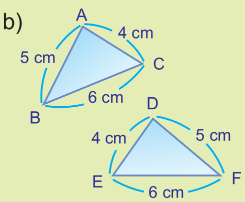
a)



Solución ★4

Dado que $\overline{AC} \cong \overline{FE}$, $\angle A \cong \angle F$, $\overline{AB} \cong \overline{FD}$, se concluye que $\Delta ABC \cong \Delta FDE$ por criterio LAL.

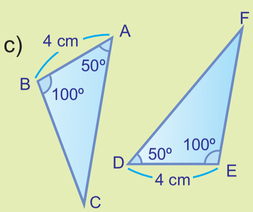
b)



Solución ★4

Dado que $\overline{AB} \cong \overline{DF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DE}$, $\overline{CB} \cong \overline{EF}$, se concluye que $\Delta ABC \cong \Delta DFE$ por criterio LLL.

c)



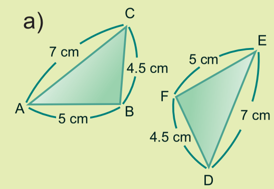
Solución ★4

Dado que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, se concluye que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ por criterio ALA.

Ejercicio 3.3 ★2 **Pág.** 74 ★3

Identifica el criterio de congruencia de triángulos (LLL, LAL, ALA) utilizado para indicar que los siguientes triángulos son congruentes.

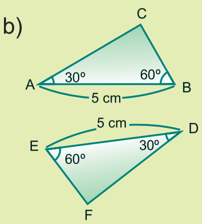
a)



Solución ★4

Dado que $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, $\overline{BC} \cong \overline{FD}$, $\overline{AC} \cong \overline{ED}$, se concluye que $\Delta ABC \cong \Delta EFD$ por criterio LLL. ✓

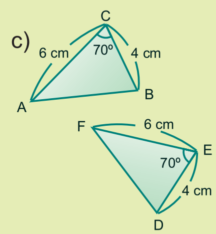
b)



Solución ★4

Dado que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, se concluye que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ por criterio ALA. ✓

c)



Solución ★4

Dado que $\overline{AC} \cong \overline{FE}$, $\angle C \cong \angle E$, $\overline{BC} \cong \overline{DE}$, se concluye que $\Delta ABC \cong \Delta FDE$ por criterio LAL. ✓

★1 Al inicio de la clase escribir solo la palabra "**Tema**" y hasta el final de la clase (o en el desarrollo de la misma) escribir el contenido del tema.

★2 Escribir el número del *Ejemplo* o *Ejercicio* .

★3 Escribir el número de **Pág.** del LE para entender dónde se quedaron con respecto al tiempo.

★4 Escribir la **Solución** y **Respuesta**.

★5 En el problema planteado marcar los datos importantes para poder llegar a la respuesta.

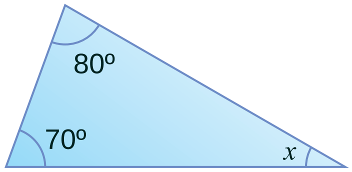
★6 Escribir la conclusión en un rectángulo de color rojo.

✓ Marcar en el *Ejercicio* cuando la solución o la respuesta sean correctas.

Nota: Los puntos aquí explicados no siempre aplican todos en un plan de pizarra.

Indicador de logro

Encuentre la medida del $\angle x$ empleando la propiedad de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo.

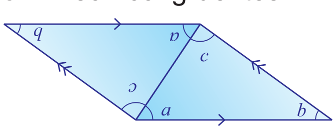


1. Mostrar que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°. *Ejemplo* **1.1**

(30 min)

* Recordar a los alumnos cómo se aprendió en 4to grado que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°. Puede llevar un triángulo en cartulina y romperlo tal como se muestra en la figura, formando así el ángulo llano.
* Para optimizar el tiempo de esta clase se sugiere llevar los triángulos ABC en papel o cartulina y ya cortados distribuirlos entre los estudiantes.

  ¿Qué es un ángulo interno de un triángulo?, ¿cuándo dos rectas son paralelas?, ¿qué son ángulos alternos internos?, ¿cómo es la medida de los ángulos alternos internos entre paralelas?, al trazar la recta DE que pasa por C y es paralela al lado AB, ¿qué ángulos se forman?, ¿cuál es la suma de las medidas de los ángulos x, c y y?
* Probablemente haya estudiantes que no recuerden la definición de ángulos alternos internos, ni tampoco por qué sus medidas son congruentes, así que se sugiere emplear los recortes de los triángulos ABC y formar un paralelogramo con ellos, así podrán visualizar que el $\angle a$ y el $\angle x$ son congruentes.

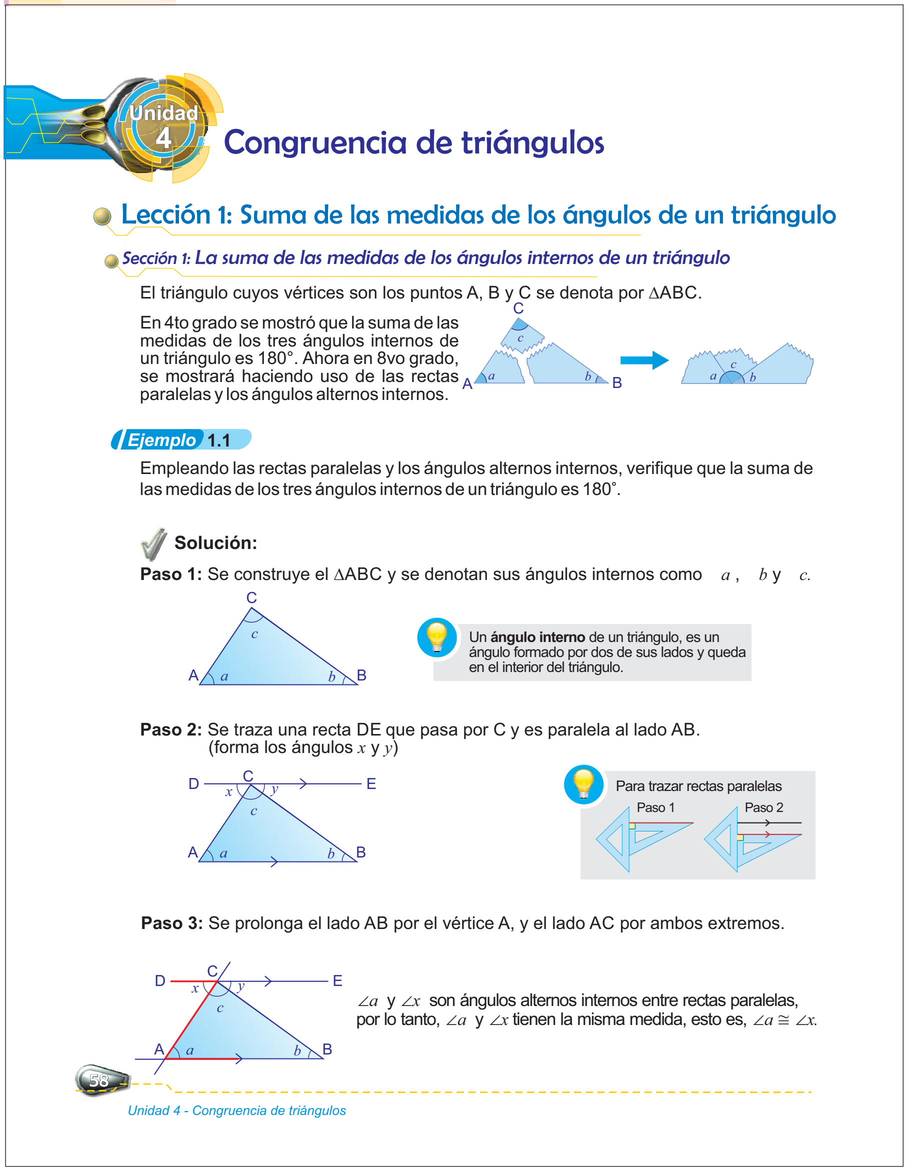


Unidad 4: Congruencia de triángulos

Lección 1: (1/2) Suma de las medidas de los ángulos de un triángulo

Sección 1: La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo

Objetivo: Verificar que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°.



Unidad 4 Congruencia de triángulos

Lección 1: Suma de las medidas de los ángulos de un triángulo

Sección 1: La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo

El triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C se denota por $\triangle ABC$.

En 4to grado se mostró que la suma de las medidas de los tres ángulos internos de un triángulo es 180°. Ahora en 8vo grado, se mostrará haciendo uso de las rectas paralelas y los ángulos alternos internos.

Ejemplo 1.1

Empleando las rectas paralelas y los ángulos alternos internos, verifique que la suma de las medidas de los tres ángulos internos de un triángulo es 180°.

Solución:

Paso 1: Se construye el $\triangle ABC$ y se denotan sus ángulos internos como a, b y c.

Un **ángulo interno** de un triángulo, es un ángulo formado por dos de sus lados y queda en el interior del triángulo.

Paso 2: Se traza una recta DE que pasa por C y es paralela al lado AB. (forma los ángulos x y y)

Para trazar rectas paralelas
Paso 1
Paso 2

Paso 3: Se prolonga el lado AB por el vértice A, y el lado AC por ambos extremos.

$\angle a$ y $\angle x$ son ángulos alternos internos entre rectas paralelas, por lo tanto, $\angle a$ y $\angle x$ tienen la misma medida, esto es, $\angle a \cong \angle x$.

58

Unidad 4 - Congruencia de triángulos

continúa en la siguiente página...

Unidad 4: Congruencia de triángulos

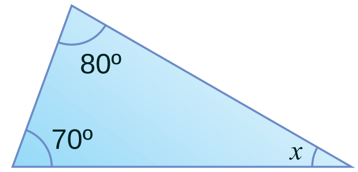
Lección 1: (1/2) Suma de las medidas de los ángulos de un triángulo

Sección 1: La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo

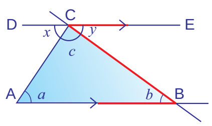
Objetivo: Verificar que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

Indicador de logro

Encuentre la medida del $\angle x$ empleando la propiedad de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo.



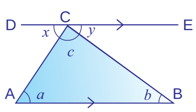
Paso 4: Se prolonga el lado AB por el vértice B, y el lado CB por ambos extremos.



$\angle b$ y $\angle y$ son ángulos alternos internos entre rectas paralelas, por lo tanto, $\angle b$ y $\angle y$ tienen la misma medida, esto es, $\angle b \cong \angle y$.

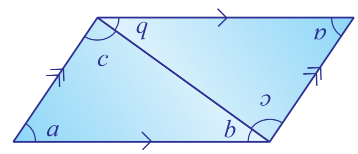
Paso 5: Los ángulos x, c y y forman un ángulo llano, es decir, la suma de sus medidas es igual a 180°, $m\angle x + m\angle c + m\angle y = 180°$.

Por los **pasos 3** y **4**, se sabe que $\angle a \cong \angle x$ y $\angle b \cong \angle y$, sustituyendo en $m\angle x + m\angle c + m\angle y = 180°$ se tiene que, $m\angle a + m\angle c + m\angle b = 180°$.



La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°.

* Explicar pasos 4 y 5 para razonar que al tener los ángulos b y y las mismas medidas se puede concluir que
$m\angle x + m\angle c + m\angle y = 180°$
lo que es equivalente a que
$m\angle a + m\angle c + m\angle b = 180°$

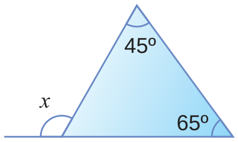


* A través de esta demostración se pretende que el alumno retenga la propiedad en su mente a largo plazo. Entender el porqué y memorizar esta propiedad, es la base para resolver ejercicios posteriores.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Encuentre la medida del $\angle x$



2. Encontrar la medida de un ángulo interno aplicando la propiedad de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo.

Ejemplo 1.2

(5 min)

* Según la propiedad vista, ¿cuánto deben sumar las medidas del ángulo x, el ángulo de 35° y el ángulo de 50°?, ¿qué se obtiene al restarle a 180° la medida de los dos ángulos conocidos?

3. Resolver Ejercicio 1.1

(10 min)

* Hacer hincapié en el inciso b), ya que este tipo de ejercicios en donde el ángulo recto es utilizado, se presenta en forma muy frecuente en esta unidad.

Solución

a) $m\angle x + 80° + 70° = 180°$

$m\angle x + 150° = 180°$

$m\angle x = 180° - 150°$

$m\angle x = 30°$

Respuesta: 30°

b) $m\angle x + 30° + 90° = 180°$

$m\angle x + 120° = 180°$

$m\angle x = 180° - 120°$

$m\angle x = 60°$

Respuesta: 60°

c) $m\angle x + 45° + 15° = 180°$

$m\angle x + 60° = 180°$

$m\angle x = 180° - 60°$

$m\angle x = 120°$

Respuesta: 120°

[Hasta aquí Clase 1]

[Desde aquí Clase 2]

Unidad 4: Congruencia de triángulos

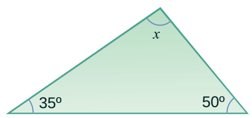
Lección 1: (2/2) Suma de las medidas de los ángulos de un triángulo

Sección 2: Medida de ángulos externos de un triángulo

Objetivos:
- Definir e identificar los ángulos externos de un triángulo.
- Encontrar la medida de un ángulo externo de un triángulo.

Ejemplo 1.2

Encuentre la medida del $\angle x$ empleando la propiedad de la suma de las medidas de ángulos internos de un triángulo.



Solución:

$m\angle x + 35° + 50° = 180°$

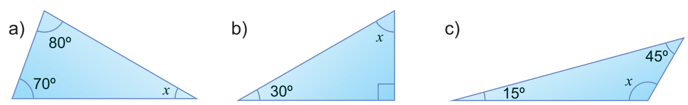
$m\angle x + 85° = 180°$

$m\angle x = 180° - 85°$

$m\angle x = 95°$

Respuesta: 95°

Ejercicio 1.1 Encuentre la medida del $\angle x$ empleando la propiedad de la suma de las medidas de ángulos internos de un triángulo.

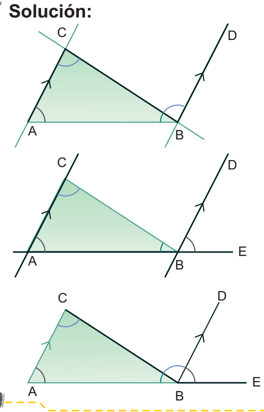


Sección 2: : Medida de ángulos externos de un triángulo

Ejemplo 1.3

En el Ejemplo 1.1 se trazó una recta paralela al lado AB, ¿qué pasaría si se traza una recta BD que pase por B que sea paralela al lado AC y se sigue el mismo razonamiento?

Solución:



Los ángulos ACB y DBC tienen la misma medida por ser ángulos alternos internos entre rectas paralelas.

El punto E está sobre la recta que prolonga al lado AB por el vértice B.

Los ángulos CAB y DBE tienen la misma medida por ser ángulos correspondientes entre rectas paralelas.

El $\angle$CBE es un ángulo externo del ΔABC.
De las figuras anteriores se deduce que
$m\angle CBE = m\angle DBC + m\angle DBE$
$= m\angle ACB + m\angle CAB$

60 Unidad 4 - Congruencia de triángulos

1. Mostrar que la medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no contiguos

Ejemplo 1.3 (20 min)

* Comparar las figuras de los pasos 3 y 4 del Ejemplo 1.1 donde se trazó una recta paralela DE al lado AB con la figura del Ejemplo 1.3 donde la recta BD es paralela al lado AC. En ambas se hicieron uso de los ángulos alternos internos, pero en este ejemplo también se utilizó la definición de ángulos correspondientes. ¿Cómo son las medidas de los ángulos ACB y DBC?, ¿por qué?, ¿cómo son las medidas de los ángulos CAB y DBE?, ¿por qué?, ¿qué ángulos forman al ángulo CBE?

continúa en la siguiente página...

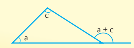
Unidad 4: Congruencia de triángulos

Lección 1: (2/2) Suma de las medidas de los ángulos de un triángulo

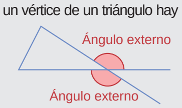
Sección 2: Medida de ángulos externos de un triángulo

Objetivos:
- Definir e identificar los ángulos externos de un triángulo.
- Encontrar la medida de un ángulo externo de un triángulo.

- Un ángulo externo de un triángulo es un ángulo formado por un lado del triángulo y la extensión de uno de sus lados contiguos.
- La medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no contiguos.
- Cada ángulo externo es suplemento del ángulo interno que comparte el mismo vértice.



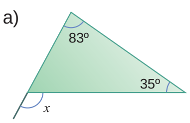
Alrededor de un vértice de un triángulo hay dos ángulos externos



Ejemplo 1.4

Encuentre la medida del $\angle x$.

a)



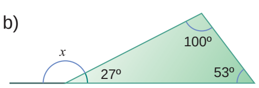
Solución:

$m\angle x = 83° + 35°$

$m\angle x = 118°$

Respuesta: 118°

b)



Solución:

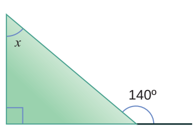
$m\angle x = 100° + 53°$

$m\angle x = 153°$

Respuesta: 153°

Los ángulos de 100° y 53° son los ángulos internos no contiguos al $\angle x$.

c)



Solución:

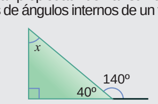
$m\angle x + 90° = 140°$

$m\angle x = 140° - 90°$

$m\angle x = 50°$

Respuesta: 50°

Otra forma de resolverlo, es encontrar el suplemento del ángulo externo y luego aplicar la propiedad de la suma de las medidas de ángulos internos de un triángulo.



$m\angle x = 180° - 90° - 40°$

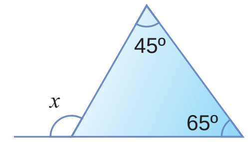
$m\angle x = 50°$

61

Libro del Estudiante - Matemáticas 8° grado

Indicador de logro

Encuentre la medida del $\angle x$



* Copiar las conclusiones del ejemplo.
* Determinar que alrededor de un vértice de un triángulo hay dos ángulos externos.
* De forma opcional, se podría identificar a través de la última figura del **Ejemplo 1.3** cuáles son los dos ángulos externos que se forman alrededor del vértice B en el $\triangle ABC$.

2. Encontrar la medida de un ángulo externo de un triángulo. Ejemplo 1.4

(10 min)

* Hacer hincapié en el inciso c). Se puede resolver aplicando la propiedad vista en clase (la medida de un ángulo externo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no contiguos) o haciendo uso del suplemento del ángulo exterior y de la propiedad de la suma de ángulos internos de un triángulo.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

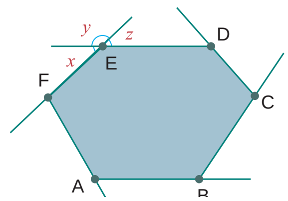
En el siguiente polígono, indica estos elementos:

a) Lados

b) Diagonales trazadas desde el vértice B

c) Lados adyacentes al lado BC

d) Ángulos externos en el vértice E



3. Resolver *Ejercicio* **1.2**

(15 min)

Solución

a) $m\angle x$ = 110°

b) $m\angle x$ = 57°

c) $m\angle x$ = 30°

[Hasta aquí Clase 2]

[Desde aquí Clase 1 Lección 2]

1. Recordar la definición de polígono y sus elementos.

(12 min)

* Distinguir una línea poligonal de un polígono.

* Determinar los elementos del polígono ABCDEF (lados, diagonales, vértices, ángulos internos, ángulos externos).

* Distinguir los dos ángulos externos que se forman en el vértice A del polígono ABCDEF.

* Nombrar los polígonos según el número de lados, mencionando los polígonos de más de 10 lados, ya que estos no se consideraron en 5to grado.

Unidad 4: Congruencia de triángulos

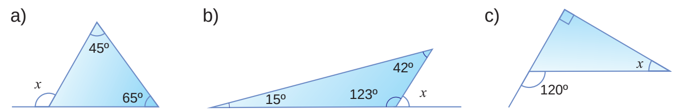
Lección 2: (1/3) Suma de las medidas de los ángulos de un polígono

Sección 1: Definición y elementos de un polígono

Objetivo: Repasar la definición y elementos de un polígono.

Ejercicio **1.2** Encuentre la medida del $\angle x$.

a) b) c)



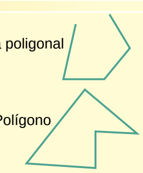
Lección 2: Suma de las medidas de los ángulos de un polígono

Sección 1: Definición y elementos de un polígono

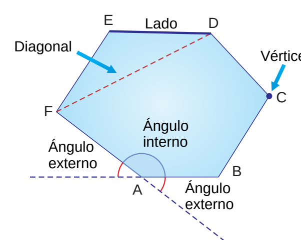
En 5to grado se aprendió la definición de polígono y sus elementos.

Una **línea poligonal** es una secuencia de segmentos consecutivos no colineales.

Un **polígono** es una figura formada por una línea poligonal cerrada.



En la figura de la derecha se presentan los elementos de un polígono.



Según el número de lados los polígonos se nombran como aparece a continuación:

Número de lados	Nombre
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octágono

Número de lados	Nombre
9	Eneágono
10	Decágono
11	Endecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

continúa en la siguiente página...

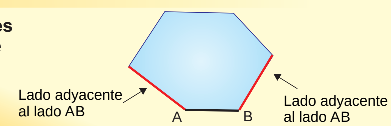
Unidad 4: **Congruencia de triángulos**

Lección 2: (1/3) Suma de las medidas de los ángulos de un polígono

Sección 1: Definición y elementos de un polígono

Objetivo: Repasar la definición y elementos de un polígono.

Se llaman **lados adyacentes** a cualesquiera dos lados de un polígono que tienen un vértice en común.



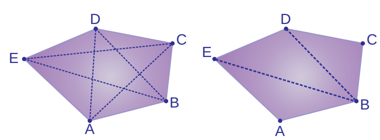
Ejemplo 2.1

Identifique en el pentágono ABCDE los siguientes elementos:

a) Lados
b) Diagonales
c) Diagonales trazadas desde el vértice B
d) Lados adyacentes al lado AB

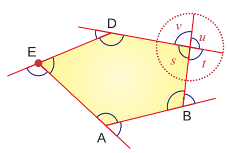
Respuesta:

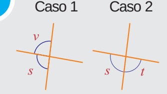
a) Lados: AB, BC, CD, DE, EA
b) Diagonales: AC, AD, BD, BE, CE
c) Diagonales trazadas desde el vértice B: BD y BE
d) Lados adyacentes al lado AB: BC y AE



Ejemplo 2.2

En el pentágono dado, indique cuáles son ángulos externos del $\angle s$,



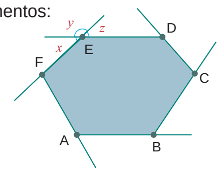


Se puede hacer lo mismo en cada uno de los vértices A, B, D y E.

Respuesta: $\angle v$ y $\angle t$

Ejercicio 2.1 En el siguiente hexágono, indique estos elementos:

a) Lados
b) Diagonales trazadas desde el vértice B
c) Lados adyacentes al lado BC
d) Ángulos externos en el vértice E



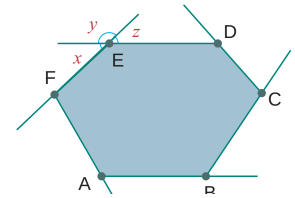
63

Libro del Estudiante - Matemáticas 8° grado

Indicador de logro

En el siguiente polígono, indica estos elementos:

a) Lados
b) Diagonales trazadas desde el vértice B
c) Lados adyacentes al lado BC
d) Ángulos externos en el vértice E



2. Copiar y explicar la definición de lados adyacentes.
(3 min)

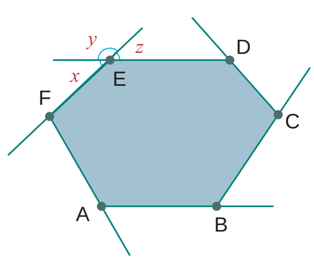
3. Identificar elementos de un polígono. *Ejemplo 2.1*
(10 min)
¿Cuántos lados tiene el polígono ABCDE?, ¿cuáles son?, ¿cuántas diagonales tiene el polígono ABCDE?, ¿cuáles son?, ¿cuáles son las diagonales trazadas desde el vértice B?, ¿cuáles son los lados adyacentes al lado AB?

4. Identificar ángulos externos de un polígono en un vértice dado. *Ejemplo 2.2*
(10 min)
¿Cuántos ángulos se forman en el vértice C del pentágono ABCDE?, ¿cuáles son ángulos internos?, ¿cuáles son ángulos externos?, en general, ¿cuántos ángulos externos se forman en cada vértice de un polígono cualquiera?

5. Resolver *Ejercicio 2.1*
(10 min)

Solución

a) AB,BC,CD,DE,EF, FA
b) BD,BE y BF
c) AB y DC
d) $\angle x$ y $\angle z$ (Ver figura)



Indicador de logro

Completa la siguiente tabla:

Número de lados	Nombre del polígono	Polígono	Número de diagonales trazadas desde un mismo vértice	Número de triángulos que se forman	Expresión numérica de la suma de las medidas de los ángulos internos
6					
7					
8					

1. **Encontrar la suma de las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero.**

Ejemplo 2.3

(10 min)

¿Cuántas diagonales tiene un cuadrilátero?, ¿cuántas pueden trazarse desde uno solo de sus vértices?, ¿cómo divide esa diagonal al cuadrilátero?, ¿cuál es la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo?, ¿cuál es la suma de las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero?

* Indicar que la diagonal AC es el lado común de los triángulos ADC y ABC.

* Distinguir entre el número de diagonales de un polígono, de aquellas que pueden ser trazadas desde un mismo vértice.

2. **Encontrar la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono.**

Ejemplo 2.4

(20 min)

¿Cómo encontrar una fórmula que generalice la expresión numérica de la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono?

* Para analizar y completar la tabla de este ejemplo, se utilizarán las diagonales trazadas desde un mismo vértice para dividir los diferentes polígonos en triángulos.

Unidad 4: Congruencia de triángulos

Lección 2: (2/3) Suma de las medidas de los ángulos de un polígono

Sección 2: La suma de las medidas de los ángulos de un polígono

Objetivo: Encontrar la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono.

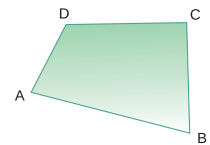
Sección 2: La suma de las medidas de los ángulos de un polígono

Ejemplo 2.3

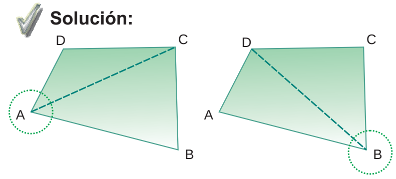
Utilizando el siguiente cuadrilátero, responda:

a) ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice cualquiera?

b) ¿Qué puede concluirse con respecto a la suma de los ángulos internos de ese cuadrilátero?

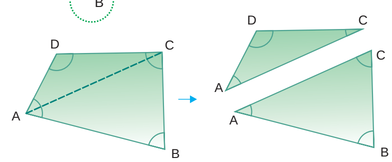


Solución:



a) Desde un vértice cualquiera, se puede trazar una sola diagonal. Igual sucedería en los vértices C ó D

b) El cuadrilátero se divide en 2 triángulos, por lo que la suma de sus ángulos internos es: $180° \times 2 = 360°$.



Ejemplo 2.4

Utilizando el procedimiento del Ejemplo 2.3 y analizando la siguiente tabla, responda:

Número de lados	Nombre del polígono	Polígono	Número de diagonales trazadas desde un mismo vértice	Número de triángulos que se forman	Expresión numérica de la suma de las medidas de los ángulos internos
3	Triángulo		0	1	$180° \times 1 = 180°$
4	Cuadrilátero		1	2	$180° \times 2 = 360°$
5	Pentágono		2	3	$180° \times 3 = 540°$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n					

* Inducir al alumno para que observe la relación entre el número de lados del polígono y el número de diagonales trazadas desde un mismo vértice; de igual forma, la relación entre el número de lados y el número de triángulos que se forman en el polígono.

continúa en la siguiente página...

Unidad 4: Congruencia de triángulos

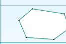
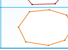
Lección 2: (2/3) Suma de las medidas de los ángulos de un polígono

Sección 2: La suma de las medidas de los ángulos de un polígono

Objetivo: Encontrar la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono.

Indicador de logro

Completa la siguiente tabla:

Número de lados	Nombre del polígono	Polígono	Número de diagonales trazadas desde un mismo vértice	Número de triángulos que se forman	Expresión numérica de la suma de las medidas de los ángulos internos
6					
7					
8					

a) ¿Cómo se relaciona el número de lados del polígono y las diagonales trazadas desde un mismo vértice?

b) ¿Cómo se relaciona el número de lados del polígono y la cantidad de triángulos en que se divide?

c) ¿Cuál es la expresión algebraica para encontrar la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono?

Solución:

a) 3 − 3 = 0
4 − 3 = 1
5 − 3 = 2
⋮
número de lados − 3 = Diagonales trazadas desde un mismo vértice

Si n es el número de lados del polígono, entonces
Diagonales trazadas desde un mismo vértice = $n - 3$

b) 3 − 2 = 1
4 − 2 = 2
5 − 2 = 3
⋮
número de lados − 2 = Número de triángulos que se forman con diagonales trazadas desde un mismo vértice

Si n es el número de lados del polígono, entonces
Número de triángulos = $n - 2$

c) Para encontrar la suma de las medidas de los ángulos internos de cualquier polígono, primero lo dividimos en triángulos que se forman con diagonales trazadas desde un mismo vértice y luego multiplicamos 180° por ese número.

180° × número de triángulos
= 180° ×(número de lados − 2)
= 180° × (n − 2)
= 180° (n − 2)

Un polígono con n lados se puede dividir en (n − 2) triángulos con (n − 3) diagonales que pasan por un mismo vértice.

La suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono de n lados es 180° (n − 2).

Número de lados	Nombre del polígono	Divida en triángulos usando las diagonales	Número de diagonales trazadas desde un mismo vértice	Número de triángulos que se forman	Expresión numérica de la suma de las medidas de los ángulos internos
n	n -ágono	n	n − 3	n − 2	180° (n − 2)

65

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

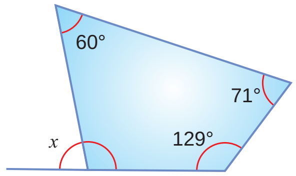
¿Qué relación hay entre el número de lados de un polígono y los triángulos formados por las diagonales trazadas desde un mismo vértice?

* Deducir y concluir que si un polígono tiene n lados, habrán n - 2 triángulos formados por las n - 3 diagonales trazadas desde un mismo vértice.
* Los alumnos deben responder claramente a la pregunta: ¿Cómo se puede encontrar la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono de n lados? A medida que aumenta el número de lados de un polígono regular, ¿a qué figura geométrica se asemeja?
* Observar que con la fórmula deducida, también se puede determinar cuál es el polígono dada la suma de las medidas de sus ángulos internos o determinar cuánto mide cada uno de los ángulos internos de un polígono. Sin embargo, en esta edición no se desarrollarán este tipo de ejercicios.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Encuentre la medida del ángulo x



3. Resolver *Ejercicio* **2.2**

(15 min)

* Completar la tabla siguiendo el modelo presentado en el *Ejemplo* **2.4**

Solución

Ver tabla en la parte inferior.

[Hasta aquí Clase 2]

[Desde aquí Clase 3]

1. Encontrar la medida de un ángulo interno de un polígono *Ejemplo* **2.5**

(10 min)

* ¿Cuánto suman las medidas de los ángulos internos del pentágono?, ¿del cuadrilátero?, iniciando con la $m\angle x$ y luego siguiendo el movimiento contrario al de las manecillas del reloj (sentido positivo de los ángulos), ¿cuál sería el planteamiento de la ecuación?, al resolver la ecuación y encontrar la $m\angle x$, luego sumando todas las medidas de los ángulos internos, ¿es esta suma igual a la encontrada en el paso 1?

continúa en la siguiente página...

Unidad 4: Congruencia de triángulos

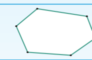
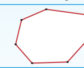
Lección 2: (3/3) Suma de las medidas de los ángulos de un polígono

Sección 2: La suma de las medidas de los ángulos de un polígono

Objetivo:

- Determinar la medida de un ángulo interno de un polígono.
- Encontrar la suma de las medidas de los ángulos externos de un polígono.

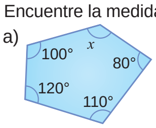
Ejercicio **2.2** Complete la siguiente tabla:

Número de lados	Nombre del polígono	Polígono	Número de diagonales trazadas desde un mismo vértice	Número de triángulos que se forman	Expresión numérica de la suma de las medidas de los ángulos internos
6					
7					
8					

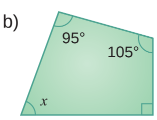
Ejemplo **2.5**

Encuentre la medida del $\angle x$:

a)



b)



Solución

a)

Paso 1: Encontrar la suma de las medidas de los ángulos internos del polígono

Suma de las medidas de los ángulos internos de un pentágono

Un pentágono tiene 5 lados, entonces

180° (5 – 2)

= 180° (3)

= 540°

Paso 2: Plantear la ecuación para encontrar el valor de la $m\angle x$

$m\angle x + 100° + 120° + 110° + 80° = 540°$

$m\angle x + 410° = 540°$

Paso 3: Resolver la ecuación

$m\angle x = 540° - 410°$

$m\angle x = 130°$

b)

Suma de las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero

Un cuadrilátero tiene 4 lados, entonces

180° (4 – 2)

= 180° (2)

= 360°

$m\angle x + 90° + 105° + 95° = 360°$

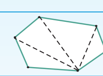
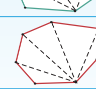
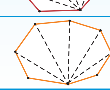
$m\angle x + 290° = 360°$

$m\angle x = 360° - 290°$

$m\angle x = 70°$

Respuesta: a) 130° b) 70°

66 *Unidad 4 - Congruencia de triángulos*

Número de lados	Nombre del polígono	Polígono	Número de diagonales trazadas desde un mismo vértice	Número de triángulos que se forman	Expresión numérica de la suma de las medidas de los ángulos internos
6	Hexágono		3	4	180° × 4 = 720
7	Heptágono		4	5	180° × 5 = 900
8	Octágono		5	6	180° × 6 = 1080

Unidad 4:
Congruencia de triángulos

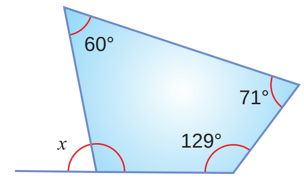
Lección 2: (3/3) Suma de las medidas de los ángulos de un polígono

Sección 2: La suma de las medidas de los ángulos de un polígono

Objetivo:
- Determinar la medida de un ángulo interno de un polígono.
- Encontrar la suma de las medidas de los ángulos externos de un polígono.

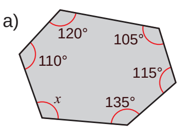
Indicador de logro

Encuentre la medida del ángulo x

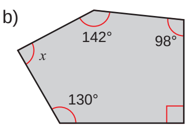


Ejercicio 2.3 Encuentre la medida del $\angle x$:

a)



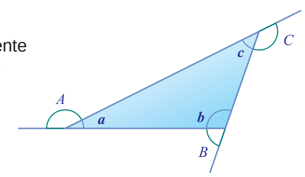
b)



Ejemplo 2.6

En el siguiente triángulo ABC, considere solamente un ángulo externo por cada vértice del triángulo.
a) Si se suman las medidas de los ángulos internos y externos, ¿cuál es el total?

b) Si se suman las medidas de los ángulos externos, ¿cuál es el total?



Solución:

a) Las letras minúsculas a, b, c representan los ángulos internos y las letras mayúsculas A,B,C representan los ángulos externos.

Por ser ángulos suplementarios, $m\angle A + m\angle a = 180°$
$m\angle B + m\angle b = 180°$
$m\angle C + m\angle c = 180°$
Total $= 540°$

La suma de las medidas de los ángulos internos y externos del triángulo, también puede expresarse como 180° × 3, donde 3 es el número de lados.

Respuesta: Suma de las medidas de ángulos internos y externos = 540°

b) Por la propiedad de la suma de ángulos internos de un triángulo, se sabe que
$m\angle a + m\angle b + m\angle c = 180°$

Suma de las medidas de ángulos internos y externos	−	Suma de las medidas de ángulos internos	=	Suma de las medidas de ángulos externos
540°	−	180°	=	360°

Respuesta: Suma de las medidas de ángulos externos = 360°

Si n es el número de lados del polígono, la suma de las medidas de los ángulos internos y externos considerando solamente un ángulo exterior por cada vértice del triángulo es, 180° × n.

La suma de las medidas de los ángulos externos para cualquier polígono de n lados es:

$180°n - 180°(n-2)$
$= 180°n - 180°n + 360°$
$= 360°$

La suma de las medidas de los ángulos externos de un polígono es 360°.

67

Libro del Estudiante - Matemáticas 8° grado

2. Resolver **Ejercicio 2.3**
(8 min)

Soluciones

a) $m\angle x$ = 135°

b) $m\angle x$ = 80°

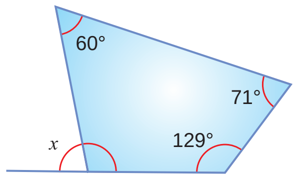
3. Verificar que la suma de las medidas de los ángulos externos de un polígono es 360°. **Ejemplo 2.6**
(10 min)

¿Qué tipo de ángulos son ∠A y $\angle a$?, ¿cuánto deben sumar sus medidas?, tomando esta misma suma en cada vértice del ΔABC, ¿cuánto suman en total las medidas de los ángulos externos e internos?, si a esta suma de las medidas de ángulos internos y externos se le resta la suma de las medidas de ángulos internos del ΔABC, ¿qué nos queda?, ¿a cuántos grados equivale?, generalizando, ¿cuánto es la suma de las medidas de los ángulos externos para cualquier polígono de n lados?

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Encuentra la medida del ángulo x.



Unidad 4: Congruencia de triángulos

Lección 2: (3/3) Suma de las medidas de los ángulos de un polígono

Sección 2: La suma de las medidas de los ángulos de un polígono

Objetivo: Encontrar la suma de las medidas de los ángulos externos de un polígono.

4. Encontrar la medida de un ángulo externo de un polígono. *Ejemplo* **2.7**

(10 min)

¿Cuánto suman las medidas de los ángulos externos de un cuadrilátero?, ¿de un pentágono? iniciando con la $m\angle x$ y siguiendo el movimiento contrario al de las manecillas del reloj (sentido positivo de los ángulos), ¿cuál sería el planteamiento de la ecuación para encontrar la $m\angle x$?

* En el inciso b), para obtener la $m\angle x$, ¿qué debe encontrarse primero?, haciendo uso de la suma de las medidas de los ángulos internos del pentágono, ¿cuál es la $m\angle y$?, con ese valor, ¿cuál es la $m\angle x$?

5. Resolver *Ejercicio* **2.4**

(7 min)

Solución

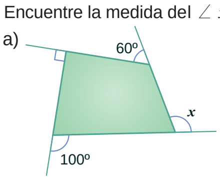
a) $m\angle x$ = 150°

b) $m\angle x$ = 80°

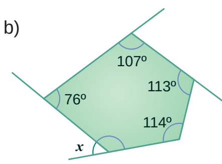
Ejemplo **2.7**

Encuentre la medida del $\angle x$:

a)



b)



Primero se calculará el suplemento del x, utilizando la fórmula para la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono y luego se calculará la m x.

Solución

a) $m\angle x + 60° + 90° + 100° = 360°$

$m\angle x + 250° = 360°$

$m\angle x = 360° - 250°$

$m\angle x = 110°$

Respuesta: 110°

b) La suma de las medidas de los ángulos internos de un pentágono es igual a 540°, por lo que, sea y el ángulo suplementario del $\angle x$,

$m\angle y + 114° + 113° + 107° + 76° = 540°$

$m\angle y + 410° = 540°$

$m\angle y = 540° - 410°$

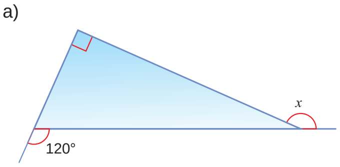
$m\angle y = 130°$

Así, la $m\angle x = 180° - 130° = 50°$

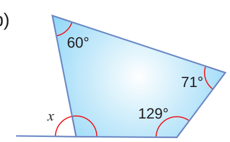
Respuesta: 50°

Ejercicio **2.4** Encuentre la medida del ángulo x:

a)



b)



Unidad 4: Congruencia de triángulos

Lección 3: (1/7) Congruencia de triángulos

Sección 1: Congruencia

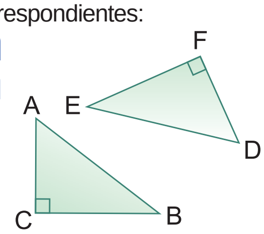
Objetivos:
- Definir figuras congruentes.
- Establecer la relación entre las partes correspondientes de triángulos congruentes.

Indicador de logro

Dado que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, complete las congruencias para las siguientes partes correspondientes:

$\angle A \cong$ ☐

$\overline{CB} \cong$ ☐

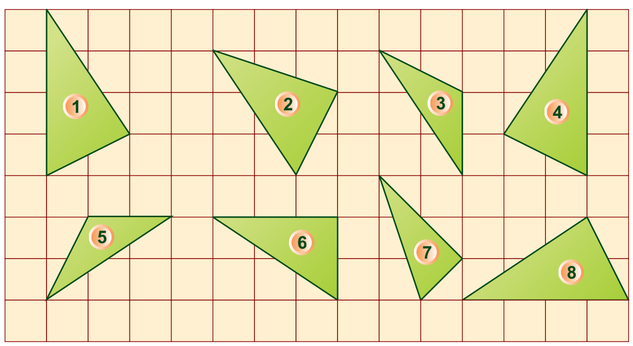


Lección 3: Congruencia de triángulos

Sección 1: Congruencia

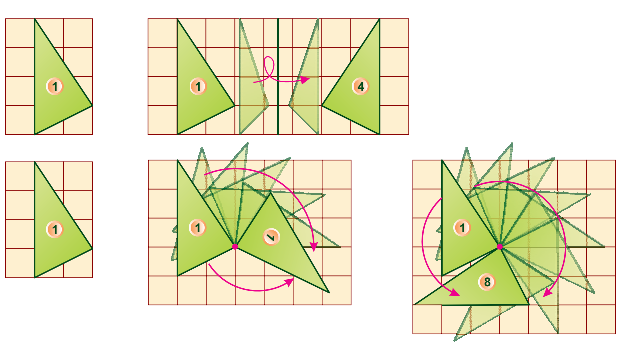
Ejemplo 3.1

Encuentre los triángulos que se sobreponen exactamente al triángulo 1.



Solución:

¿Qué pasaría si volteo el triángulo 1 ?, ¿qué pasaría si lo giro ?



Si se voltea, el triángulo 1 se sobrepone exactamente al triángulo 4.
Si se gira adecuadamente, el triángulo 1, se sobrepone exactamente al triángulo 8.

Respuesta: triángulos 4 y 8

69

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

1. Definir figuras congruentes.

Ejemplo 3.1

(20 min)

* Traer cortados los 8 triángulos y ubicarlos sobre una cuadrícula.

* Pedir a los estudiantes que los coloquen unos sobre otros de tal manera que puedan identificar cuáles coinciden exactamente.

* Si se voltea el triángulo 1, ¿a quién se sobrepone exactamente?, ¿y si se gira a la derecha?, ¿y si se gira a la izquierda?

* Determinar los movimientos que deben hacerse para que el triángulo 1 se sobreponga a los triángulos 4 y 8.

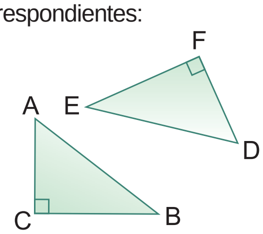
continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Dado que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, complete las congruencias para las siguientes partes correspondientes:

$\angle A \cong$ ☐

$\overline{CB} \cong$ ☐



* Copiar la definición de figuras congruentes.

¿Qué sucede después de girar, voltear o deslizar una figura?, ¿sigue teniendo la misma forma?, ¿el mismo tamaño?, ¿cómo son los lados y ángulos correspondientes de figuras congruentes?

2. Resolver *Ejercicio* **3.1**

(5 min)

Solución

El triángulo 5 es congruente al triángulo 3.

3. Definir partes correspondientes de figuras congruentes.

(10 min)

* Las partes correspondientes están en la misma posición en las dos figuras congruentes, ¿cuáles son los vértices correspondientes en el ΔABC y ΔDEF?, ¿los lados correspondientes?, ¿los ángulos correspondientes?

* Utilizando los triángulos 1 y 4 y el diagrama presentado al final del ejemplo, establecer la correspondencia entre los vértices, lados y ángulos.

Unidad 4: Congruencia de triángulos

Lección 3: (1/7) Congruencia de triángulos

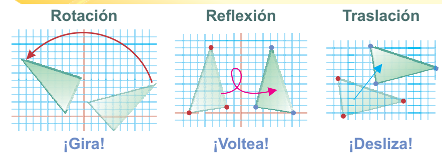
Sección 1: Congruencia

Objetivos:

- Definir figuras congruentes.
- Establecer la relación entre las partes correspondientes de triángulos congruentes.

Si se puede convertir una forma en otra usando giros, volteos y deslizamientos, las dos formas son **congruentes**.

Dos figuras planas son congruentes cuando se sobreponen exactamente después de mover y/o dar vuelta a una de las dos.
"Congruente" se representa con el símbolo .



Después de estas transformaciones (girar, voltear, deslizar) la forma sigue teniendo el mismo tamaño, ángulos y longitudes de lados.

Ejercicio **3.1** Utilizando los triángulos del *Ejemplo* 3.1, encuentre los triángulos que son congruentes al triángulo 3

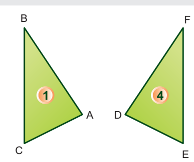
Cuando dos figuras son congruentes, se dice que los vértices, lados, ángulos de una de las figuras corresponden respectivamente a los vértices, lados y ángulos de la otra figura.

Los **segmentos correspondientes** de dos figuras congruentes tienen la misma medida, igual que sus ángulos correspondientes.

Colocando los vértices A, B y C al triángulo 1 y los vértices D, E y F al triángulo 4, se tienen 3 correspondencias:

$\overline{AB}$ significa segmento AB. Un lado es un tipo de segmento. En este libro se utiliza la misma expresión $\overline{AB}$ para decir lado

Los vértices A, B y C del Δ ABC se corresponden respectivamente con los vértices D, F y E del Δ DFE.
Se escribe $\Delta ABC \cong \Delta DFE$.



Los lados correspondientes son congruentes:
$\overline{AB} \cong \overline{DF}$, $\overline{BC} \cong \overline{FE}$ y $\overline{CA} \cong \overline{ED}$

Los ángulos correspondientes son congruentes:
$\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle F$ y $\angle C \cong \angle E$

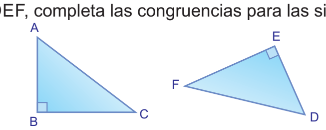
El siguiente diagrama muestra las partes que se corresponden (vértices, ángulos y lados).

$\Delta ABC \cong \Delta DFE$

Ejemplo **3.2**
Dado que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, completa las congruencias para las siguientes partes correspondientes:

$\angle A \cong$ ☐

$\overline{CB} \cong$ ☐



70 *Unidad 4 - Congruencia de triángulos*

4. Identificar las partes correspondientes de triángulos congruentes.

Ejemplo **3.2**

(5 min)

¿Qué movimiento debe hacerse para hacer coincidir los vértices, lados y ángulos de los triángulos ABC y DEF?

continúa en la siguiente página...

Unidad 4: **Congruencia de triángulos**

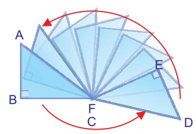
Lección 3: (2/7) Congruencia de triángulos

Sección 2: Criterios de congruencia de triángulos

Objetivo: Trazar triángulos congruentes dadas sus medidas.

Solución:

Puede observarse que el ∠A es correspondiente con el ∠D y el lado CB es correspondiente con el lado FE.



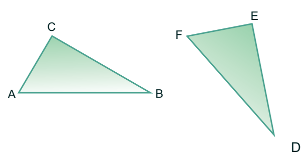
Respuesta: ∠A ≅ ∠D

$\overline{CB}$ ≅ FE

Ejercicio **3.2** Dado que ΔABC ≅ ΔFDE, completa las congruencias para las siguientes partes correspondientes:

∠F ≅ ☐

$\overline{BC}$ ≅ ☐



Sección 2: Criterios de congruencia de triángulos

Ejemplo **3.3**

En su cuaderno, construya los triángulos que cumplen las siguientes condiciones:

a) AB = 5 cm, BC = 4 cm, AC = 2 cm

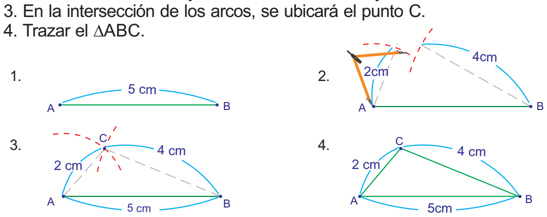
b) AB = 6 cm, $m\angle$A = 30°, AC = 4 cm

c) AB = 6 cm, $m\angle$A = 30°, $m\angle$B = 50°

Recuerde que:
$\overline{AB}$ designa al segmento AB.
AB designa la medida del segmento AB.

Solución

a) 1. Trazar el segmento AB como base.
2. Trazar arcos de 2 cm y 4 cm con centros en A y B.
3. En la intersección de los arcos, se ubicará el punto C.
4. Trazar el ΔABC.



Compare el triángulo que acaba de construir, con los triángulos construidos por sus compañeros.

71

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Indicador de logro

Construya el triángulo que cumple las siguientes condiciones:

AB = 6 cm, $m\angle$A = 40°, $m\angle$B = 60°

5. Resolver *Ejercicio* **3.2**

(5 min)

¿Qué movimiento debe hacerse para hacer coincidir los vértices, lados y ángulos de los triángulos ABC y FDE?

Solución

∠F ≅ ∠A

$\overline{BC}$ ≅ $\overline{DE}$

[Hasta aquí Clase 1]

[Desde aquí Clase 2]

1. Construir triángulos de acuerdo a las medidas dadas.

Ejemplo **3.3** **Inciso a)**

(15 min)

* Construir sobre cartulina o papel construcción el primer triángulo según las condiciones dadas, recortarlo.
* Hacer que los estudiantes comparen el triángulo que construyeron con los triángulos construidos por los demás compañeros.

¿Cuántos triángulos con las mismas longitudes de los lados se pudieron construir?, ¿tienen la misma forma?, ¿el mismo tamaño?

* Concluir que cuando se dan las medidas de los tres lados, sólo existe un triángulo que cumple esas condiciones.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Construya el triángulo que cumple las siguientes condiciones:

AB = 6 cm, $m\angle A = 40°$, $m\angle B = 60°$

2. Construir triángulos de acuerdo a las medidas dadas.

Ejemplo 3.3 Inciso b)

(15 min)

* Construir sobre cartulina o papel construcción el segundo triángulo según los datos dados, recortarlo.

* Hacer que los estudiantes comparen el suyo con el de los demás compañeros. ¿Será el único triángulo que se forma bajo estas 3 condiciones?

* De este inciso se sabe que cuando están dadas las medidas de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos sólo hay un triángulo que cumple esas condiciones.

3. Construir triángulos de acuerdo a las medidas dadas.

Ejemplo 3.3 Inciso c)

(15 min)

* Realizar el mismo procedimiento para trazar el tercer triángulo. ¿Será también el único triángulo que se forma con estas condiciones?

* Concluir que cuando están dadas las medidas de un lado y los ángulos adyacentes a él, sólo hay un triángulo que cumple esas condiciones.

* Pegar los tres triángulos construidos en el cuaderno y escribir la conclusión para cada uno.

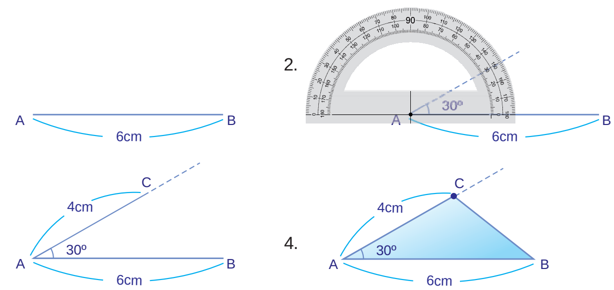
Unidad 4: **Congruencia de triángulos**

Lección 3: (2/7) Congruencia de triángulos

Sección 2: Criterios de congruencia de triángulos

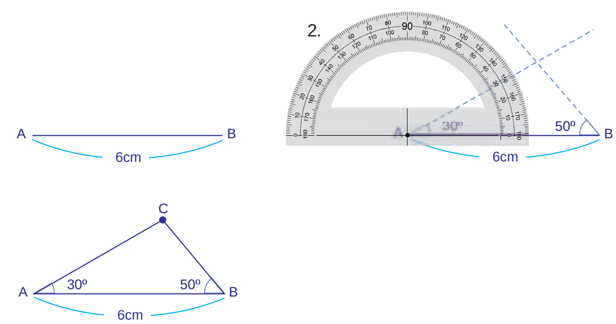
Objetivo: Trazar triángulos congruentes dadas sus medidas.

b) 1. Trazar el segmento AB como base.
2. Trazar un ángulo de 30° con vértice en A.
3. Sobre la línea trazada en el paso 2, se medirán los 4 cm para ubicar el punto C.
4. Trazar el segmento CB.



Compare el triángulo que acaba de construir, con los triángulos construidos por sus compañeros.

c) 1. Trazar el segmento AB como base.
2. Trazar los ángulos de 30° y 50° con vértices en A y B.
3. En la intersección de los rayos se ubicará el punto C.



Compare el triángulo que acaba de construir, con los triángulos construidos por sus compañeros.

72

Unidad 4 - Congruencia de triángulos

Unidad 4: Congruencia de triángulos

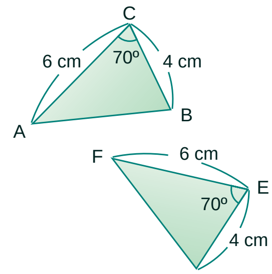
Lección 3: (3/7) Congruencia de triángulos

Sección 2: Criterios de congruencia de triángulos

Objetivo: Establecer los criterios de congruencia de triángulos.

Indicador de logro

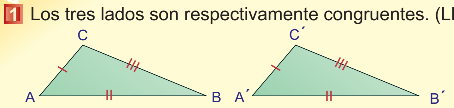
Identifica el criterio de congruencia (LLL, LAL, ALA) utilizado para indicar que los siguientes triángulos son congruentes.



Criterios de congruencia de triángulos

Dos triángulos son congruentes si se satisface uno de los siguientes criterios:

1. Los tres lados son respectivamente congruentes. (LLL)

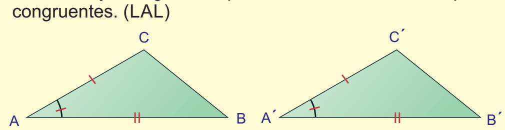


$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$

$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$

$\overline{CA} \cong \overline{C'A'}$

2. Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos son respectivamente congruentes. (LAL)

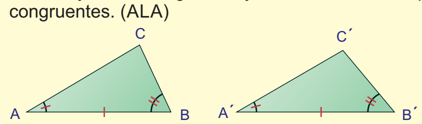


$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$

$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

$\angle A \cong \angle A'$

3. Un lado y los dos ángulos adyacentes a él son respectivamente congruentes. (ALA)



$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$

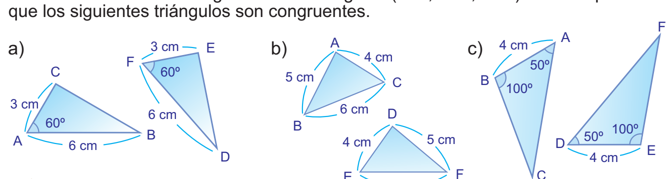
$\angle A \cong \angle A'$

$\angle B \cong \angle B'$

"Respectivamente" es ¡muy importante!

Ejemplo 3.4

Identifica el criterio de congruencia de triángulos (LLL, LAL, ALA) utilizado para indicar que los siguientes triángulos son congruentes.



Solución:

a) Dado que $\overline{AC} \cong \overline{FE}$, $\angle A \cong \angle F$, $\overline{AB} \cong \overline{FD}$, se concluye que $\Delta ABC \cong \Delta FDE$ por criterio LAL.

b) Dado que $\overline{AB} \cong \overline{DF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DE}$, $\overline{CB} \cong \overline{EF}$, se concluye que $\Delta ABC \cong \Delta DFE$ por criterio LLL.

c) Dado que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, se concluye que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ por criterio ALA.

73

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

1. Establecer los criterios de congruencia de triángulos.

(20 min)

* Recordar las conclusiones para cada uno de los 3 casos vistos en el **Ejemplo 3.3**.

¿Cómo se pueden reconocer las partes respectivamente congruentes?

* Para el inciso a) concluir que si los tres lados de un triángulo son congruentes respectivamente con los tres lados de otro triángulo, los triángulos son congruentes.

* Denotar que la palabra "respectivamente" es de suma importancia y se refiere a que si está nombrando una primera parte del ΔABC, esa debe ser correspondiente a la primera parte que está en el $\Delta A'B'C'$.

* Pedir a los estudiantes que abran su libro y vean el resumen de los criterios de congruencia de triángulos.

* Llamar al tipo de congruencia anterior "Criterio de congruencia Lado-Lado-Lado" y abreviarlo como LLL.

* Desarrollar los criterios de congruencia LAL y ALA en forma similar.

2. Analizar cada par de triángulos e identificar el criterio utilizado para concluir que son triángulos congruentes.

Ejemplo 3.4

(15 min)

* Establecer las partes correspondientes que son congruentes. Recalcar que saber reconocer esto es de suma importancia para este y otros ejercicios que posteriormente se analizarán.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Dibuja los triángulos $\triangle ABC$ que cumplen con las siguientes medidas:

$AB = 7$ cm, $m\angle A = 40°$, $BC = 5$ cm

3. Resolver *Ejercicio* **3.3**

(10 min)

Solución

a) Dado que $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, $\overline{BC} \cong \overline{FD}$ y $\overline{AC} \cong \overline{ED}$, se concluye que $\triangle ABC \cong \triangle EFD$ por criterio LLL

b) Dado que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle A \cong \angle D$ y $\angle B \cong \angle E$, se concluye que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ por criterio ALA

c) Dado que $\overline{AC} \cong \overline{FE}$, $\angle C \cong \angle E$ y $\overline{BC} \cong \overline{DE}$, se concluye que $\triangle ABC \cong \triangle FDE$ por criterio LAL

[Hasta aquí Clase 3]

[Desde aquí Clase 4]

1. Construir triángulos diferentes con las mismas condiciones dadas. *Ejemplo* **3.5**

(25 min)

¿Cuántos triángulos se pueden construir bajo las tres condiciones que da el ejemplo? Cuando se dan las medidas de dos lados y un ángulo no comprendido entre ellos, se pueden trazar dos triángulos con las mismas condiciones. Este caso se explicará a profundidad al ver la Ley de Senos en Matemática II de 10mo Grado.

* Concluir que las condiciones dadas en este ejemplo, en general no pueden tomarse como un criterio de congruencia de triángulos.

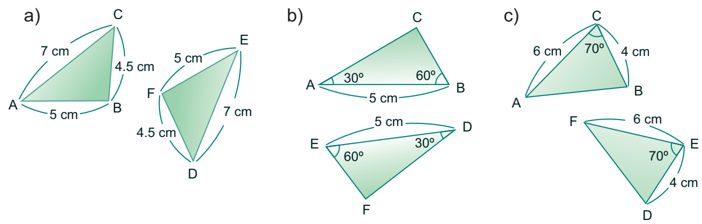
Unidad 4: Congruencia de triángulos

Lección 3: (4/7) Congruencia de triángulos

Sección 2: Criterios de congruencia de triángulos

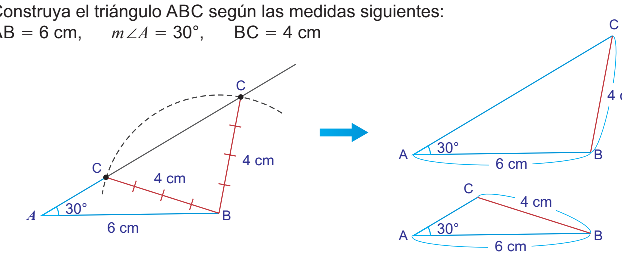
Objetivos:
- Identificar construcciones de 2 triángulos diferentes con las mismas condiciones dadas.
- Concluir que LLA por lo general, no es un criterio de congruencia de triángulos.

Ejercicio **3.3** Identifica el criterio de congruencia de triángulos (LLL, LAL, ALA) utilizado para indicar que los siguientes triángulos son congruentes.



Ejemplo **3.5**

Construya el triángulo ABC según las medidas siguientes:
$AB = 6$ cm, $m\angle A = 30°$, $BC = 4$ cm



En esta construcción se puede observar que hay dos triángulos que cumplen las condiciones dadas, pero no son congruentes.

De este ejemplo se sabe que cuando están dadas las medidas de dos lados y un ángulo no comprendido entre ellos, hay casos en que se pueden producir 2 triángulos no congruentes: un triángulo obtusángulo y un triángulo acutángulo.

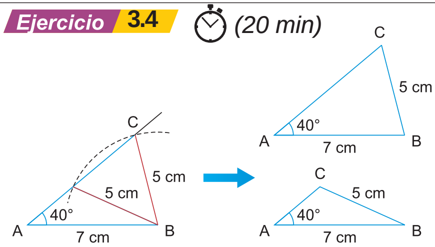
El caso Lado-Lado-Ángulo no comprendido se acostumbra llamarlo el caso ambiguo y por lo general, no puede tomarse como un criterio de congruencia de triángulos.

Ejercicio **3.4** Dibuja los $\triangle ABC$ que cumplen con las siguientes medidas:
$AB = 7$ cm, $m\angle A = 40°$, $BC = 5$ cm

De aquí en adelante se focalizará en criterios de congruencia de triángulos, por lo que, para referirnos a ellos, se escribirá únicamente criterios de congruencia.

2. Resolver *Ejercicio* **3.4** *(20 min)*

Solución



Unidad 4:
Congruencia de triángulos

Lección 3: (5/7) Congruencia de triángulos

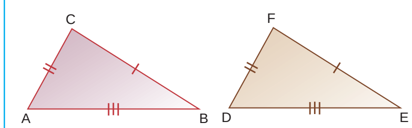
Sección 3: Demostraciones geométricas

Objetivos:
- Definir los términos: hipótesis, conclusión y demostración o prueba.
- Definir el método directo (Si...entonces) para la demostración en geometría.

Indicador de logro

Auxiliándose de la figura, escribe la hipótesis y la conclusión del enunciado de la demostración siguiente:

Si los tres lados de un triángulo son respectivamente congruentes con los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.



Sección 3: Demostraciones Geométricas

La demostración de la validez de una proposición a través del razonamiento se fundamenta en otras proposiciones ya demostradas.

El método de demostración a utilizar en este libro es el razonamiento directo o deductivo.

Por demostración directa se entiende el encadenamiento lógico de las proposiciones, de manera que, de la(s) hipótesis es posible llegar a la conclusión. La demostración en geometría generalmente consta de:

a) La **FIGURA** ilustra la proposición que desea demostrar y está constituida por trazos fundamentales y trazos auxiliares, estos últimos se indican con líneas no continuas. La claridad de la figura ayuda a la demostración, pero de ninguna manera constituye la demostración.

b) La **HIPÓTESIS** es el supuesto que se acepta como cierto y que sirve de base para el razonamiento.

c) El **RAZONAMIENTO** es el conjunto de afirmaciones y justificaciones que en orden lógico relacionan la hipótesis con la conclusión y permite la deducción de ésta a partir de la hipótesis.

d) La **CONCLUSIÓN** es la proposición deducida mediante el razonamiento.

Independientemente del grado de dificultad que tenga la demostración de una proposición siempre llevará el camino "hipótesis - conclusión". Es también muy conveniente prefijar un "Plan de desarrollo de la demostración" con el objeto de tener claro el camino que a nuestro juicio es el más conveniente para ligar lo que suponemos cierto (la hipótesis) con lo que deseamos demostrar (la conclusión).

Un tipo de proposición importante para el razonamiento deductivo tiene la forma:

Si [ ] entonces [ ]
Hipótesis *Conclusión*

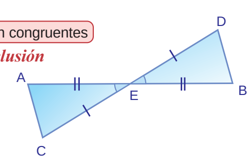
Ejemplo 3.6

Auxiliándose de la figura y dada la siguiente proposición, formúlense la hipótesis y la conclusión.

Si el segmento AB y el segmento CD se bisecan en el punto E, demuestre que los segmentos AC y BD son congruentes.

Solución:

Si [$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisecan en E] entonces [$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son congruentes]
Hipótesis *Conclusión*



75
Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

1. Establecer las partes de las demostraciones que se utilizarán en el LE.
(20 min)

* Si los estudiantes tienen dificultad para comprender esta parte, no hay mucha necesidad de enfatizarla. Solamente focalice "hipótesis" y "conclusión" para aprender la estructura de la demostración.

* Establecer las partes de una demostración.

* Indicar que antes de iniciar una demostración, debe tenerse claro el plan que se seguirá para llegar a la conclusión, resultada a partir de la hipótesis.
¿Qué significa auxiliarse de una figura?

Son dos los registros que se desarrollan en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. El registro figural para designar las figuras y sus propiedades y el registro de la lengua natural para enunciar las definiciones, los teoremas, las hipótesis... Y en geometría, a diferencia de otras disciplinas de la matemática, "es necesario que los tratamientos figurales y discursivos se efectúen simultáneamente y de manera interactiva" (Duval, 1999, p. 147).

2. Ayudar a los estudiantes proporcionando ideas clave para formular la hipótesis y la conclusión solicitadas. **Ejemplo 3.6** *(15 min)*

* Analizar el planteamiento del ejemplo. ¿Qué es la hipótesis de una demostración?, ¿qué es la conclusión?, ¿de dónde se obtiene?

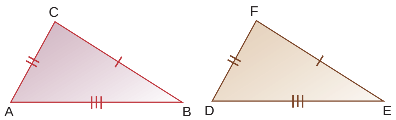
* La hipótesis es la información dada, sin embargo debe formularse haciendo uso tanto del planteamiento en lenguaje natural así como de las figuras geométricas que se presentan.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Auxiliándose de la figura, escribe la hipótesis y la conclusión del enunciado de la demostración siguiente:

Si los tres lados de un triángulo son respectivamente congruentes con los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.



* Analizar cuidadosamente la figura, ya que en ella se encuentra ilustrada la hipótesis buscada. ¿Qué significa que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisequen en E?, ¿cuál es la definición de punto medio?, ¿qué nos dice la figura (registro figural) sobre las medidas de EA y EB?, ¿y sobre EC y ED?, simbólicamente, ¿cómo se puede plantear la hipótesis?, ¿y la conclusión?

3. Resolver *Ejercicio* **3.5**

(10 min)

Solución

Hipótesis:

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$

$\overline{AC} \cong \overline{DF}$

Conclusión:

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

Unidad 4: **Congruencia de triángulos**

Lección 3: (5/7) Congruencia de triángulos

Sección 3: Demostraciones geométricas

Objetivos:
- Definir los términos: hipótesis, conclusión y demostración o prueba.
- Definir el método directo (Si...entonces) para la demostración en geometría.

Que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisequen en E, significa que el punto E es el punto medio de $\overline{AB}$ y también el punto medio de $\overline{CD}$,

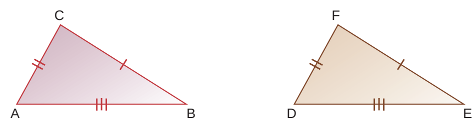
Por lo anterior, la hipótesis y la conclusión pueden reescribirse de esta forma:

Hipótesis: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisecan en E, $\overline{EA} \cong \overline{EB}$, $\overline{EC} \cong \overline{ED}$.

Conclusión: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

Ejercicio **3.5** Auxiliándose de la figura y dadas las siguientes proposiciones, formúlense la hipótesis y la conclusión.

Si los tres lados de un triángulo son respectivamente congruentes con los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.



Hipótesis:

Conclusión:

76

Unidad 4 - Congruencia de triángulos

Unidad 4: Congruencia de triángulos

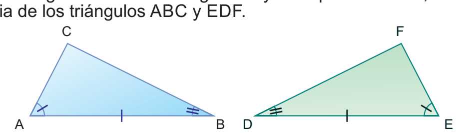
Lección 3: (6/7) Congruencia de triángulos

Sección 3: Demostraciones geométricas

Objetivo: Emplear el razonamiento lógico y el deductivo al completar esquemas de demostración por el método directo (Si… entonces).

Ejemplo 3.7

En las figuras siguientes, el lado AB es congruente con el lado ED y los ángulos A y B son también congruentes con los ángulos E y D respectivamente, demuestre la congruencia de los triángulos ABC y EDF.



Solución:

Resulta útil organizar el pensamiento al formular la demostración en dos columnas. La columna izquierda se usa para las proposiciones que llevan a la conclusión deseada. La columna de la derecha da las justificaciones o razones por las cuales las proposiciones son verdaderas.

Hipótesis: $\overline{AB} \cong \overline{ED}$, $\angle A \cong \angle E$, $\angle B \cong \angle D$

Conclusión: $\Delta ABC \cong$

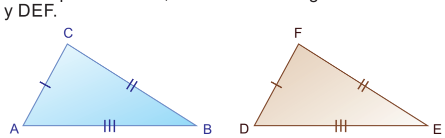
Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{AB} \cong \overline{ED}$	Por hipótesis
2) $\angle A \cong \angle E$	Por hipótesis
3) $\angle B \cong \angle D$	Por hipótesis
4) $\Delta ABC \cong \Delta EDF$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia ALA

Al justificar "por hipótesis", es la información dada.

Ejercicio 3.6 En las figuras dadas, los lados AB, AC y CB son congruentes con los lados DE, DF y FE respectivamente, demuestre la congruencia de los triángulos ABC y DEF.

Hipótesis: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{CB} \cong \overline{FE}$

Conclusión: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



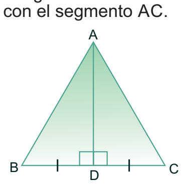
Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{AB} \cong$ ☐	Por hipótesis
2) $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	☐
3) ☐ $\cong \overline{FE}$	Por hipótesis
4) $\Delta ABC \cong \Delta DFE$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia ☐

Ejemplo 3.8

En el siguiente triángulo ABC, el segmento AD es la mediatriz del $\overline{BC}$, demuestre que el segmento AB es congruente con el segmento AC.

Hipótesis: $\overline{BD} \cong \overline{CD}$, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

Conclusión: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$



3. **Definir el plan de desarrollo de una demostración.** Ejemplo 3.8

(25 min)

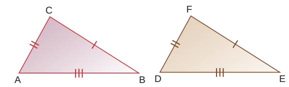
* Leer cuidadosamente el enunciado.

¿Qué información proporciona la figura para definir la hipótesis y la conclusión?, ¿cómo podría demostrarse la congruencia de segmentos?

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

En las figuras dadas, los lados AB, AC y CB son congruentes con los lados DE, DF y FE respectivamente, demuestre la congruencia de los triángulos ABC y DEF.



Hipótesis: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{CB} \cong \overline{FE}$

Conclusión: $\Delta ABC \cong \Delta DFE$

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{AB} \cong$ ☐	Por hipótesis
2) $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	☐
3) ☐ $\cong \overline{FE}$	Por hipótesis
4) $\Delta ABC \cong \Delta DFE$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia ☐

1. **Completar esquemas de demostración empleando el método directo (Si…entonces).** Ejemplo 3.7

(10 min)

* Al momento de dar la clase, la información que está en los recuadros no se escribirá, de modo que se vaya llenando al mismo tiempo que se va analizando cada paso de la demostración.

¿Podemos auxiliarnos de la figura de la demostración?, ¿qué información proporciona la figura?, ¿cuál es la hipótesis de la demostración?, ¿cuál es la conclusión?, ¿qué significa justificar una afirmación o proposición?, ¿cómo puede demostrarse que dos triángulos son congruentes?, ¿cuántas afirmaciones se necesitan para emplear un criterio de congruencia?, ¿qué criterio de congruencia aplica en esta demostración?

2. **Resolver** Ejercicio 3.6

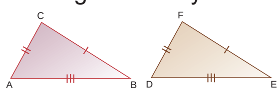
(10 min)

Solución

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{AB} \cong \overline{DE}$	Por hipótesis
2) $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	Por hipótesis
3) $\overline{CB} \cong \overline{FE}$	Por hipótesis
4) $\Delta ABC \cong \Delta DFE$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia LLL

Indicador de logro

En las figuras dadas, los lados AB, AC y CB son congruentes con los lados DE, DF y FE respectivamente, demuestre la congruencia de los triángulos ABC y DEF.



Hipótesis: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$

$\overline{AC} \cong \overline{DF}$

$\overline{CB} \cong \overline{FE}$

Conclusión: $\Delta ABC \cong \Delta DFE$

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{AB} \cong$ ☐	Por hipótesis
2) $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	☐
3) ☐ $\cong \overline{FE}$	Por hipótesis
4) $\Delta ABC \cong \Delta DFE$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia ☐

* Para iniciar demostraciones es necesario observar primero la relación entre los triángulos que forman la figura.

¿Qué partes son congruentes?, ¿son correspondientes?, ¿se puede utilizar algún criterio de congruencia?, ¿qué datos hacen falta?

* Introducir la propiedad de congruencia del mismo segmento, para completar los datos y poder emplear un criterio de congruencia.

¿Qué diferencia hay entre $\overline{AD} \cong \overline{AD}$ y $\overline{AD} \cong \overline{DA}$?

* Concluir que $\overline{AD}$ es un lado común. Y según la posición que ocupa en ambos triángulos, no podría escribirse $\overline{AD} \cong \overline{DA}$.

Unidad 4: Congruencia de triángulos

Lección 3: (6/7) Congruencia de triángulos

Sección 3: Demostraciones geométricas

Objetivo: Emplear el razonamiento lógico y el deductivo al completar esquemas de demostración por el método directo (Si… entonces).

Solución:
El plan de desarrollo de la demostración es

Observar la relación entre ΔABD y ΔACD

↓

$\overline{BD} \cong \overline{CD}$ $\quad \overline{AD} \perp \overline{BC}$ ....Utilizar la información dada (Hipótesis)

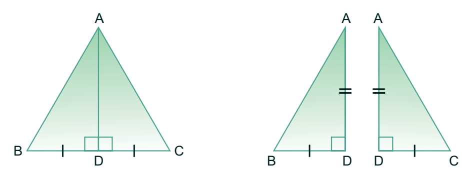
↓ ← Aplicar definiciones, propiedades. Utilizar criterios de congruencia

$\Delta ABD \cong \Delta ACD$

↓ ← Utilizar lados correspondientes

$\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ....Llegar a la conclusión

Entre ΔABD y ΔACD se observa que 2 lados y el ángulo comprendido entre ellos son respectivamente congruentes. Al demostrar que $\Delta ABD \cong \Delta ACD$, se puede utilizar sus lados correspondientes para llegar a la conclusión.



Entre ΔABD y ΔACD ,

$\overline{AD} \cong \overline{AD}$ puede usarse para obtener un segundo par de lados congruentes.

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{BD} \cong \overline{CD}$	Por hipótesis
2) $\overline{AD} \perp \overline{BC}$	Por hipótesis
3) $\angle ADB \cong \angle ADC$	Por 2) y ser ambos ángulos rectos
4) $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	Por congruencia del mismo segmento
5) $\Delta ABD \cong \Delta ACD$	Por 1), 3), 4) y criterio de congruencia LAL
6) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	Por 5) y ser lados correspondientes de triángulos congruentes.

Unidad 4: Congruencia de triángulos

Lección 3: (7/7) Congruencia de triángulos

Sección 3: Demostraciones geométricas

Objetivo: Demostrar aplicando los criterios de congruencia de triángulos.

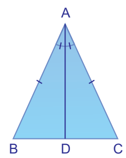
***Ejemplo* 3.9**

En la siguiente figura, los segmentos AB y AC son congruentes y el segmento AD biseca al ángulo BAC, demuestre que los segmentos BD y CD son congruentes.

Solución:

Hipótesis: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
$\angle BAD \cong \angle CAD$

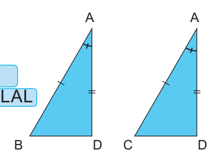
Conclusión: $\overline{BD} \cong \overline{CD}$



Recuerde que el camino para llegar a la conclusión es primero observar la relación entre ΔABD y ΔACD.

Entre ΔABD y ΔACD,

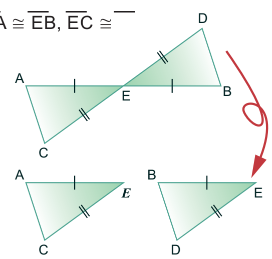
Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	Por hipótesis
2) $\angle BAD \cong \angle CAD$	Por hipótesis
3) $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	Por congruencia del mismo segmento
	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia LAL
	Por 4) y ser lados correspondientes de triángulos congruentes



***Ejercicio* 3.7** En la siguiente figura, el segmento AB y el segmento CD se bisecan en el punto E, demuestre que los segmentos AC y BD son congruentes.

Hipótesis: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisecan en E. ($\overline{EA} \cong \overline{EB}$, $\overline{EC} \cong \overline{ED}$)

Conclusión: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$



Entre Δ y Δ ,

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\cong \overline{EB}$	Por hipótesis
2) $\overline{EC} \cong \overline{ED}$	
3) $\angle AEC \cong \angle BED$	Por ser ángulos
4)	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia
5) $\overline{AC} \cong \overline{BD}$	Por 4) y ser correspondientes de triángulos congruentes

79

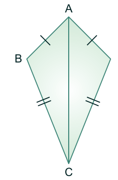
Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Indicador de logro

Si el cuadrilátero ABCD tiene dos pares de lados congruentes, $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DC}$, entonces los ángulos B y D también son congruentes.

a) Identifique la hipótesis y la conclusión

b) Complete el esquema de demostración



Hipótesis:

Conclusión:

Entre Δ y Δ ,

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\cong \overline{AD}$	Por hipótesis
2) $\overline{BC} \cong \overline{DC}$	
3) $\cong \overline{AC}$	Por congruencia del mismo segmento
4) $\Delta ABC \cong \Delta ADC$	Por 1),2),3) y criterio de congruencia
5) $\cong \angle ADC$	Por 4) y ser correspondientes de triángulos congruentes

1. **Aplicar criterios de congruencia de triángulos para completar demostraciones.**
   ***Ejemplo* 3.9**
   (10 min)
   ¿Cuál es la hipótesis de la demostración?, ¿qué implica que el $\overline{AD}$ biseque al $\angle BAC$?, ¿cuál debe ser la conclusión de la demostración.

2. **Resolver *Ejercicio* 3.7**
   (10 min)
   Solución

Entre ΔAEC y ΔBED ,

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{EA} \cong \overline{EB}$	Por hipótesis
2) $\overline{EC} \cong \overline{ED}$	Por hipótesis
3) $\angle AEC \cong \angle BED$	Por ser ángulos opuestos por el vértice
4) $\Delta AEC \cong \Delta BED$	Por 1),2),3) y criterio de congruencia LAL
5) $\overline{AC} \cong \overline{BD}$	Por 4) y ser lados correspondientes, de triángulos congruentes.

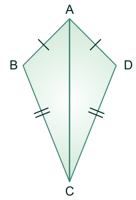
continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Si el cuadrilátero ABCD tiene dos pares de lados congruentes, $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DC}$, entonces los ángulos B y D también son congruentes.

a) Identifique la hipótesis y la conclusión

b) Complete el esquema de demostración



Hipótesis: ______

Conclusión: ______

Entre Δ ______ y Δ ______ ,

Afirmaciones	Justificaciones
1) ______ $\cong \overline{AD}$	Por hipótesis
2) $\overline{BC} \cong \overline{DC}$	______
3) ______ $\cong \overline{AC}$	Por congruencia del mismo segmento
4) $\Delta ABC \cong \Delta ADC$	Por 1),2),3) y criterio de congruencia ______
5) ______ $\cong \angle ADC$	Por 4) y ser ______ correspondientes de triángulos congruentes

3. Aplicar el plan de desarrollo de una demostración.

Ejemplo **3.10**

(15 min)

* Proporcionar las ideas claves para deducir la hipótesis y la conclusión de la demostración.

¿Qué dice el enunciado del ejercicio?, ¿cuál es la definición de bisectriz?, etc.

* Completar el esquema de la demostración observando primero la relación entre los triángulos ADC y ABC.

¿Qué partes congruentes proporciona la hipótesis?, ¿qué criterio de congruencia podría aplicarse?, ¿qué elemento hace falta?, ¿cómo se puede obtener ese lado?

Unidad 4: Congruencia de triángulos

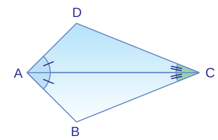
Lección 3: (7/7) Congruencia de triángulos

Sección 3: Demostraciones geométricas

Objetivo: Demostrar aplicando los criterios de congruencia de triángulos

Ejemplo **3.10**

En la siguiente figura, si el segmento AC es bisectriz de los ángulos DAB y BCD, demuestre que los lados DC y BC son congruentes.



Solución:

Paso 1: Identificar la hipótesis y la conclusión

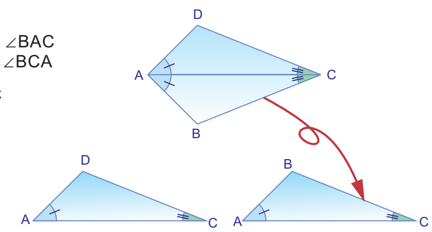
Que el segmento AC sea bisectriz del $\angle DAB$ significa que el $\overline{AC}$ divide al $\angle DAB$ en dos ángulos congruentes.
En la figura se pueden observar que $\angle DAC \cong \angle BAC$.

Para el $\angle BCD$ significa lo mismo, es decir, el $\overline{AC}$ divide al $\angle BCD$ en dos ángulos congruentes, esto es, $\angle DCA \cong \angle BCA$.

Luego, hipótesis y la conclusión son:

Hipótesis: $\angle DAC \cong \angle BAC$
$\angle DCA \cong \angle BCA$

Conclusión: $\overline{DC} \cong \overline{BC}$



Paso 2: Completar el esquema de demostración
El camino para llegar a la conclusión es primero observar la relación entre ΔADC y ΔABC

Entre ΔADC y ΔABC ,

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $\angle DAC \cong \angle BAC$	Por hipótesis
2) $\overline{AC} \cong \overline{AC}$	Por congruencia del mismo segmento
3) $\angle DCA \cong \angle BCA$	Por hipótesis
4) $\Delta ADC \cong \Delta ABC$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia ALA
5) $\overline{DC} \cong \overline{BC}$	Por 4) y ser lados correspondientes de triángulos congruentes

continúa en la siguiente página...

Unidad 4: **Congruencia de triángulos**

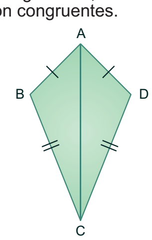
Lección 3: (7/7) Congruencia de triángulos

Sección 4: Demostraciones geométricas

Objetivo: Demostrar aplicando los criterios de congruencia de triángulos.

Ejercicio 3.8 Si el cuadrilátero ABCD tiene dos pares de lados congruentes, $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DC}$, entonces los ángulos B y D también son congruentes.

a) Identifique la hipótesis y la conclusión
b) Complete el esquema de demostración



Hipótesis:

Conclusión:

Entre Δ y Δ ,

Afirmaciones	Justificaciones
1) ≅ $\overline{AD}$	Por hipótesis
2) $\overline{BC} \cong \overline{DC}$	
3) ≅ $\overline{AC}$	Por congruencia del mismo segmento
4) ΔABC ≅ ΔADC	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia
5) ≅ ∠D	Por 4) y ser correspondientes de triángulos congruentes

4. Resolver **Ejercicio 3.8**

(10 min)

Solución

Hipótesis: ABCD es un cuadrilátero
$\overline{AB} \cong \overline{AD}$
$\overline{BC} \cong \overline{DC}$

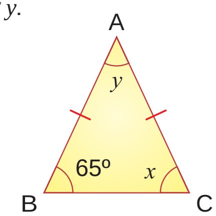
Conclusión: ∠B ≅ ∠D

Entre ΔABC y ΔADC ,

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{AB} \cong \overline{AD}$	Por hipótesis
2) $\overline{BC} \cong \overline{DC}$	Por hipótesis
3) $\overline{AC} \cong \overline{AC}$	Por congruencia del mismo segmento
4) ΔABC ≅ ΔADC	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia LLL
5) ∠B ≅ ∠D	Por 4) y ser ángulos correspondientes, de triángulos congruentes.

Indicador de logro

Dado que el $\triangle ABC$ es isósceles donde $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, encuentre la medida de los ángulos x y y.



1. Recordar lo aprendido sobre los triángulos isósceles en 3er y 4to grado.

(3 min)

* Analizar la definición de triángulo isósceles. Un par de lados congruentes es condición suficiente para que sea triángulo isósceles, por lo tanto, un triángulo equilátero también es isósceles, pero no al contrario.

2. Demostrar propiedad 1 de triángulos isósceles.

Ejemplo **4.1**

Antes de la demostración

(5 min)

* Cada paso del plan de desarrollo para esta demostración está ilustrado en la primera figura que se muestra en la solución.

¿Qué se tiene como hipótesis?, ¿hay alguna construcción auxiliar que deba hacerse?, luego de observar la relación entre los triángulos ABD y ACD ¿qué criterio de congruencia se puede emplear?, ¿qué información hace falta para aplicar el criterio de congruencia?, ¿qué se puede concluir luego de la congruencia de los triángulos?

Unidad 4: **Congruencia de triángulos**

Lección 4: (1/7) Triángulos isósceles y rectángulo

Sección 1: Triángulo isósceles

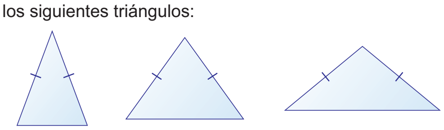
Objetivo: Hacer demostraciones sobre propiedades de triángulos isósceles aplicando los criterios de congruencia de triángulos.

Lección 4: Triángulos isósceles y rectángulo

Sección 1: Triángulos isósceles

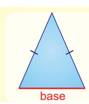
En 3er grado se identificaron varios tipos de triángulos y se clasificaron de acuerdo a la medida de sus lados y también de acuerdo a la medida de sus ángulos. En esta lección se harán demostraciones de las características de los triángulos isósceles aplicando lo que se ha aprendido en lecciones anteriores.

Observa los siguientes triángulos:



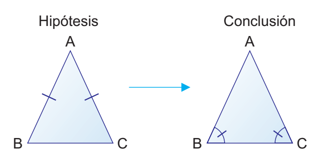
Los triángulos presentados tienen diferente tamaño pero todos coinciden en que cada uno tiene dos lados de igual medida (congruentes).

Un triángulo que tenga un par de lados congruentes, es un **triángulo isósceles**.



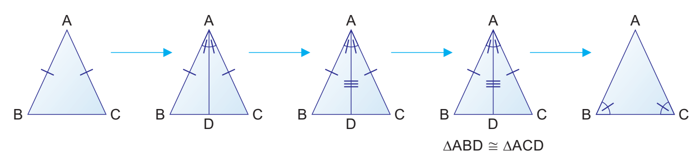
Ejemplo **4.1**

Sea el $\triangle ABC$ isósceles, donde $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, demuestre que los dos ángulos opuestos, estos son, $\angle B$ y $\angle C$, son congruentes entre sí.



Solución:

Los dibujos nos muestran el proceso que se seguirá para hacer la demostración.



Se parte de que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ por ser un triángulo isósceles, luego se trazará $\overline{AD}$ que es la bisectriz del ángulo BAC, hasta llegar a la conclusión $\angle B \cong \angle C$.

continúa en la siguiente página...

Unidad 4: Congruencia de triángulos

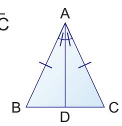
Lección 4: (1/7) Triángulos isósceles y rectángulo

Sección 1: Triángulo isósceles

Objetivo: Hacer demostraciones sobre propiedades de triángulos isósceles aplicando los criterios de congruencia de triángulos.

La construcción del $\overline{AD}$ como bisectriz del $\angle BAC$, se incluirá en la hipótesis de la demostración, por lo que el esquema de demostración es el siguiente:

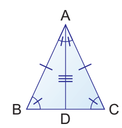
Hipótesis: ΔABC es isósceles, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
$\overline{AD}$ es bisectriz del $\angle BAC$



Para llegar a la conclusión lo primero es observar la relación entre ΔABD y ΔACD.

Conclusión: $\angle B \cong \angle C$

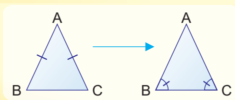
Entre Δ ABD y Δ ACD,



Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	Por hipótesis
2) $\angle BAD \cong \angle CAD$	Por hipótesis
3) $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	Por congruencia del mismo segmento
4) $\Delta ABD \cong \Delta ACD$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia LAL
5) $\angle B \cong \angle C$	Por 4) y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes

La demostración anterior puede enunciarse como la siguiente propiedad de triángulos isósceles:

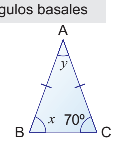
Propiedad 1 de triángulos isósceles:
Si dos lados de un triángulo son congruentes entonces los ángulos opuestos a estos son congruentes.



$\angle B$ y $\angle C$ también se les llama ángulos basales

Ejemplo 4.2

Dado que el ΔABC es isósceles donde $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, encuentre la medida de los ángulos x y y



Solución:

Aplicando la propiedad 1 de los triángulos isósceles tenemos que:
$m\angle x = 70°$ (1)

Luego, la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°, entonces:
$m\angle x + m\angle y + 70° = 180°$ (2)

Sustituyendo (1) en (2):
$70° + m\angle y + 70° = 180°$
$m\angle y + 140° = 180°$
$m\angle y = 180° - 140°$
$m\angle y = 40°$

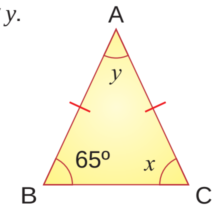
Respuesta: $m\angle x = 70°$, $m\angle y = 40°$

83

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Indicador de logro

Dado que el ΔABC es isósceles donde $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, encuentre la medida de los ángulos x y y.



Durante la demostración

(10 min)

Organizar los pensamientos anteriores en las 5 afirmaciones de la demostración, justificando cada una de ellas.

Nota: las demostraciones que no utilizan recuadros en su estructura, es porque no hay un ejercicio aplicado a dicha demostración. En este y los ejemplos posteriores, se utilizan para ilustrar la propiedad que se desea aplicar.

Después de la demostración

(5 min)

Al demostrar la congruencia de los triángulos. ABD y ACD, se puede concluir que los lados y ángulos correspondientes son congruentes. Para enunciar la propiedad 1, se utilizarán los ángulos de la base del triángulo ABC.

* Recordar la definición de propiedad: cualidades de los objetos matemáticos, en este caso, cualidades que cumplen los triángulos isósceles.

3. Aplicar propiedad 1 de triángulos isósceles para encontrar la medida de ángulos. Ejemplo 4.2

(7 min)

¿La medida de qué ángulo debe encontrarse primero x ó y?, una vez encontrada la $m\angle x$, ¿cómo se puede encontrar la $m\angle y$?, ¿qué propiedad se debe aplicar?

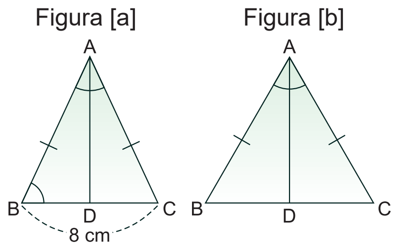
continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

ΔABC es isósceles donde $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ y $\overline{AD}$ es la bisectriz del ∠BAC. Aplicando propiedad de triángulos isósceles, encuentre:

Figura [a]: medida del $\overline{DC}$

Figura [b]: $m\angle$ADC



4. Resolver *Ejercicio* **4.1**

(15 min)

Soluciones

a) $m\angle x$ = 65°, $m\angle y$ = 50°

b) $m\angle x$ = 60°, $m\angle y$ = 60°

c) $m\angle y$ = 40°, $m\angle x$ = 70°

[Hasta aquí Clase 1]

[Desde aquí Clase 2]

1. Introducir propiedad 2 de triángulos isósceles.

(20 min)

Recordar que luego del paso 4) de la demostración del *Ejemplo* **4.1**, se concluyó que ΔABD ≅ ΔACD, y se utilizó la congruencia de los ángulos correspondientes ∠B y ∠C.

Para introducir la Propiedad 2 se utilizará la congruencia de los lados correspondientes $\overline{BD}$ y $\overline{CD}$, y de los ángulos correspondientes ADB y ADC. Pero antes, se deben recordar 3 conceptos:

1) Punto medio de un segmento. Si $\overline{BD} \cong \overline{CD}$, ¿aplica la definición de punto medio?

2) Bisectriz

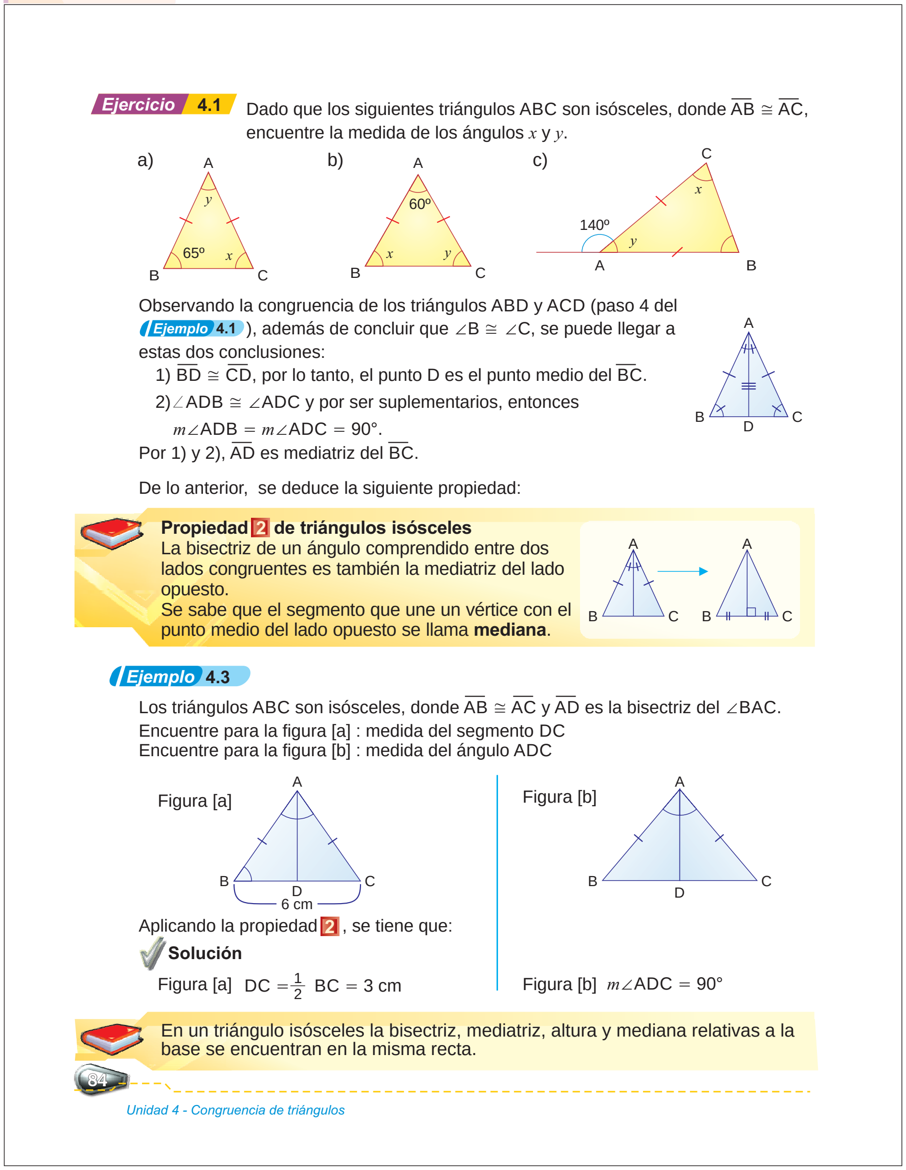
3) Mediatriz de un segmento, ¿es $\overline{AD}$ mediatriz de $\overline{BC}$?

Unidad 4: Congruencia de triángulos

Lección 4: (2/7) Triángulos isósceles y rectángulo

Sección 1: Triángulo isósceles

Objetivo: Hacer demostraciones sobre propiedades de triángulos isósceles aplicando los criterios de congruencia de triángulos.



Ejercicio **4.1** Dado que los siguientes triángulos ABC son isósceles, donde $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, encuentre la medida de los ángulos x y y.

a) b) c)

Observando la congruencia de los triángulos ABD y ACD (paso 4 del *Ejemplo* 4.1), además de concluir que ∠B ≅ ∠C, se puede llegar a estas dos conclusiones:

1) $\overline{BD} \cong \overline{CD}$, por lo tanto, el punto D es el punto medio del $\overline{BC}$.

2) ∠ADB ≅ ∠ADC y por ser suplementarios, entonces $m\angle$ADB = $m\angle$ADC = 90°.

Por 1) y 2), $\overline{AD}$ es mediatriz del $\overline{BC}$.

De lo anterior, se deduce la siguiente propiedad:

Propiedad 2 de triángulos isósceles
La bisectriz de un ángulo comprendido entre dos lados congruentes es también la mediatriz del lado opuesto.
Se sabe que el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto se llama **mediana**.

Ejemplo 4.3

Los triángulos ABC son isósceles, donde $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ y $\overline{AD}$ es la bisectriz del ∠BAC.
Encuentre para la figura [a] : medida del segmento DC
Encuentre para la figura [b] : medida del ángulo ADC

Figura [a] Figura [b]

Aplicando la propiedad 2, se tiene que:

Solución

Figura [a] DC = $\frac{1}{2}$ BC = 3 cm

Figura [b] $m\angle$ADC = 90°

En un triángulo isósceles la bisectriz, mediatriz, altura y mediana relativas a la base se encuentran en la misma recta.

84

Unidad 4 - Congruencia de triángulos

2. Aplicar propiedad 2 de triángulos isósceles.

Ejemplo **4.3** *(10 min)*

Al aplicar la Propiedad 2 en la figura [a] y si $\overline{BC}$ = 6 cm, ¿qué medida tendrá $\overline{DC}$?

Al aplicar la Propiedad 2 en la figura [b] y si $\overline{AD}$ es bisectriz del ∠BAC, ¿qué otro segmento fundamental a la base $\overline{BC}$ representa?, por esa conclusión, ¿cuál es la $m\angle$ADC?

continúa en la siguiente página...

Unidad 4: **Congruencia de triángulos**

Lección 4: (3/7) Triángulos isósceles y rectángulo

Sección 1: Triángulo isósceles

Objetivo: Hacer demostraciones sobre propiedades de triángulos isósceles aplicando los criterios de congruencia de triángulos.

Ejercicio 4.2 Los triángulos ABC son isósceles, donde $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ y $\overline{AD}$ es la bisectriz del $\angle$BAC.
Encuentre para la figura [a] : medida del $\overline{DC}$
Encuentre para la figura [b] : medida del $\angle$ADC

Figura [a]

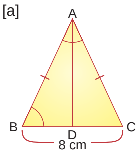
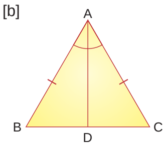
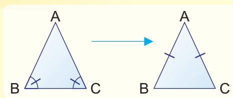


Figura [b]



En el caso de las propiedades 1 y 2, primero se hizo la demostración y luego se enunciaron. Para la propiedad 3, primero se enunciará y luego se hará la demostración.

Propiedad 3 de triángulos isósceles
Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces ese triángulo es isósceles.



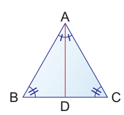
Ejemplo 4.4

Sea el ΔABC, demuestre que si $\angle B \cong \angle C$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, es decir, ΔABC es isósceles.

Solución:
Para demostrar esta propiedad del triángulo isósceles, se trazará $\overline{AD}$ como bisectriz del $\angle$BAC y se incluirá en la hipótesis de la demostración, por lo que el esquema de demostración es el siguiente:

Hipótesis: $\angle B \cong \angle C$
$\overline{AD}$ es bisectriz del $\angle$BAC ($\angle BAD \cong \angle CAD$)

Conclusión: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (Δ ABC es isósceles)



Entre Δ ABD y Δ ACD,

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $\angle BAD \cong \angle CAD$	Por hipótesis
2) $\angle B \cong \angle C$	Por hipótesis
3) $m\angle ADB = 180° - (m\angle BAD + m\angle B)$	Por 1), 2) y por la propiedad de la suma de las medidas de ángulos internos de un triángulo
4) $m\angle ADC = 180° - (m\angle CAD + m\angle C)$	Por 1), 2) y por la propiedad de la suma de las medidas de ángulos internos de un triángulo
5) $m\angle ADB = m\angle ADC$	Por 1), 2), 3) y 4)
6) $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	Por congruencia del mismo segmento
7) $\Delta ABD \cong \Delta ACD$	Por 1), 5), 6) y criterio de congruencia ALA
8) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	Por 7) y ser lados correspondientes de triángulos congruentes

85

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

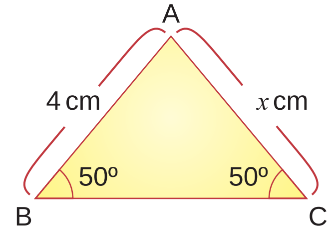
Después de la demostración (5 min)

Concluir que si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces ese triángulo tiene dos lados congruentes y por tanto es isósceles.

En la siguiente clase se harán ejemplos y ejercicios aplicando esta tercera propiedad.

Indicador de logro

Encuentre la medida del lado AC. Observe que los ángulos de la base son congruentes.



3. Resolver Ejercicio 4.2
(15 min)
Solución
Figura [a]: DC = 4 cm
Figura [b]: $m\angle ADC = 90°$

[Hasta aquí Clase 2]

[Desde aquí Clase 3]

1. Demostrar la propiedad 3 de triángulos isósceles.
Ejemplo 4.4

Antes de la demostración
(5 min)
Aclarar que para introducir las propiedades 1 y 2, primero se hicieron las demostraciones y luego se enunciaron. En el caso de la propiedad 3, primero se enunciará y luego se hará la demostración.

Si la hipótesis nos dice que $\angle BAD$ y $\angle CAD$ son congruentes y por congruencia de un mismo segmento se tiene que $\overline{AD} \cong \overline{AD}$, ¿qué criterio de congruencia se puede aplicar?, ¿qué dato hace falta?

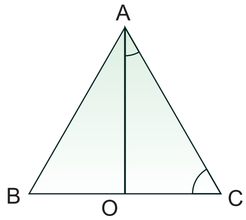
Durante la demostración
(25 min)
Seguir paso a paso cada afirmación de la demostración, y hacer que los alumnos vayan justificándolos o también puede ir omitiendo datos en las afirmaciones.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Si ΔABC es equilátero y $\overline{AD}$ es bisectriz de $\angle BAC$, encuentre:

a) $m\angle ACB$ b) $m\angle CAO$ c) $m\angle BOA$



2. Aplicar propiedad 3 de triángulos isósceles.

Ejemplo **4.5**

(5 min)

3. Resolver *Ejercicio* **4.3**

(5 min)

Solución

a) AC = 4 cm

[Hasta aquí Clase 3]

[Desde aquí Clase 4]

1. Demostrar que en un triángulo equilátero los tres ángulos son congruentes.

Ejemplo **4.6**

(25 min)

* Aplicar las propiedades de triángulos isósceles vistas anteriormente y utilizarlas para responder cada pregunta referente a triángulos equiláteros.

a) ¿Puede un triángulo ser equilátero e isósceles a la vez?, ¿sí?, ¿no?, explique.

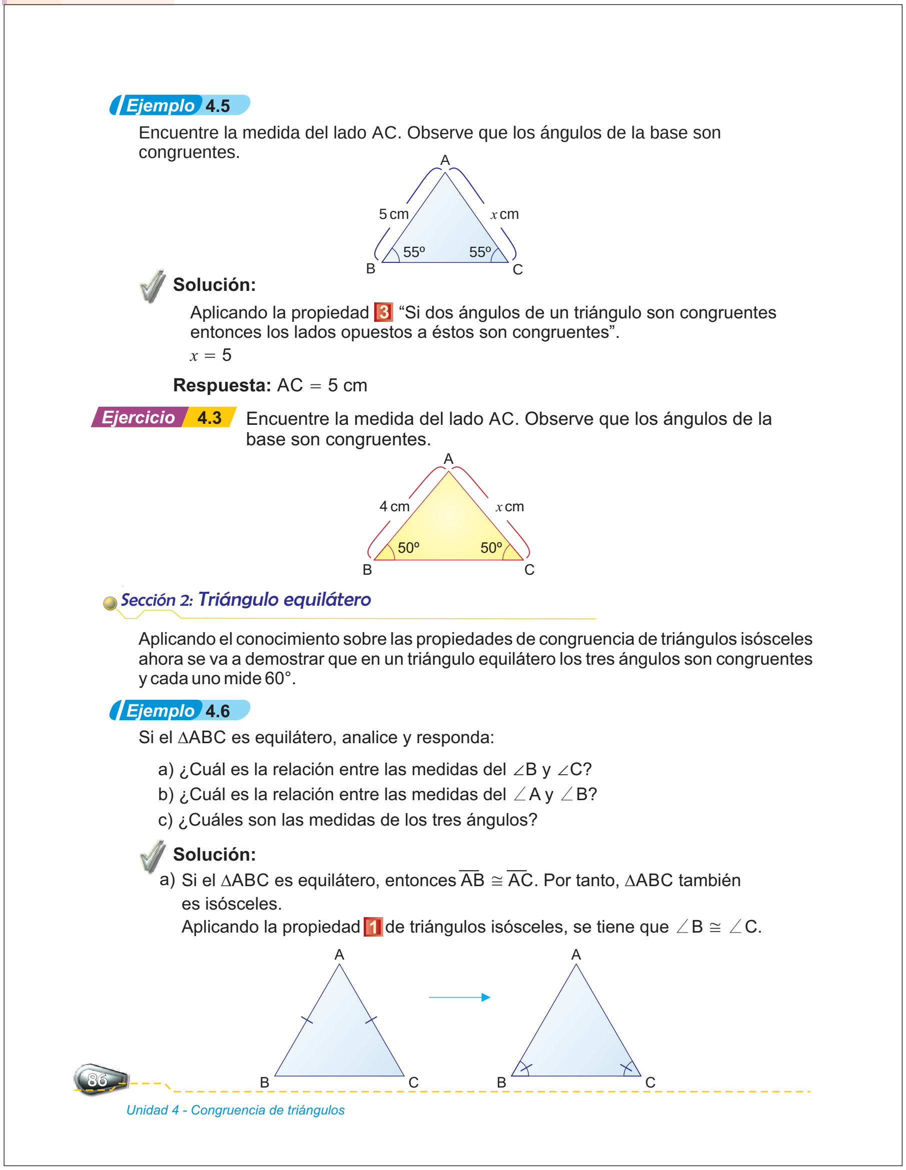
¿Qué propiedades de triángulos isósceles recuerda?

Unidad 4: **Congruencia de triángulos**

Lección 4: (4/7) Triángulos isósceles y rectángulo

Sección 2: Triángulo equilátero

Objetivo: Indicar que en un triángulo equilátero los tres ángulos son congruentes y cada uno mide 60°.



Ejemplo **4.5**

Encuentre la medida del lado AC. Observe que los ángulos de la base son congruentes.

Solución:

Aplicando la propiedad 3 "Si dos ángulos de un triángulo son congruentes entonces los lados opuestos a éstos son congruentes".

$x = 5$

Respuesta: AC = 5 cm

Ejercicio **4.3** Encuentre la medida del lado AC. Observe que los ángulos de la base son congruentes.

Sección 2: Triángulo equilátero

Aplicando el conocimiento sobre las propiedades de congruencia de triángulos isósceles ahora se va a demostrar que en un triángulo equilátero los tres ángulos son congruentes y cada uno mide 60°.

Ejemplo **4.6**

Si el ΔABC es equilátero, analice y responda:

a) ¿Cuál es la relación entre las medidas del $\angle B$ y $\angle C$?
b) ¿Cuál es la relación entre las medidas del $\angle A$ y $\angle B$?
c) ¿Cuáles son las medidas de los tres ángulos?

Solución:

a) Si el ΔABC es equilátero, entonces $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Por tanto, ΔABC también es isósceles.
Aplicando la propiedad 1 de triángulos isósceles, se tiene que $\angle B \cong \angle C$.

86

Unidad 4 - Congruencia de triángulos

continúa en la siguiente página...

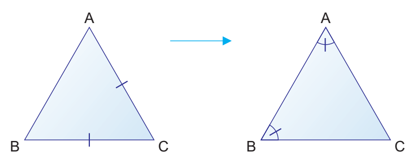
Congruencia de triángulos

Lección 4: (4/7) Triángulos isósceles y rectángulo

Sección 2: Triángulo equilátero

Objetivo: Indicar que en un triángulo equilátero los tres ángulos son congruentes y cada uno mide 60°.

b) Como $\overline{CA} \cong \overline{CB}$, aplicando la propiedad **1** de triángulos isósceles, se tiene que $\angle A \cong \angle B$



c) Por a) y b), $\angle B \cong \angle C$ y $\angle A \cong \angle B$, por tanto, $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ **c**

Por la propiedad de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo, se tiene que:
$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$ **d**

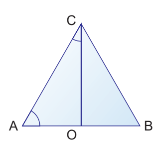
Sustituyendo, **c** en **d**
$m\angle A + m\angle A + m\angle A = 180°$
$m\angle A = 60°$
Por tanto, $m\angle A = m\angle B = m\angle C = 60°$

Un triángulo equilátero tiene sus tres lados y sus tres ángulos congruentes.

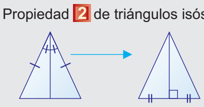
Ejemplo 4.7

Si el $\triangle ABC$ es equilátero y $\overline{CO}$ es bisectriz del $\angle ACB$ encuentre:

a) $m\angle CAO$
b) $m\angle OCA$
c) $m\angle BOC$



Propiedad **2** de triángulos isósceles



Solución:

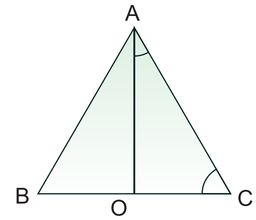
a) $m\angle CAO = 60°$ por ser triángulo equilátero
b) $m\angle OCA = 30°$ por ser $\overline{CO}$ bisectriz del $\angle ACB$
c) Si el $\triangle ABC$ es equilátero, entonces se puede pensar como en el caso del triángulo isósceles, de tal manera que $\overline{CA} \cong \overline{CB}$ y al ser $\overline{CO}$ bisectriz del $\angle ACB$, es también mediatriz del $\overline{AB}$, esto es, $\overline{CO} \perp \overline{AB}$, por tanto $m\angle BOC = 90°$

87

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Indicador de logro

Si $\triangle ABC$ es equilátero y $\overline{AD}$ es bisectriz de $\angle BAC$, encuentre:
a) $m\angle ACB$ b) $m\angle CAO$ c) $m\angle BOA$



b) ¿Qué puedo concluir respecto a los ángulos A, B y C?

c) Si se aplica la propiedad de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo, ¿cuál es la $m\angle A$?, por el paso anterior, ¿cuál es la medida de los ángulos B y C?

* Al ser demostrado que un triángulo equilátero es equiangular, se pueden hacer ejercicios del tipo que se presentan en el **Ejemplo 4.7**.

* En este punto el indicador de logro cambia, aunque la clase sigue siendo la misma.

2. Aplicar propiedades de triángulos equiláteros.

Ejemplo 4.7

(10 min)

Observe que no se marca la congruencia de los 3 lados en la figura del triángulo equilátero ABC, así que deben atenderse cuidadosamente las instrucciones del ejemplo.

a) ¿Cuál es la medida de cada ángulo interno en un triángulo equilátero?

b) Si $\overline{CO}$ es bisectriz de $\angle ACB$, ¿cuál es la $m\angle OCA$?

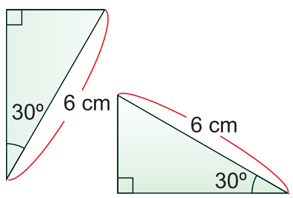
c) Aplicando la Propiedad **2** de triángulos isósceles, ¿cuál es la $m\angle BOC$?

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

¿Qué criterio de congruencia indica que los siguientes triángulos rectángulos son congruentes?

a) LLL b) LAL c) ALA



3. Resolver *Ejercicio* **4.4**

(10 min)

Solución

a) $m\angle ACB = 60°$

b) $m\angle CAO = 30°$

c) $m\angle BOA = 90°$

[Hasta aquí Clase 4]

[Desde aquí Clase 5]

1. Identificar elementos del triángulo rectángulo.

(10 min)

* Definir triángulo rectángulo, hipotenusa y catetos. Éstos dos últimos conceptos se utilizarán hasta ver la unidad de teorema de Pitágoras.

2. Demostrar criterio de congruencia hipotenusa - ángulo. *Ejemplo* **4.8**

Antes de la demostración

(5 min)

¿Qué partes correspondientes son congruentes?, ¿qué criterio de congruencia se puede aplicar?, ¿qué dato hace falta para aplicar el criterio de congruencia?

Durante la demostración

(15 min)

* Escribir los datos que se pueden deducir de la figura.

¿Qué otra congruencia se puede deducir a partir de la congruencia de los ángulos rectos C y F y de los ángulos B y E?, ¿el criterio de con-

Unidad 4: **Congruencia de triángulos**

Lección 4: ***(5/7)*** Triángulos isósceles y rectángulo

Sección 3: Criterios de congruencia de triángulos rectángulos

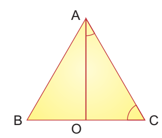
Objetivo: Establecer los criterios de congruencia de triángulos rectángulos.

Ejercicio **4.4** Si el ΔABC es equilátero y $\overline{AO}$ es bisectriz del BAC, encuentre:

a) m ACB

b) m CAO

c) m BOA



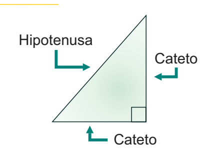
Sección 3: Criterios de congruencia de triángulos rectángulos

Recordando

Triángulo rectángulo es un triángulo que tiene un ángulo recto.

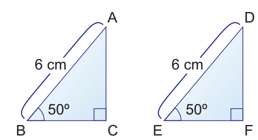
La **hipotenusa** es el lado opuesto al ángulo recto y es el de mayor longitud.

Los **catetos** son los otros dos lados que forman el ángulo recto.



Ejemplo **4.8**

Auxiliándose de la figura de la derecha, demuestre que los triángulos ABC y DEF son congruentes



Solución:

Entre ΔABC y ΔDEF,

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) AB $\cong$ DE	Por hipótesis
2) $\angle$B $\cong$ $\angle$E	Por hipótesis
3) $\angle$C $\cong$ $\angle$F	Por hipótesis

4) Por la propiedad de la suma de las medidas de los ángulos internos de ΔABC y ΔDEF, se tiene que:

$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$ $m\angle D + m\angle E + m\angle F = 180°$

$m\angle A + 50° + 90° = 180°$ $m\angle D + 50° + 90° = 180°$

$m\angle A + 140° = 180°$ $m\angle D + 140° = 180°$

$m\angle A = 180° - 140°$ $m\angle D = 180° - 140°$

$m\angle A = 40°$ $m\angle D = 40°$

5) $m\angle A = m\angle D = 40°$	Por 4)
6) ΔABC $\cong$ ΔDEF	Por 1), 2), 5) y criterio de congruencia ALA

Del *Ejemplo* **4.8** se muestra que dos triángulos rectángulos son congruentes si la hipotenusa y un ángulo agudo son congruentes respectivamente.

gruencia para los triángulos ABC y DEF es el mismo que se había señalado antes de la demostración?

Después de la demostración

(5 min)

* Indicar el primer criterio para identificar cuando dos triángulos rectángulos son congruentes.

continúa en la siguiente página...

Unidad 4: Congruencia de triángulos

Lección 4: (6/7) Triángulos isósceles y rectángulo

Sección 3: Criterios de congruencia de triángulos rectángulos

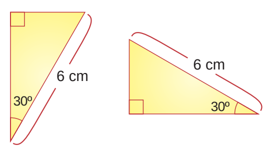
Objetivo: Establecer los criterios de congruencia de triángulos rectángulos.

Ejercicio 4.5 ¿Qué criterio de congruencia indica que los siguientes triángulos rectángulos son congruentes?

a) LLL

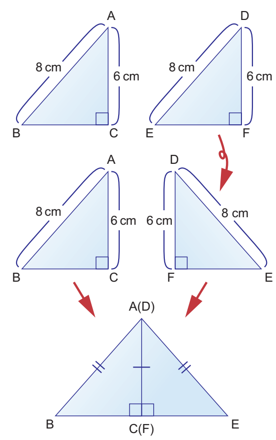
b) LAL

c) ALA



Ejemplo 4.9

Auxiliándose de la figura de la derecha, demuestre que los triángulos ABC y DEF son congruentes.



Solución:

Al voltear el ΔDEF, se observa que AC = DF. Además, como

$m\angle BCA + m\angle EFD = 90° + 90° = 180°$,

entonces cuando se unen el ΔABC y el ΔDEF por los lados AC y DF, los puntos B, C(F) y E son colineales. Por lo tanto, el ΔABE que se forma es isósceles.

El esquema de demostración es el siguiente:

Entre ΔABC y ΔDEF,

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{AB} \cong \overline{DE}$	Por hipótesis
2) $\angle B \cong \angle E$	Por construcción de triángulos isósceles ABE
3) $\angle C \cong \angle F$	Por hipótesis (son ángulos rectos)
4) $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$ $m\angle D + m\angle E + m\angle F = 180°$	Por la propiedad de la suma de las medidas de los ángulos internos de ΔABC y ΔDEF
5) $m\angle A = m\angle D$	Por 2), 3) y 4)
6) ΔABC ≅ ΔDEF	Por 1), 2), 5) y criterio de congruencia ALA

De este **Ejemplo 4.9** se muestra que dos triángulos rectángulos son congruentes si la hipotenusa y un cateto son congruentes respectivamente.

89

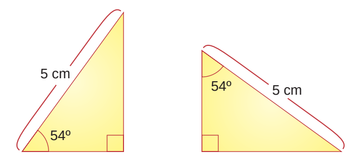
Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Indicador de logro

¿Cuál de los siguientes criterios es utilizado para indicar que el siguiente par de triángulos rectángulos es congruente?

1 Hipotenusa - ángulo

2 Hipotenusa - cateto



3. Resolver Ejercicio 4.5

(10 min)

Solución

c) ALA

[Hasta aquí Clase 5]

[Desde aquí Clase 6]

1. Demostrar criterio de congruencia hipotenusa - cateto. Ejemplo 4.9

(25 min)

* Explicar que la demostración se hará empleando los datos que muestra la figura, ¿si dos lados tienen medidas iguales, pueden hacerse coincidir?, ¿qué pasaría si las medidas no fuesen iguales?, ¿qué tipo de triángulo es el ΔABE que se formó?, ¿por qué?
* Recordar que al igual que en demostraciones anteriores, primero debe observarse la relación entre los triángulos ABC y DEF, para luego hacer y justificar las 4 afirmaciones que tiene este ejemplo.
* Concluir con el segundo criterio para identificar cuándo dos triángulos rectángulos son congruentes.

continúa en la siguiente página...

Unidad 4: **Congruencia de triángulos**

Lección 4: (6/7) Triángulos isósceles y rectángulo

Sección 3: Criterios de congruencia de triángulos rectángulos

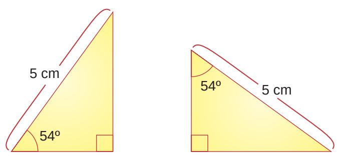
Objetivo: Establecer los criterios de congruencia de triángulos rectángulos.

Indicador de logro

¿Cuál de los siguientes criterios es utilizado para indicar que el siguiente par de triángulos rectángulos es congruente?

1 Hipotenusa - ángulo

2 Hipotenusa - cateto



2. Indicar los criterios de congruencia de triángulos rectángulos.

(10 min)

3. Identificar el criterio de congruencia de triángulos rectángulos utilizado.

Ejemplo 4.10

(5 min)

* Utilizar el nombre corto de los criterios de congruencia

1 Hipotenusa-ángulo

2 Hipotenusa-cateto

Recalcando lo principal: el ángulo y el cateto respectivamente congruentes.

4. Resolver **Ejercicio 4.6**

(5 min)

Solución

Hipotenusa y un ángulo agudo respectivamente congruentes.

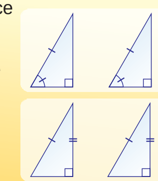
1 Hipotenusa-ángulo

Criterios de congruencia de triángulos rectángulos

Dos triángulos rectángulos son congruentes si se satisface uno de los siguientes criterios:

1 La hipotenusa y un ángulo agudo son respectivamente congruentes (hipotenusa - ángulo).

2 La hipotenusa y un cateto son respectivamente congruentes (hipotenusa - cateto).

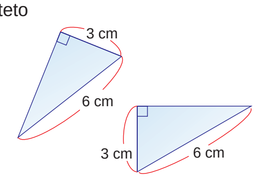


Ejemplo 4.10

¿Cuál de los siguientes criterios es utilizado para indicar que el siguiente par de triángulos rectángulos es congruente?

1 Hipotenusa - ángulo

2 Hipotenusa - cateto



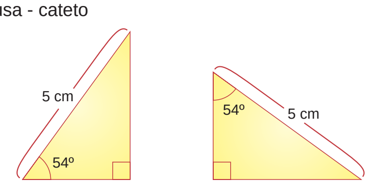
Solución:

El criterio 2: "La hipotenusa y un cateto son respectivamente congruentes".

Ejercicio 4.6 ¿Cuál de los siguientes criterios es utilizado para indicar que el siguiente par de triángulos rectángulos es congruente?

1 Hipotenusa - ángulo

2 Hipotenusa - cateto



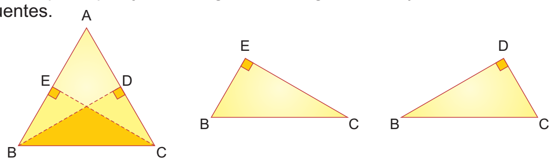
Unidad 4: Congruencia de triángulos

Lección 4: (7/7) Triángulos isósceles y rectángulo

Sección 3: Criterios de congruencia de triángulos rectángulos

Objetivo: Establecer los criterios de congruencia de triángulos rectángulos.

Ejercicio 4.7 Dado el ΔABC isósceles, donde $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Sean los puntos E y D en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, se cumple que $\overline{AB} \perp \overline{CE}$ y $\overline{AC} \perp \overline{BD}$. Demuestre que la pareja de triángulos rectángulos BCE y CBD son congruentes.



Solución:

Hipótesis: ΔABC es isósceles $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

$\overline{AB} \perp \overline{CE}$

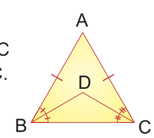
$\overline{AC} \perp \overline{BD}$

Conclusión: $\Delta BCE \cong \Delta CBD$

Entre ΔBCE y ΔCBD,

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	
2) ___ $\cong \angle DCB$	Por 1) y propiedad de triángulo isósceles al ΔABC
3) $\overline{BC} \cong$ ___	Por congruencia del mismo segmento
4) $m\angle BEC =$ ___ $= 90°$	Por hipótesis
5) $\Delta BCE \cong \Delta CBD$	Por ___, ___ y criterio de congruencia ___ de triángulos rectángulos

Ejercicio 4.8 El ΔABC es isósceles, las bisectrices de los ángulos opuestos a los lados congruentes AB y AC se cortan en un punto D. Demuestre que $DB \cong DC$.



Solución:

Hipótesis: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

$\overline{BD}$ y $\overline{CD}$ son bisectrices de $\angle ABC$ y $\angle ACB$ respectivamente

Conclusión: $\overline{DB} \cong \overline{DC}$

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\angle ABC \cong$ ___	Por hipótesis y propiedad de triángulo isósceles al ΔABC
2) ___ $= \frac{1}{2}\, m\angle ABC$	Por hipótesis ($\overline{BD}$ es bisectriz del $\angle ABC$)
3) $m\angle DCB =$ ___	Por hipótesis ($\overline{CD}$ es bisectriz del ___)
4) $m\angle DBC =$ ___	Por 1), 2) y 3)
5) $\overline{DB} \cong$ ___	Por 4) y propiedad de triángulo isósceles al ΔDCB

91

Libro del Estudiante - Matemáticas-8° grado

Solución Ejercicio 4.7

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	Por hipótesis
2) $\angle EBC \cong \angle DCB$	Por 1) y propiedad de triángulos isósceles
3) $\overline{BC} \cong \overline{CB}$	Por congruencia del mismo segmento
4) $m\angle BEC \cong m\angle CDB = 90°$	Por hipótesis
5) $\Delta BCE \cong \Delta CBD$	Por 2), 3) y por criterio de congruencia hipotenusa-ángulo de triángulos rectángulos

Indicador de logro

Resolver **Ejercicio 4.8**

1. **Resolver Ejercicio 4.7**

   Antes de la demostración

   (5 min)

   ¿Qué datos se tienen para formular la hipótesis de la demostración?, ¿qué propiedad de triángulos isósceles se puede aplicar al ΔABC para construir y justificar afirmaciones?

   Durante la demostración

   (15 min)

   Entre los triángulos BCE y CBD, ¿qué partes correspondientes son congruentes?, ¿qué criterio de congruencia puede aplicarse?, ¿qué datos hacen falta para aplicar dicho criterio?

   Después de la demostración

   (5 min)

   En general, ¿qué utilidad tienen los criterios de congruencia?

   Solución (ver en la parte inferior de la página).

2. **Resolver Ejercicio 4.8**

   Antes de la demostración

   (8 min)

   Recordar las 3 propiedades de triángulos isósceles vistas anteriormente. Leyendo el enunciado del ejercicio, ¿qué datos pertenecen a la hipótesis?, ¿qué debe concluirse con la demostración?

   Durante la demostración

   (12 min)

   Completar cada una de las afirmaciones y justificaciones que tiene el plan de desarrollo de la demostración.

   Solución (Página 112)

1 **La suma de las medidas de los ángulos de polígonos.**

Solución

a)76º b) 140º c) 110º

d) 120º e) 130º

2 **La suma de las medidas de los ángulos de polígonos.**

Solución

1440º

3 **Relación entre las partes correspondientes de triángulos congruentes.**

Solución

Los vértices A, B y C del ΔABC se corresponde respectivamente con los vértices E, F y D del ΔEFD.

Los lados correspondientes son congruentes.

$\overline{AB} \cong \overline{EF}$, $\overline{BC} \cong \overline{FD}$, $\overline{AC} \cong \overline{ED}$

Los ángulos correspondientes son congruentes.

$\angle A \cong \angle E$, $\angle B \cong \angle F$, $\angle C \cong \angle D$

4 **Identificación del criterio utilizado para indicar la congruencia de pares de triángulos.**

Solución

a) LLL
b) ALA
c) LAL
d) Hipotenusa-ángulo
e) Hipotenusa-cateto

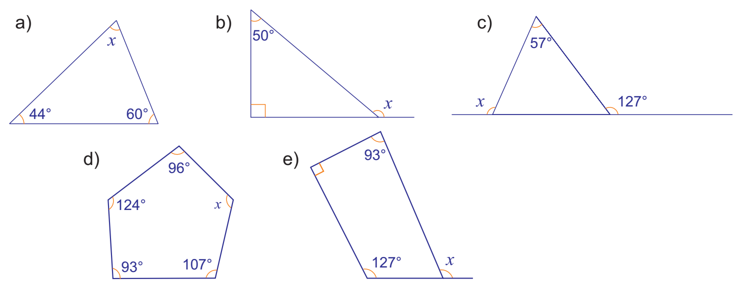
Unidad 4: Congruencia de triángulos

(1/2) Ejercicios de la unidad

Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre congruencia de triángulos.

Ejercicios

1 Encuentre la medida del $\angle x$.

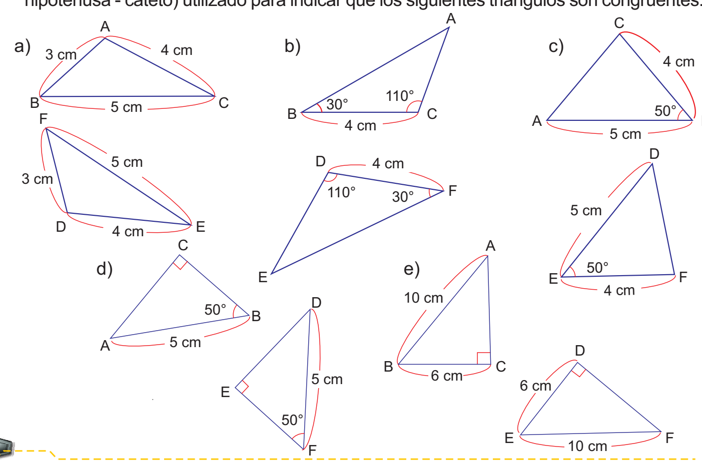


2 ¿Cuál es la suma de las medidas de los ángulos internos de un decágono?

a) 1800° b) 1440° c) 1260° d) 900°

3 Si el ΔABC es congruente con el ΔEFD. ¿cómo se corresponden los vértices, los lados y los ángulos de ambos triángulos?

4 Identifique el criterio de congruencia de triángulos (LLL, LAL, ALA, hipotenusa - ángulo, hipotenusa - cateto) utilizado para indicar que los siguientes triángulos son congruentes.



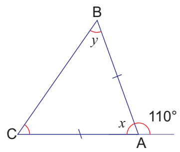
Unidad 4: Congruencia de triángulos

(2/2) Ejercicios de la unidad

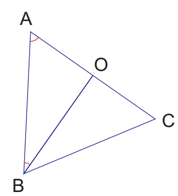
Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre congruencia de triángulos.

5 ¿Será posible construir un único ΔABC donde $AB = 7$ cm, $m\angle A = 50°$ y $BC = 6$ cm? Haga la construcción.

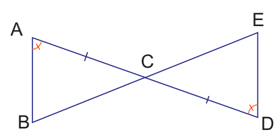
6 Dado que el ΔABC es isósceles donde $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, encuentre la medida del $\angle x$ y $\angle y$



7 Dado que el ΔABC es equilátero y BO es bisectriz del $\angle ABC$, encuentre la medida del $\angle OAB$, $\angle OBA$ y $\angle COB$.



8 El segmento AD y el segmento BE se cruzan en el punto C. Dado que C es el punto medio del $\overline{AD}$ y $m\angle CAB = m\angle CDE$, demuestre que los triángulos ABC y DEC son congruentes.
a) Identifique la hipótesis y la conclusión
b) Complete el esquema de demostración



Hipótesis

Conclusión

Entre ΔABC y ΔDEC ,

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\cong \overline{DC}$	Por hipótesis
2) $\angle CAB \cong \angle CDE$	
3) $\angle ACB \cong$	Por ser ángulos
4)	Por , , y criterio de congruencia

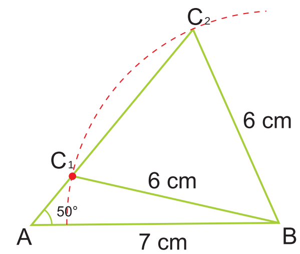
93

Libro del Estudiante - Matemáticas 8° grado

5 Construcción de dos triángulos diferentes con las mismas condiciones dadas.

Solución

No es posible construir un único triángulo, porque ΔABC_1 y ΔABC_2 cumplen las condiciones dadas.



6 Aplicando propiedades de triángulos isósceles.

Solución

$m\angle x = 70°$

$m\angle y = 55°$

7 Aplicando propiedades de triángulos isósceles.

Solución

$m\angle OAB = 60°$
$m\angle OBA = 30°$
$m\angle COB = 90°$

8 Demostraciones geométricas.

Solución

Hipótesis: $\overline{AC} \cong \overline{DC}$, $\angle CAB \cong \angle CDE$

Conclusión: $\Delta ABC \cong \Delta DEC$

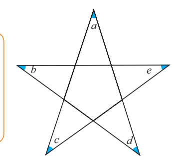
Entre ΔABC y ΔDEC ,

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{AC} \cong \overline{DC}$	Por hipótesis
2) $\angle CAB \cong \angle CDE$	Por hipótesis
3) $\angle ACB \cong \angle DCE$	Por ser ángulos opuestos por el vértice
4) $\Delta ABC \cong \Delta DEC$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia ALA

Unidad 4: Congruencia de triángulos

¿Cuál es la suma total de las medidas de los ángulos resaltados en la estrella?

$$m\angle a + m\angle b + m\angle c + m\angle d + m\angle e = ¿?$$

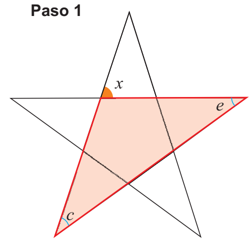


Recordemos

1. La medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no contiguos.
2. La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180º.

Solución:

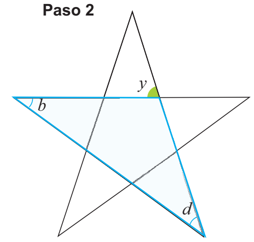
Paso 1



El ángulo x es un ángulo externo del triángulo rojo, y es igual a la suma de las medidas del ángulo c y el ángulo e.

$$m\angle x = m\angle c + m\angle e$$

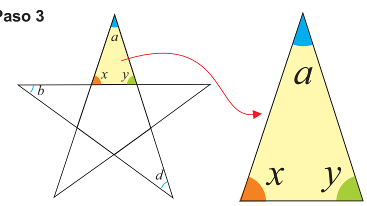
Paso 2



El ángulo y es un ángulo externo del triángulo azul, y es igual a la suma de las medidas del ángulo b y el ángulo d.

$$m\angle y = m\angle b + m\angle d$$

Paso 3



La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°. Entonces,

$$m\angle a + m\angle x + m\angle y = 180°$$

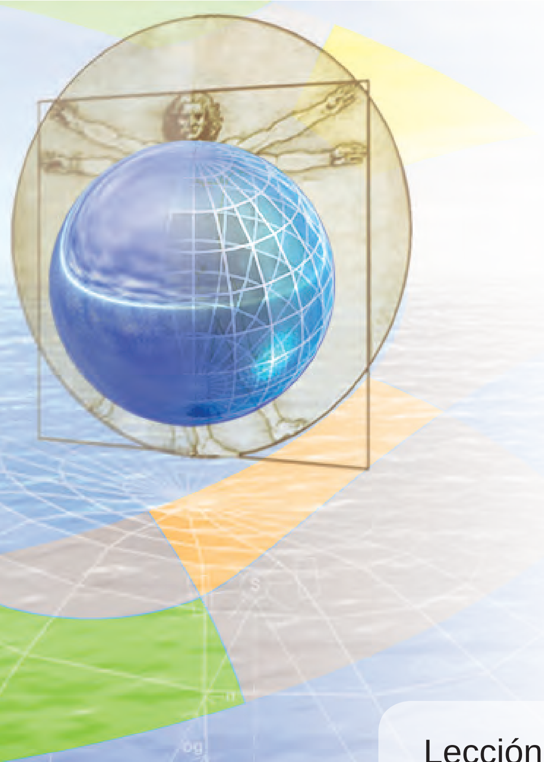
Por pasos 1 y 2:

$$m\angle a + m\angle x + m\angle y = 180°$$
$$m\angle a + (m\angle c + m\angle e) + (m\angle b + m\angle d) = 180°$$
$$m\angle a + m\angle b + m\angle c + m\angle d + m\angle e = 180°$$

Respuesta: 180°

Solución Ejercicio 4.8 (Página 109)

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\angle ABC \cong \angle ACB$	Por hipótesis y propiedad de triángulo isósceles al ΔABC
2) $m\angle DBC = \frac{1}{2} m\angle ABC$	Por hipótesis ($\overline{BD}$ es bisectriz del $\angle ABC$)
3) $m\angle DCB = \frac{1}{2} m\angle ACB$	Por hipótesis ($\overline{CD}$ es bisectriz del $\angle ACB$)
4) $m\angle DBC = m\angle DCB$	Por 1), 2) y 3)
5) $\overline{DB} \cong \overline{DC}$	Por 4) y propiedad de triángulo isósceles al ΔDCB



Unidad 5
Cuadriláteros

Lección 1: Cuadriláteros

Cuadriláteros

(10 horas)

1 Expectativas de logro

- Construyen cuadriláteros de diferentes tipos para resolver problemas de la vida real

2 Relación y desarrollo

Séptimo grado

Conjunto de puntos
- Puntos, rectas y planos
- Rayos y segmentos
- Longitud de un segmento
- Segmentos congruentes
- Distancia entre puntos
- Punto medio de un segmento
- Bisector de un segmento
- Puntos colineales

Ángulos
- Ángulo, medida y congruencia
- Clasificación de ángulos
- Construcción de la bisectriz
- Rectas perpendiculares y mediatriz de un segmento
- Construcción de la mediatriz
- Construcción de una perpendicular usando definición de mediatriz

Octavo grado

Paralelismo
- Rectas paralelas y transversales
- Ángulos formados por dos rectas paralelas y una transversal
- Congruencia de ángulos formados por dos rectas paralelas y una transversal
- Demostraciones sobre paralelismo
- Distancia entre rectas paralelas
- Construcción de rectas paralelas

Congruencia de triángulos
- Suma de las medidas de los ángulos de un triángulo
- Suma de las medidas de los ángulos de un polígono
- Congruencia de triángulos
- Triángulos isósceles y rectángulo

Cuadriláteros
- Elementos y clasificación de los cuadriláteros
- Paralelogramos
- Rectángulos, rombos y cuadrados
- Trapecios

Noveno grado

Semejanza de triángulos
- Figuras semejantes
- Triángulos semejantes
- Criterios de semejanza de triángulos
- Relación entre triángulos y proporción
- Relación entre paralelas y proporción
- Aplicación de la semejanza de triángulos

Teorema de Pitágoras
- Teorema de Pitágoras
- Recíproco del teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Polígonos regulares y el círculo
- Polígonos regulares
- Medida de los ángulos internos de un polígono regular
- Centro de un polígono regular
- Círculos
- Tangente a un círculo
- Área del círculo

Sólidos geométricos
- Áreas laterales de sólidos geométricos (cubos, prismas, pirámides, cilindros conos y esferas)
- Volumen de sólidos geométricos (pirámides, conos, cilindros y esferas)

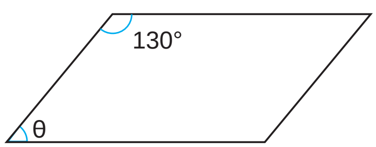
3 Plan de estudio (10 horas)

Lección	Distribución de horas	Contenidos
1. Cuadriláteros (8 horas)	1/8	• Elementos y clasificación de los cuadriláteros
	2~3/8	• Demostraciones sobre las características de los paralelogramos
	4~6/8	• Condiciones para ser paralelogramo
	7/8	• Demostraciones sobre rectángulos, rombos y cuadrados
	8/8	• Demostraciones sobre trapecios
Ejercicios (2 horas)	1~2/2	

4 Puntos de lección

Análisis de las pruebas diagnósticas 2016 - 2017

[Pregunta] En el siguiente paralelogramo ¿Cuánto mide el ángulo θ?



Institutos: 21% CEB: 3% (2017)

Es posible que hayan contestado correctamente sin aprender el contenido de esta unidad, porque en el II Ciclo de Educación Básica se enseñan los conocimientos básicos del paralelogramo.

De hecho, aunque muchos centros educativos no llegaron hasta esta unidad, algunos estudiantes contestaron correctamente.

Comprender esta unidad no es fácil, ya que es necesario aprender los conocimientos de las unidades previas en el bloque de Geometría (Ángulos, Paralelismo, Congruencia de triángulos, etc.).

Sin embargo, al aprender esta unidad, se espera que los estudiantes puedan resolver preguntas fundamentales de este bloque.

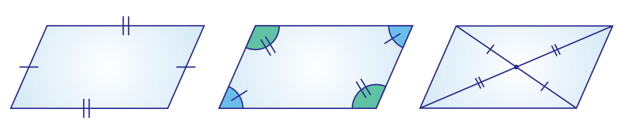
Puntos de Lección

Sección 1: Cuadriláteros

Se inicia esta unidad con los conceptos de lados y ángulos adyacentes, lados y ángulos opuestos de un cuadrilátero. Luego, los estudiantes clasifican los cuadriláteros por el paralelismo de sus lados en paralelogramos, trapecios y trapezoides.

Sección 2: Paralelogramos

Con los conocimientos básicos adquiridos y como una aplicación de los criterios de congruencia de triángulos, se proponen demostraciones a través de las cuales se deducen 3 características de los paralelogramos: sus lados opuestos son congruentes, sus ángulos opuestos son congruentes y sus diagonales se cortan en el punto medio.



Sección 3: Condiciones para ser un paralelogramo

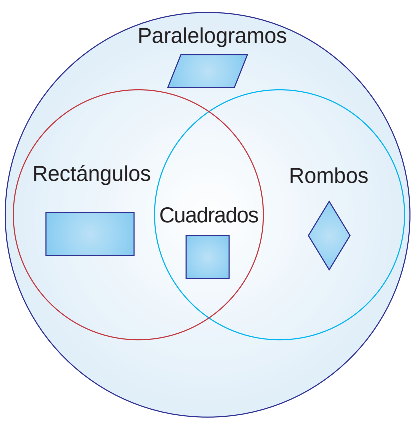
Nuevamente utilizando criterios de congruencia y condiciones de paralelismo, se demuestra que dadas ciertas características de un cuadrilátero, éste puede ser definido como un paralelogramo.

Aplicando esas condiciones, se proponen ejercicios para encontrar lados o ángulos de un cuadrilátero, de tal forma que éste sea un paralelogramo.

Sección 4: Rectángulos, rombos y cuadrados

Observando las condiciones para que un cuadrilátero sea paralelogramo vistas en la sección anterior, se clasificarán el rombo, rectángulo y cuadrado como paralelogramos.

Resaltando que el cuadrado puede ser considerado como un rectángulo o rombo.



Luego se demuestra que las diagonales de un rectángulo son congruentes. Las propiedades que cumplen las diagonales de un rombo y cuadrado solo se mencionan.

Sección 5: Trapecios

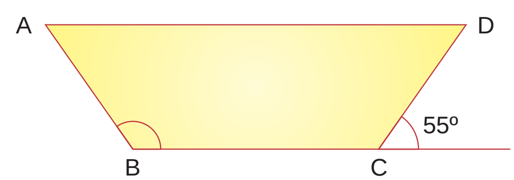
Ya en la primera sección se ha definido al trapecio como el cuadrilátero con solo un par de lados opuestos paralelos.

Ahora, a ese par de lados paralelos se les define como bases.

Y aquel trapecio que tiene lados opuestos NO paralelos congruentes, se le clasifica como trapecio isósceles.

Para finalizar, se encuentra la medida de un ángulo basal, aplicando la propiedad de que los ángulos adyacentes a una misma base de un trapecio isósceles son congruentes.

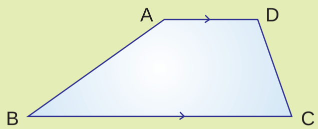
Ejercicio **1.9**



Tema: Trapecios 1

Ejemplo **1.16** 2 **Pág.** 109 3

Observe la siguiente figura y escriba:



a) ¿Qué par de lados son paralelos?

Respuesta: $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 4

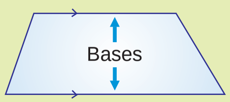
b) ¿Qué tipo de cuadrilátero es?

Respuesta: Es un trapecio, porque solo tiene un par de lados opuestos paralelos. 4

c) ¿Qué pares de ángulos son adyacentes a los lados AD y BC?

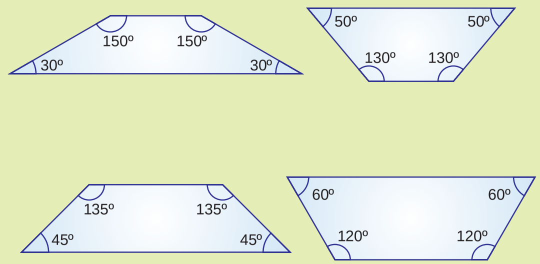
Respuesta: Los ángulos adyacentes al $\overline{AD}$ son el ∠A y ∠D y los ángulos adyacentes al $\overline{BC}$ son el ∠B y ∠C. 4

6 A los lados paralelos de un trapecio se les llaman **bases**.



6 Un **trapecio isósceles** es aquel cuyos lados opuestos **NO** paralelos son congruentes.

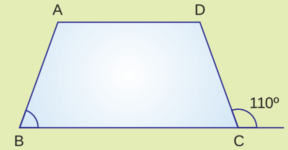
Los siguientes trapecios son isósceles:



6 Los ángulos adyacentes a una misma base de un trapecio isósceles son congruentes.

Ejemplo **1.17** 2 **Pág.** 110 3

El cuadrilátero ABCD es trapecio isósceles, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$. Encuentre la medida del ∠B.



Solución 4

$m\angle C + 110° = 180°$ ...∠C es el suplemento del ángulo de 110°

$m\angle C = 180° - 110° = 70°$

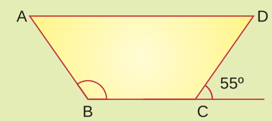
$m\angle B = m\angle C$ ...por ser ABCD trapecio isósceles

Entonces $m\angle B = 70°$

Respuesta: $m\angle B = 70°$

Ejercicio **1.9** 2 **Pág.** 110 3

El cuadrilátero ABCD es trapecio isósceles, $\overline{AB}$ $\overline{DC}$. Encuentre la medida del ∠B.



Solución 4

$m\angle C + 55° = 180°$

$m\angle C = 180° - 55° = 125°$

$m\angle B = m\angle C$

Entonces $m\angle B = 125°$

Respuesta: $m\angle B = 125°$ 4 ✓

1 Al inicio de la clase escribir solo la palabra "**Tema**" y hasta el final de la clase (o en el desarrollo de la misma) escribir el contenido del tema.

2 Escribir el número del *Ejemplo* o *Ejercicio*.

3 Escribir el número de **Pág.** del LE para entender dónde se quedaron con respecto al tiempo.

4 Escribir la **Solución** y **Respuesta**.

5 En el problema planteado marcar los datos importantes para poder llegar a la respuesta.

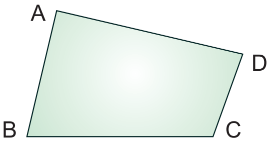
6 Escribir la conclusión en un rectángulo de color rojo.

✓ Marcar en el *Ejercicio* cuando la solución o la respuesta sean correctas.

Nota: Los puntos aquí explicados no siempre aplican todos en un plan de pizarra.

Indicador de logro

Identifique en el cuadrilátero ABCD:



a) Lados adyacentes al $\overline{AB}$.

b) Lado opuesto al $\overline{AB}$.

c) Ángulos adyacentes al $\angle C$.

d) Ángulo opuesto al $\angle C$.

1. Definir lados y ángulos adyacentes y opuestos.

Ejemplo **1.1**

(15 min)

* Comience haciendo un repaso sobre los cuadriláteros.

* Presentar el cuadrilátero del ejemplo.

* Resolver el *Ejemplo* **1.1** y haga notar que hay dos lados que coinciden en un vértice con $\overline{AD}$, pero solo uno NO coincide en ningún vértice con $\overline{AD}$. Algo similar ocurre con los ángulos que comparten un lado del cuadrilátero y el que no.

* Al finalizar el *Ejemplo* **1.1** concluya con la definición de lados adyacentes, lados opuestos, ángulos adyacentes y ángulos opuestos en un cuadrilátero.

* A los lados y ángulos de la respuesta del *Ejemplo* **1.1** llámelos según la nueva definición aprendida. Por ejemplo:

$\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son lados adyacentes al $\overline{AD}$.

2. Identificar lados y ángulos adyacentes y opuestos.

Ejemplo **1.2**

(5 min)

¿Qué lados coinciden en un vértice con el $\overline{CD}$?, ¿cuáles lados son adyacentes al $\overline{CD}$?

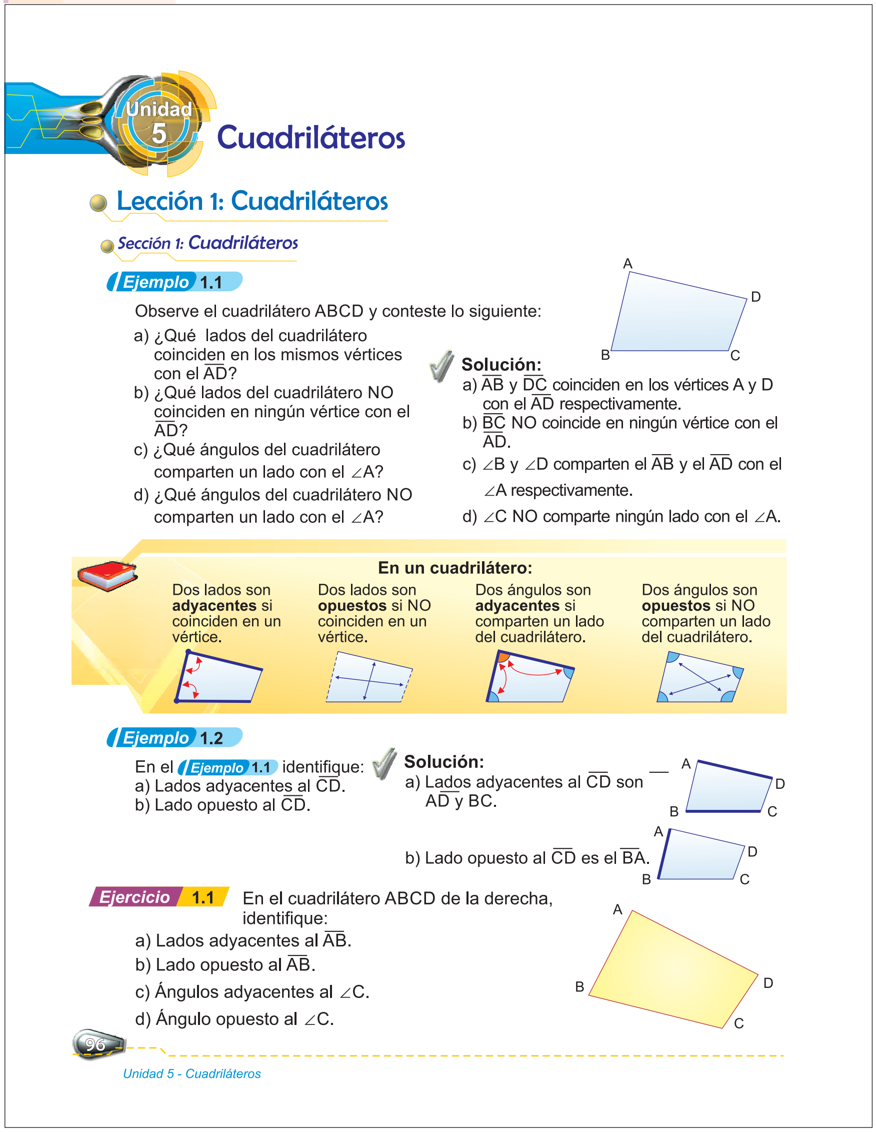
¿Qué lado no coincide en ningún vértice con el $\overline{CD}$?, ¿cuál es el lado opuesto al $\overline{CD}$?

Unidad 5: **Cuadriláteros**

Lección 1: (1/8) Cuadriláteros

Sección 1: Cuadriláteros

Objetivos:
- Identificar elementos de un cuadrilátero.
- Clasificar los cuadriláteros.



Unidad 5 Cuadriláteros

Lección 1: Cuadriláteros

Sección 1: Cuadriláteros

Ejemplo **1.1**

Observe el cuadrilátero ABCD y conteste lo siguiente:

a) ¿Qué lados del cuadrilátero coinciden en los mismos vértices con el $\overline{AD}$?

b) ¿Qué lados del cuadrilátero NO coinciden en ningún vértice con el $\overline{AD}$?

c) ¿Qué ángulos del cuadrilátero comparten un lado con el $\angle A$?

d) ¿Qué ángulos del cuadrilátero NO comparten un lado con el $\angle A$?

Solución:

a) $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ coinciden en los vértices A y D con el $\overline{AD}$ respectivamente.

b) $\overline{BC}$ NO coincide en ningún vértice con el $\overline{AD}$.

c) $\angle B$ y $\angle D$ comparten el $\overline{AB}$ y el $\overline{AD}$ con el $\angle A$ respectivamente.

d) $\angle C$ NO comparte ningún lado con el $\angle A$.

En un cuadrilátero:

Dos lados son **adyacentes** si coinciden en un vértice.	Dos lados son **opuestos** si NO coinciden en un vértice.	Dos ángulos son **adyacentes** si comparten un lado del cuadrilátero.	Dos ángulos son **opuestos** si NO comparten un lado del cuadrilátero.

Ejemplo **1.2**

En el *Ejemplo* **1.1** identifique:

a) Lados adyacentes al $\overline{CD}$.

b) Lado opuesto al $\overline{CD}$.

Solución:

a) Lados adyacentes al $\overline{CD}$ son $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.

b) Lado opuesto al $\overline{CD}$ es el $\overline{BA}$.

Ejercicio **1.1** En el cuadrilátero ABCD de la derecha, identifique:

a) Lados adyacentes al $\overline{AB}$.

b) Lado opuesto al $\overline{AB}$.

c) Ángulos adyacentes al $\angle C$.

d) Ángulo opuesto al $\angle C$.

96 Unidad 5 - Cuadriláteros

3. Resolver *Ejercicio* **1.1**

(10 min)

Solución

a) $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$

b) $\overline{DC}$

c) $\angle B$ y $\angle D$

d) $\angle A$

continúa en la siguiente página...

Unidad 5: Cuadriláteros

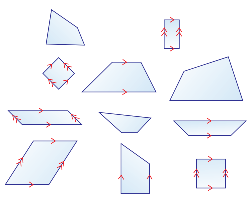
Lección 1: (1/8) Cuadriláteros

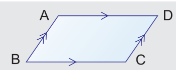
Sección 1: Cuadriláteros

Objetivos:
- Identificar elementos de un cuadrilátero.
- Clasificar los cuadriláteros.

Ejemplo 1.3

Clasifique los siguientes cuadriláteros por el paralelismo de sus lados.

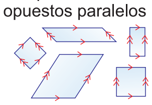


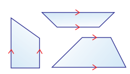


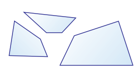
El símbolo ">"sobre $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ significa que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. Igual ocurre con los lados AB y DC, el símbolo ">>" sobre estos lados significa que $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

Respuesta:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
Dos pares de lados opuestos paralelos	Un par de lados opuestos paralelos	Los lados opuestos no son paralelos.



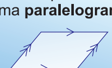


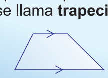


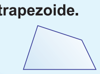
El cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos se llama **paralelogramo.**

El cuadrilátero con solo un par de lados opuestos paralelos se llama **trapecio.**

El cuadrilátero sin lados opuestos paralelos se llama **trapezoide.**

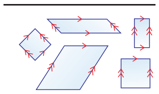


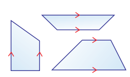


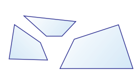


Ejercicio 1.2 De los grupos formados en el **Ejemplo 1.3** escriba si son paralelogramos, trapecios o trapezoides.

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
______	______	______

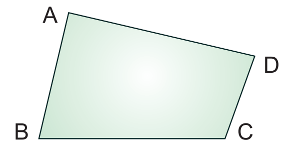






Indicador de logro

Identifique en el cuadrilátero ABCD:



a) Lados adyacentes al $\overline{AB}$.

b) Lado opuesto al $\overline{AB}$.

c) Ángulos adyacentes al $\angle C$.

d) Ángulo opuesto al $\angle C$.

4. Clasificar cuadriláteros por el paralelismo de sus lados. *Ejemplo* **1.3**

(10 min)

¿Cómo se marcan líneas paralelas en figuras geométricas?

* Mencionar que la clasificación de los cuadriláteros se hará de acuerdo al número de pares de lados opuestos paralelos que posean.

¿Qué grupos de cuadriláteros obtuvieron?

* Concluir con la definición de paralelogramo, trapecio y trapezoide.

5. Resolver *Ejercicio* **1.2**

(5 min)

Solución

Grupo 1: Paralelogramos.

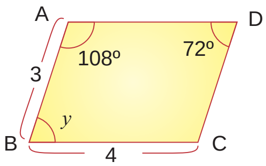
Grupo 2: Trapecios.

Grupo 3: Trapezoides

* Repasar la definición de paralelogramo, trapecio y trapezoide al resolver este ejercicio.

Indicador de logro

En el paralelogramo ABCD dado encuentre las medidas del AD y $\angle y$.

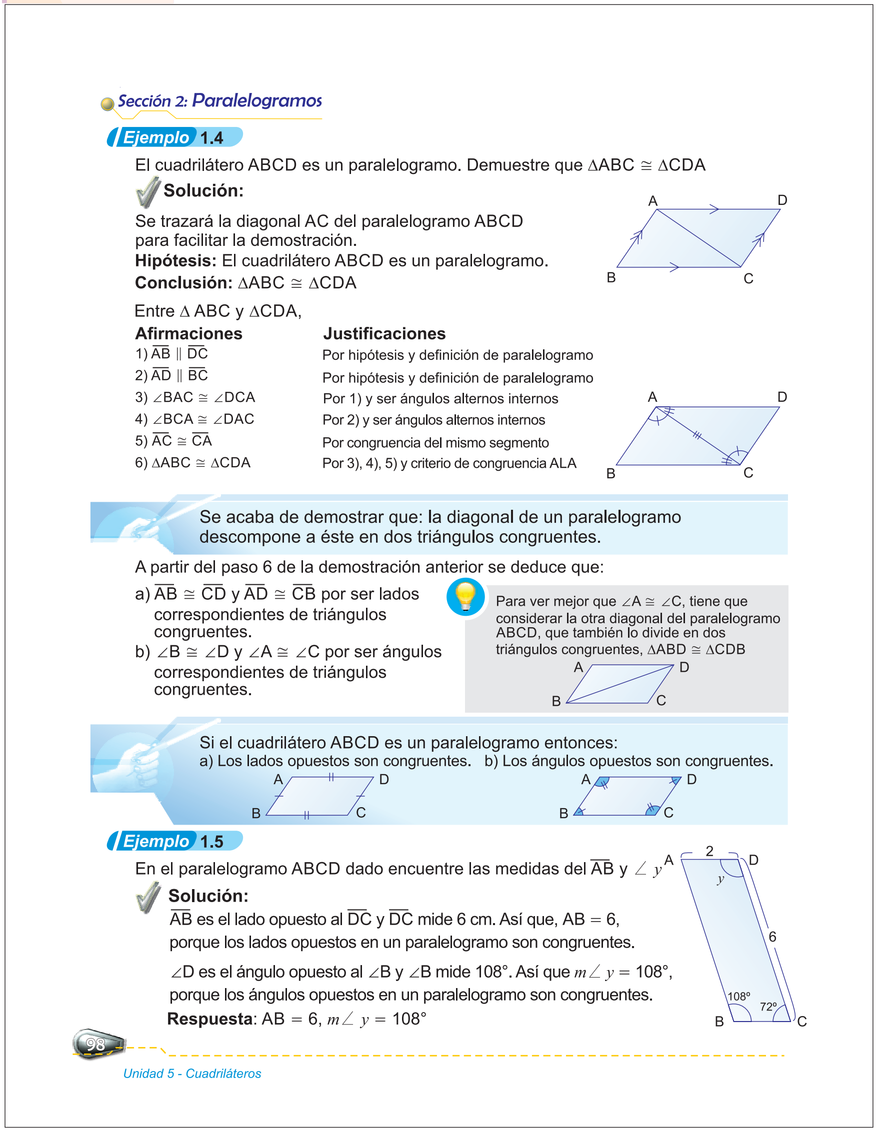


Unidad 5: Cuadriláteros

Lección 1: (2/8) Cuadriláteros

Sección 2: Paralelogramos

Objetivos:
- Indicar que la diagonal de un paralelogramo determina dos triángulos congruentes.
- Determinar la medida de lados y ángulos opuestos en un paralelogramo.



Sección 2: Paralelogramos

Ejemplo 1.4

El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo. Demuestre que $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

Solución:

Se trazará la diagonal AC del paralelogramo ABCD para facilitar la demostración.
Hipótesis: El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.
Conclusión: $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

Entre Δ ABC y ΔCDA,

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$	Por hipótesis y definición de paralelogramo
2) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	Por hipótesis y definición de paralelogramo
3) $\angle BAC \cong \angle DCA$	Por 1) y ser ángulos alternos internos
4) $\angle BCA \cong \angle DAC$	Por 2) y ser ángulos alternos internos
5) $\overline{AC} \cong \overline{CA}$	Por congruencia del mismo segmento
6) $\Delta ABC \cong \Delta CDA$	Por 3), 4), 5) y criterio de congruencia ALA

Se acaba de demostrar que: la diagonal de un paralelogramo descompone a éste en dos triángulos congruentes.

A partir del paso 6 de la demostración anterior se deduce que:

a) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AD} \cong \overline{CB}$ por ser lados correspondientes de triángulos congruentes.
b) $\angle B \cong \angle D$ y $\angle A \cong \angle C$ por ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes.

Para ver mejor que $\angle A \cong \angle C$, tiene que considerar la otra diagonal del paralelogramo ABCD, que también lo divide en dos triángulos congruentes, $\Delta ABD \cong \Delta CDB$

Si el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo entonces:
a) Los lados opuestos son congruentes. b) Los ángulos opuestos son congruentes.

Ejemplo 1.5

En el paralelogramo ABCD dado encuentre las medidas del $\overline{AB}$ y $\angle y$

Solución:

$\overline{AB}$ es el lado opuesto al $\overline{DC}$ y $\overline{DC}$ mide 6 cm. Así que, AB = 6, porque los lados opuestos en un paralelogramo son congruentes.

$\angle D$ es el ángulo opuesto al $\angle B$ y $\angle B$ mide 108°. Así que $m\angle y = 108°$, porque los ángulos opuestos en un paralelogramo son congruentes.

Respuesta: AB = 6, $m\angle y = 108°$

98 Unidad 5 - Cuadriláteros

1. Demostrar que la diagonal de un paralelogramo determina dos triángulos congruentes. *Ejemplo* **1.4**

Antes de la demostración
(5 min)

¿Cuál es la hipótesis?, ¿cuál es la conclusión?

* Concluir que la demostración la harán en base a ΔABC y ΔCDA.

Durante la demostración
(15 min)

¿Cuál es el primer paso de la demostración?
¿Qué podemos afirmar respecto a los lados opuestos del cuadrilátero ABCD ya que es un paralelogramo?, ¿cómo podemos construir ΔABC y ΔCDA usando el paralelogramo?, ¿cómo son los ángulos alternos internos entre dos rectas paralelas?, ¿qué ángulos son congruentes?, ¿qué segmentos son congruentes?, ¿por qué pasos podemos asegurar que $\Delta ABC \cong \Delta CDA$?, ¿qué criterio de congruencia es?

Después de la demostración
(15 min)

¿Cuál fue el último paso de la demostración?, ¿qué acabamos de demostrar?

* Concluir que lo que demostraron se cumple para todos los paralelogramos, es decir, siempre que tracemos una diagonal de un paralelogramo obtendremos dos triángulos congruentes.

* Haga notar las conclusiones que surgen a partir del paso 6).

* Concluir que éstas son características de todos paralelogramos

2. Encontrar las medidas de lados y ángulos opuestos de un paralelogramo. *Ejemplo* **1.5**
(5 min)

¿Cuáles son las características de los paralelogramos?, ¿cuál es el lado opuesto al $\overline{AB}$?, ¿cómo son los lados opuestos en un paralelogramo?, ¿cuál es la medida del $\overline{AB}$?, ¿por qué?

¿Qué representa y?, ¿cuál es el ángulo opuesto al $\angle D$?, ¿cómo son los ángulos opuestos en un paralelogramo?, ¿cuál es la medida del $\angle y$?, ¿por qué?

continúa en la siguiente página...

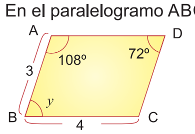
Unidad 5: **Cuadriláteros**

Lección 1: (3/8) Cuadriláteros

Sección 2: Paralelogramos

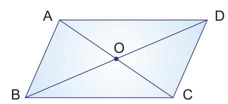
Objetivo:
- Indicar que las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio.
- Determinar la longitud de las diagonales de un paralelogramo.

Ejercicio 1.3 En el paralelogramo ABCD dado encuentre las medidas del $\overline{AD}$ y $\angle y$



Ejemplo 1.6

Demuestre que las diagonales del paralelogramo se cortan en el punto medio.



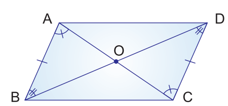
Solución:

Hipótesis: El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

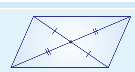
Conclusión: O es punto medio del $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$

Entre ΔOAB y ΔOCD,

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$	Por hipótesis y definición de paralelogramo
2) $\angle BAO \cong \angle DCO$	Por 1) y ser ángulos alternos internos
3) $\angle ABO \cong \angle CDO$	Por 1) y ser ángulos alternos internos
4) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	Por ser los lados opuestos de un paralelogramo
5) $\Delta OAB \cong \Delta OCD$	Por 2), 3), 4) y criterio de congruencia ALA
6) $\overline{AO} \cong \overline{CO}$	Por 5) y ser lados correspondientes de triángulos congruentes
7) O es punto medio del $\overline{AC}$	Por 6)
8) $\overline{BO} \cong \overline{DO}$	Por 7) y ser lados correspondientes de triángulos congruentes
9) O es punto medio del $\overline{BD}$	Por 8)



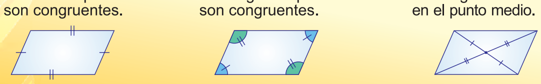
Se demostró que: las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio.



A partir de los **Ejemplo 1.4** y **Ejemplo 1.6** se concluye con las siguientes características.

Características de los paralelogramos

1. Los lados opuestos son congruentes.
2. Los ángulos opuestos son congruentes.
3. Las diagonales se cortan en el punto medio.



99

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

¿Por qué pasos decimos que $\Delta OAB \cong \Delta OCD$?, ¿qué criterio de congruencia se aplicó?, ¿qué podemos decir del $\overline{AO}$ y $\overline{CO}$, $\overline{BO}$ y $\overline{DO}$ según el paso anterior?, ¿cuál es la razón por la que O es el punto medio del $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$?

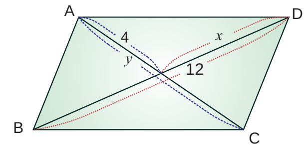
Después de la demostración *(15 min)*

¿Qué se demostró?

* Concluir dando las características que cumplen los paralelogramos.

Indicador de logro

El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo. Encuentra el valor de x y y.



3. Resolver **Ejercicio 1.3**

(5 min)

Solución

AD = 4

$m\angle y = 72°$

[Hasta aquí Clase 2]

[Desde aquí Clase 3]

1. Indicar características de los paralelogramos.

Ejemplo 1.6

Antes de la demostración

(10 min)

¿Cuál es la hipótesis?

¿Cuál es la conclusión?

¿Cómo deben ser el $\overline{AO}$ y el $\overline{CO}$ para decir que O es el punto medio del $\overline{AC}$?

¿Cómo deben ser el $\overline{BO}$ y el $\overline{DO}$ para decir que O es el punto medio del $\overline{BD}$?

En demostraciones anteriores, ¿qué utilizamos para probar que dos segmentos son congruentes?

¿Qué triángulos tendríamos que probar que son congruentes?

* Concluir que la demostración la harán entre ΔOAB y ΔOCD.

Durante la demostración

(10 min)

¿Cuál es el primer paso de la demostración?

¿Qué podemos afirmar de los lados opuestos del cuadrilátero ABCD dado que es un paralelogramo?

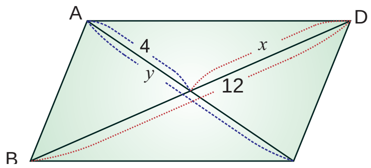
¿Qué ángulos son congruentes en la figura?, ¿por qué?

¿Qué lados son congruentes en el paralelogramo?, ¿por qué?

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo. Encuentra el valor de x y y.



Unidad 5: Cuadriláteros

Lección 1: (3/8) Cuadriláteros

Sección 2: Paralelogramos

Objetivo:
- Indicar que las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio.
- Determinar la longitud de las diagonales de un paralelogramo.

2. Encontrar la longitud de una diagonal de un paralelogramo. *Ejemplo* **1.7**

(5 min)

¿En qué punto se cortan las diagonales de un paralelogramo?

¿Cuál es la longitud que hay desde el vértice D hasta donde se cortan las diagonales?

¿Qué representa y?

¿Cuál es el valor de y?

3. Resolver *Ejercicio* **1.4**

(5 min)

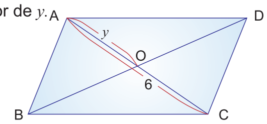
Solución

a) $x = 3$, $y = 4$

b) $x = 6$, $y = 8$

Ejemplo **1.7**

En el paralelogramo ABCD dado, encuentre el valor de y.

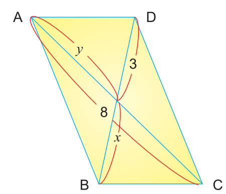


Solución:
y representa la longitud de la diagonal AC hasta el punto donde se corta con la diagonal BD. Entonces y mide la mitad de lo que mide el $\overline{AC}$, porque las diagonales de un paralelogramo se cortan el punto medio.

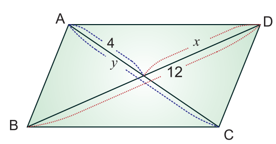
Respuesta: $y = 3$

Ejercicio **1.4** En los paralelogramos ABCD dados encuentre el valor de x y y

a)



b)



Unidad 5: **Cuadriláteros**

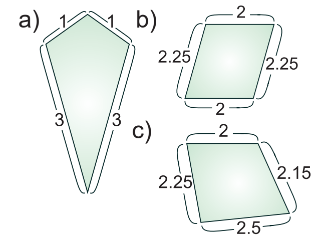
Lección 1: (4/8) Cuadriláteros

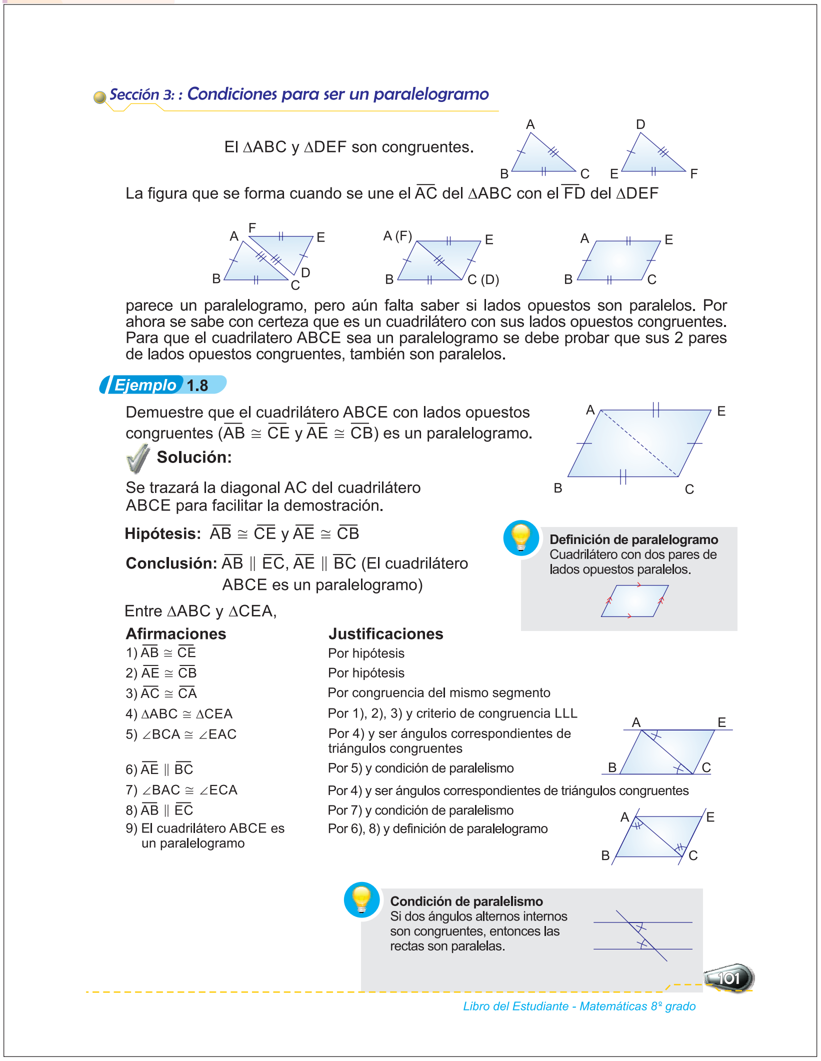
Sección 3: Condiciones para ser un paralelogramo

Objetivo: Indicar que un cuadrilátero es un paralelogramo si tiene dos pares de lados opuestos congruentes.

Indicador de logro

Indique cuál de los siguientes cuadriláteros es un paralelogramo:





Sección 3: : Condiciones para ser un paralelogramo

El ΔABC y ΔDEF son congruentes.

La figura que se forma cuando se une el $\overline{AC}$ del ΔABC con el $\overline{FD}$ del ΔDEF

parece un paralelogramo, pero aún falta saber si lados opuestos son paralelos. Por ahora se sabe con certeza que es un cuadrilátero con sus lados opuestos congruentes. Para que el cuadrilatero ABCE sea un paralelogramo se debe probar que sus 2 pares de lados opuestos congruentes, también son paralelos.

Ejemplo 1.8

Demuestre que el cuadrilátero ABCE con lados opuestos congruentes ($\overline{AB} \cong \overline{CE}$ y $\overline{AE} \cong \overline{CB}$) es un paralelogramo.

Solución:

Se trazará la diagonal AC del cuadrilátero ABCE para facilitar la demostración.

Hipótesis: $\overline{AB} \cong \overline{CE}$ y $\overline{AE} \cong \overline{CB}$

Conclusión: $\overline{AB} \parallel \overline{EC}$, $\overline{AE} \parallel \overline{BC}$ (El cuadrilátero ABCE es un paralelogramo)

Definición de paralelogramo
Cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos.

Entre ΔABC y ΔCEA,

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{AB} \cong \overline{CE}$	Por hipótesis
2) $\overline{AE} \cong \overline{CB}$	Por hipótesis
3) $\overline{AC} \cong \overline{CA}$	Por congruencia del mismo segmento
4) $\Delta ABC \cong \Delta CEA$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia LLL
5) $\angle BCA \cong \angle EAC$	Por 4) y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes
6) $\overline{AE} \parallel \overline{BC}$	Por 5) y condición de paralelismo
7) $\angle BAC \cong \angle ECA$	Por 4) y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes
8) $\overline{AB} \parallel \overline{EC}$	Por 7) y condición de paralelismo
9) El cuadrilátero ABCE es un paralelogramo	Por 6), 8) y definición de paralelogramo

Condición de paralelismo
Si dos ángulos alternos internos son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

101

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Durante la demostración (10 min)

* Preguntar siempre por el primer paso de la demostración.

* Trazar la diagonal AC.

¿$\overline{AC} \cong \overline{CA}$?, ¿por qué razón?

¿Por qué pasos y criterio de congruencia el $\Delta ABC \cong \Delta CEA$?

¿Qué ángulos alternos internos son congruentes?

¿Por qué el $\overline{AB} \parallel \overline{EC}$?

¿Por qué el $\overline{AE} \parallel \overline{BC}$?

¿Cómo termina la demostración?

continúa en la siguiente página...

1. Introducción al Ejemplo 1.8

(5 min)

* Construir un cuadrilátero a partir de dos triángulos congruentes. Concluya que NO se debe decir que el cuadrilátero ABCE es un paralelogramo si no se comprueba que sus lados opuestos son paralelos.

2. Demostrar que un cuadrilátero con lados opuestos congruentes es un paralelogramo. Ejemplo 1.8

Antes de la demostración *(15 min)*

¿Cuál es la hipótesis y conclusión?

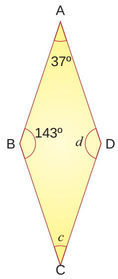
Si el cuadrilátero ABCE es un paralelogramo, ¿cómo deben ser sus lados?, ¿qué debemos demostrar para que el cuadrilátero ABCE sea un paralelogramo?

* Preguntar si ellos recuerdan alguna condición del paralelismo. Si no, mencione que para llegar a $\overline{AB} \parallel \overline{EC}$ y $\overline{AE} \parallel \overline{BC}$ harán uso de la siguiente condición: **Si dos ángulos alternos internos son congruentes, entonces las rectas son paralelas.**

* Con base a lo anterior piense con sus estudiantes en un plan de desarrollo para la demostración. En el plan debe quedar claro que se tiene que demostrar $\Delta ABC \cong \Delta CEA$ y obtener de ahí los ángulos alternos internos congruentes.

Indicador de logro

Encuentre la medida que debe tener $\angle c$, $\angle d$, x, y, para que el cuadrilátero sea un paralelogramo.



Después de la demostración (5 min)

¿Qué podemos decir de aquellos cuadriláteros que tienen los lados opuestos congruentes?, ¿por qué?

* Concluir que una condición para que un cuadrilátero sea un paralelogramo es que sus lados opuestos sean congruentes.

3. Identificar cuál cuadrilátero es un paralelogramo.

Ejemplo **1.9**

(5 min)

¿Cómo deben ser los lados opuestos del cuadrilátero para que sea un paralelogramo?

¿El cuadrilátero del inciso a) cumple esa condición?, ¿por qué?

¿El cuadrilátero del inciso b) cumple esa condición?, ¿por qué?

¿El cuadrilátero del inciso c) cumple esa condición?, ¿por qué?

4. Resolver *Ejercicio* **1.5**

(5 min)

Solución

a) No es paralelogramo.

b) Sí es paralelogramo.

c) No es paralelogramo.

[Hasta aquí Clase 4]

[Desde aquí Clase 5]

1. Introducción *Ejemplo* **1.10**

(5 min)

* Presentar un cuadrilátero cuyos ángulos opuestos sea congruentes. Pregunte si este es un paralelogramo
* Indicar que para ser paralelogramo sus lados opuestos deben ser paralelos.

continúa en la siguiente página...

Unidad 5: **Cuadriláteros**

Lección 1: (5/8) Cuadriláteros

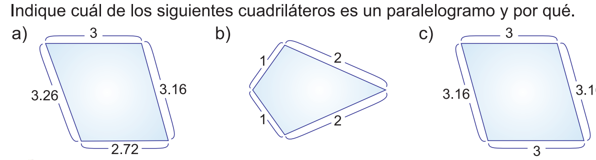
Sección 3: Condiciones para ser un paralelogramo

Objetivo: Indicar que un cuadrilátero es un paralelogramo si tiene dos pares de ángulos opuestos congruentes.

Un cuadrilátero que tiene sus dos pares de lados opuestos congruentes también es un paralelogramo.

Ejemplo **1.9**

Indique cuál de los siguientes cuadriláteros es un paralelogramo y por qué.



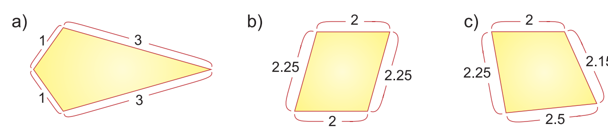
Solución:

a) No es un paralelogramo, porque ninguno de sus lados es congruente.

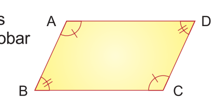
b) No es un paralelogramo. A pesar de que tiene dos pares de lados congruentes, esos lados no son opuestos.

c) Si es un paralelogramo. Se probó que un cuadrilátero con dos pares de lados opuestos congruentes es un paralelogramo.

Ejercicio **1.5** Indique cuál de los siguientes cuadriláteros es un paralelogramo.



El cuadrilátero ABCD tiene sus 2 pares de ángulos opuestos congruentes. Aunque parece un paralelogramo, aún falta probar si cada par de lados opuestos son paralelos.



Unidad 5: **Cuadriláteros**

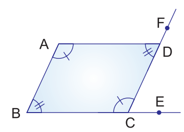
Lección 1: (5/8) Cuadriláteros

Sección 3: Condiciones para ser un paralelogramo

Objetivo: Indicar que un cuadrilátero es un paralelogramo si tiene dos pares de ángulos opuestos congruentes.

Ejemplo 1.10

Demuestre que el cuadrilátero ABCD dado cuyo 2 pares de ángulos opuestos son congruentes, es un paralelogramo.



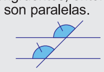
Solución:

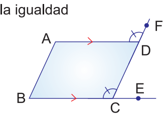
Hipótesis: $\angle A \cong \angle C$, $\angle B \cong \angle D$ en el cuadrilátero ABCD.

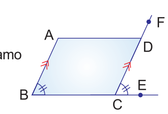
Conclusión: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo)

Afirmaciones	Justificaciones
1) Sean E y F puntos en la prolongación del $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, respectivamente	Por construcción auxiliar.
2) $\angle A \cong \angle C$, $\angle B \cong \angle D$	Por hipótesis.
3) $m\angle C = m\angle DCB$	Por ser el mismo ángulo
4) $m\angle D = m\angle ADC$	Por ser el mismo ángulo
5) $m\angle A = m\angle DCB$	Por 2) y 3)
6) $m\angle B = m\angle ADC$	Por 2) y 4)
7) $m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360°$	Por ser la suma de las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero 360°
8) $2m\angle DCB + 2m\angle ADC = 360°$	Por sustitución de 3), 4), 5) y 6) en 7) y suma de términos semejantes
9) $m\angle DCB + m\angle ADC = 180°$	Por dividir entre 2 a ambos lados de la igualdad
10) $m\angle FDA + m\angle ADC = 180°$	Por ser ángulos suplementarios
11) $m\angle DCB = m\angle FDA$	Por 9) y 10)
12) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	Por 11) y condición de paralelismo
13) $2m\angle DCB + 2m\angle B = 360°$	Por sustitución de 6) en 8)
14) $m\angle DCB + m\angle B = 180°$	Por dividir entre 2 a ambos lados de la igualdad.
15) $m\angle DCB + m\angle ECD = 180°$	Por ser ángulos suplementarios
16) $m\angle B = m\angle ECD$	Por 14) y 15)
17) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$	Por 16) y condición de paralelismo
18) El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.	Por 12), 17) y definición de paralelogramo

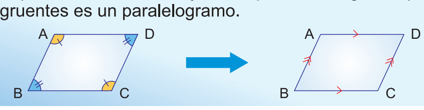
Condición de paralelismo
Si dos ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas son paralelas.





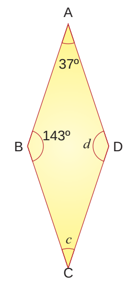


Se probó que un cuadrilátero cuyos dos pares de ángulos opuestos son congruentes es un paralelogramo.



Indicador de logro

Encuentre la medida que debe tener $\angle c$, $\angle d$, x, y, para que el cuadrilátero sea un paralelogramo.



2. Demostrar que un cuadrilátero con dos pares de ángulos opuestos congruentes es un paralelogramo.

Ejemplo 1.10

* ¡Haga esta demostración si considera que sus estudiantes tienen el nivel suficiente para entenderla!

Antes de la demostración *(5 min)*

¿Qué es lo que debemos probar?

* Trazar los puntos F y E para prolongar al $\overline{CD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Mencione que por conveniencia este será nuestro primer paso de la demostración.
* Mencionar que para esta demostración usarán otra condición de paralelismo: Si dos ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas son paralelas.
* Plantear con sus estudiantes un plan de desarrollo para la demostración.

¿A qué es igual la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero?

Durante la demostración (15 min)

* Inicie la demostración con la construcción auxiliar y luego indique la hipótesis.

¿Qué ocurrió para qué $m\angle DCB + m\angle ADC = 180°$?

¿Por qué $m\angle FDA + m\angle ADC = 180°$?

¿Por qué $m\angle DCB = m\angle FDA$?

¿Por qué $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$?

* Deténganse para analizar si la demostración va como lo planeó al inicio.
* Los siguientes pasos de la demostración abórdelos como lo hizo desde el paso 8) de la demostración.

Después de la demostración (10 min)

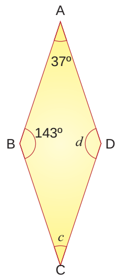
¿Qué se demostró?

* Concluir que todo cuadrilátero con los ángulos opuestos congruentes es un paralelogramo.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Encuentre la medida que debe tener $\angle c$, $\angle d$, x, y, para que el cuadrilátero sea un paralelogramo.



Unidad 5: **Cuadriláteros**

Lección 1: (5/8) Cuadriláteros

Sección 3: Condiciones para ser un paralelogramo

Objetivo: Indicar que un cuadrilátero es un paralelogramo si tiene dos pares de ángulos opuestos congruentes.

3. Encontrar la medida de lados y ángulos que hacen al cuadrilátero un paralelogramo. Ejemplo 1.11

(5 min)

En el inciso a)

¿Qué condición deben cumplir los lados opuestos de un cuadrilátero para que sea un paralelogramo?

Entonces, ¿cuál es el valor de x?, ¿cuál es el valor de y?

En el inciso b)

¿Qué condición deben cumplir los ángulos opuestos de un cuadrilátero para que sea un paralelogramo?

¿Cuál es la $m\angle b$ y $m\angle c$?

4. Resolver Ejercicio 1.6

(5 min)

Solución

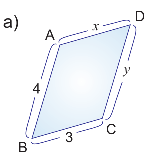
a) $m\angle c$ = 37°, $m\angle d$ = 143°

b) x = 2, y = 2.5

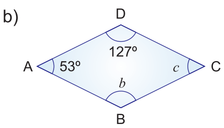
Ejemplo 1.11

Encuentre la medida que debe tener x, y, $\angle b$, $\angle c$ para que el cuadrilátero sea un paralelogramo.

a)



b)



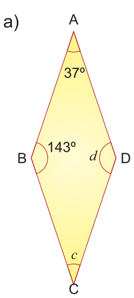
Solución:

a) Anteriormente se probó que un cuadrilátero con sus pares de lados opuestos congruentes es un paralelogramo, así que $x = 3$ y $y = 4$.

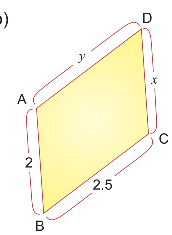
b) También se probó que un cuadrilátero con sus pares de ángulos opuestos congruentes es un paralelogramo, así que $m\angle b = 127°$ y $m\angle c = 53°$.

Ejercicio 1.6 Encuentre la medida que debe tener $\angle c$, $\angle d$, x, y, para que el cuadrilátero sea un paralelogramo.

a)



b)



Unidad 5: **Cuadriláteros**

Lección 1: (6/8) Cuadriláteros

Sección 3: Condiciones para ser un paralelogramo

Objetivo: Verificar las condiciones para que un cuadrilátero sea un paralelogramo.

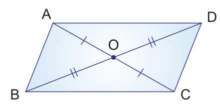
Ejemplo 1.12

Demuestre que un cuadrilátero cuyas diagonales se cortan en un punto medio es un paralelogramo.

Solución:

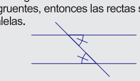
Hipótesis: Las diagonales del cuadrilátero ABCD se cortan en el punto medio O, es decir, $\overline{AO} \cong \overline{CO}$ y $\overline{BO} \cong \overline{DO}$

Conclusión: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo)

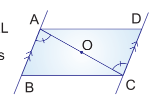


Entre ΔAOB y ΔCOD,

Condición de paralelismo
Si dos ángulos alternos internos son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

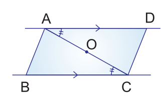


Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $\overline{AO} \cong \overline{CO}$	Por hipótesis
2) $\overline{BO} \cong \overline{DO}$	Por hipótesis
3) $\angle AOB \cong \angle COD$	Por ser ángulos opuestos por el vértice
4) $\Delta AOB \cong \Delta COD$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia LAL
5) $\angle BAO \cong \angle DCO$	Por 4) y por ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes
6) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$	Por 5) y condición de paralelismo

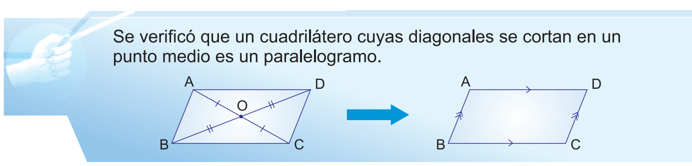


Entre ΔAOD y ΔCOB,

7) $\angle AOD \cong \angle COB$	Por ser ángulos opuestos por el vértice
8) $\Delta AOD \cong \Delta COB$	Por 1), 2) y 7) y criterio de congruencia LAL
9) $\angle DAO \cong \angle BCO$	Por 8) y por ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes
10) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	Por 9) y condición de paralelismo
11) El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo	Por 6), 10) y definición de paralelogramo



Se verificó que un cuadrilátero cuyas diagonales se cortan en un punto medio es un paralelogramo.



105

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Después de la demostración

(10 min)

¿Cuál es el último paso de la demostración?

¿Qué acabamos de demostrar?

* Concluir que todo cuadrilátero cuyas diagonales se cortan en el punto medio es un paralelogramo.

Indicador de logro

Complete la siguiente demostración. Un cuadrilátero con un par de lados opuestos paralelos y congruentes es un paralelogramo.

Sugerencia: trace la diagonal AC.

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $\overline{AD} \cong \overline{CB}$	
2) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	
3) Sea $\overline{AC}$ la diagonal del cuadrilátero ABCD	Por construcción auxiliar
4) $\angle DAC \cong$	Por 2) y ser ángulos alternos internos
5) $\overline{AC} \cong \overline{CA}$	
6) $\Delta BAC \cong \Delta DCA$	Por 1), 4), 5) y criterio de congruencia
7) $\angle BAC \cong$	Por 6) y ser de triángulos congruentes
8) $\overline{AB} \parallel$	Por 7) y condición de paralelismo
9)	Por 2), 8) y definición de paralelogramo

1. **Verificar que un cuadrilátero cuyas diagonales se cortan en un punto medio es un paralelogramo.**

Ejemplo 1.12

Antes de la demostración

(10 min)

¿Cuál es la hipótesis y cuál es la conclusión?

¿Qué condiciones han ayudado para probar el paralelismo en las dos últimas demostraciones?

¿Cuál usarán en este caso?

* Establecer un plan de desarrollo para la demostración.

* Concluir que la demostración la harán entre ΔAOB y ΔCOD y luego entre ΔAOD y ΔCOB.

Durante la demostración

(10 min)

¿Cuál es el primer paso de la demostración?

¿Por qué $\angle AOB \cong \angle COD$?

¿Por qué $\Delta AOB \cong \Delta COD$?

¿Por qué $\angle BAO \cong \angle DCO$?

¿Por qué $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$?

* Realizar el mismo análisis para llegar a que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. Considerar los triángulos ΔAOD y ΔCOB.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Complete la siguiente demostración. Un cuadrilátero con un par de lados opuestos paralelos y congruentes es un paralelogramo.

Sugerencia: trace la diagonal AC.

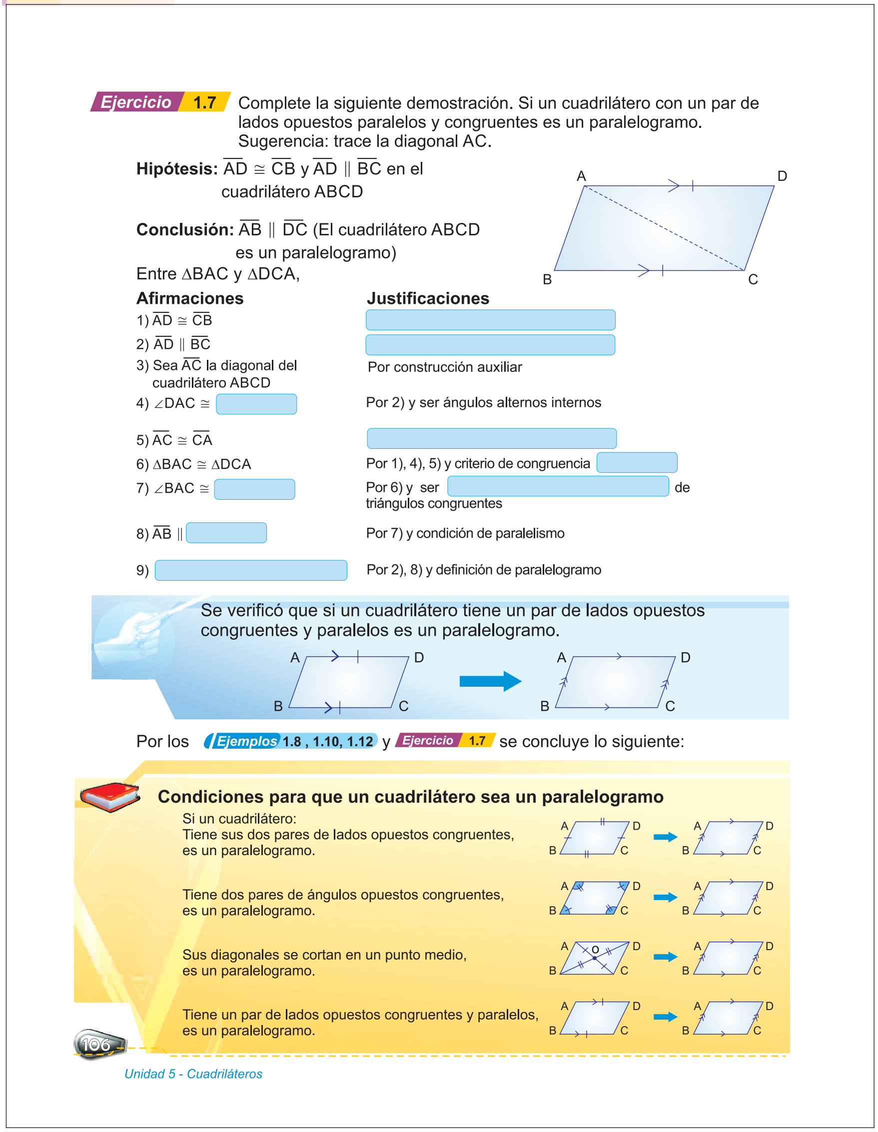
Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{AD} \cong \overline{CB}$	
2) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	
3) Sea $\overline{AC}$ la diagonal del cuadrilátero ABCD	Por construcción auxiliar
4) $\angle DAC \cong$	Por 2) y ser ángulos alternos internos
5) $\overline{AC} \cong \overline{CA}$	
6) $\Delta BAC \cong \Delta DCA$	Por 1), 4), 5) y criterio de congruencia
7) $\angle BAC \cong$	Por 6) y ser ___ de triángulos congruentes
8) $\overline{AB} \parallel$	Por 7) y condición de paralelismo
9)	Por 2), 8) y definición de paralelogramo

Unidad 5: **Cuadriláteros**

Lección 1: (6/8) Cuadriláteros

Sección 3: Condiciones para ser un paralelogramo

Objetivo: Verificar las condiciones para que un cuadrilátero sea un paralelogramo.


Ejercicio 1.7 Complete la siguiente demostración. Si un cuadrilátero con un par de lados opuestos paralelos y congruentes es un paralelogramo. Sugerencia: trace la diagonal AC.

Hipótesis: $\overline{AD} \cong \overline{CB}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ en el cuadrilátero ABCD

Conclusión: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ (El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo)

Entre ΔBAC y ΔDCA,

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\overline{AD} \cong \overline{CB}$	
2) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	
3) Sea $\overline{AC}$ la diagonal del cuadrilátero ABCD	Por construcción auxiliar
4) $\angle DAC \cong$	Por 2) y ser ángulos alternos internos
5) $\overline{AC} \cong \overline{CA}$	
6) $\Delta BAC \cong \Delta DCA$	Por 1), 4), 5) y criterio de congruencia
7) $\angle BAC \cong$	Por 6) y ser ___ de triángulos congruentes
8) $\overline{AB} \parallel$	Por 7) y condición de paralelismo
9)	Por 2), 8) y definición de paralelogramo

Se verificó que si un cuadrilátero tiene un par de lados opuestos congruentes y paralelos es un paralelogramo.

Por los Ejemplos 1.8, 1.10, 1.12 y Ejercicio 1.7 se concluye lo siguiente:

Condiciones para que un cuadrilátero sea un paralelogramo

Si un cuadrilátero:
Tiene sus dos pares de lados opuestos congruentes, es un paralelogramo.

Tiene dos pares de ángulos opuestos congruentes, es un paralelogramo.

Sus diagonales se cortan en un punto medio, es un paralelogramo.

Tiene un par de lados opuestos congruentes y paralelos, es un paralelogramo.

106 Unidad 5 - Cuadriláteros

2. Resolver Ejercicio 1.7

(10 min)

Solución

* Concluir que si un cuadrilátero tiene un par de lados opuestos congruentes y paralelos entonces es un paralelogramo.

Afirmaciones

1) $\overline{AD} \cong \overline{CB}$

2) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

3) Sea $\overline{AC}$ la diagonal del cuadrilátero ABCD

4) $\angle DAC \cong$ $\boxed{\angle BCA}$

5) $\overline{AC} \cong \overline{CA}$

6) $\Delta BAC \cong \Delta DCA$

7) $\angle BAC \cong$ $\boxed{\angle DCA}$

8) $\overline{AB} \parallel$ $\boxed{\overline{DC}}$

9) El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo

Justificaciones

1) Por hipótesis

2) Por hipótesis

3) Por construcción auxiliar

4) Por 2) y ser ángulos alternos internos

5) Por congruencia del mismo segmento

6) Por 1), 4), 5) y criterio de congruencia LAL

7) Por 6) y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes

8) Por 7) y condición de paralelismo

9) Por 2), 8) y definición de paralelogramo

3. Conclusión general

(5 min)

* Resumir las condiciones para que un cuadrilátero sea un paralelogramo.

Unidad 5: Cuadriláteros

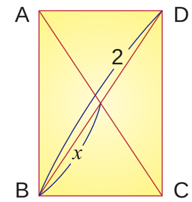
Lección 1: Cuadriláteros
(7/8)

Sección 4: Rectángulos, rombos y cuadrados

Objetivo: Indicar que las diagonales del rectángulo son congruentes.

Indicador de logro

El cuadrilátero ABCD es un rectángulo. Encuentre el valor de x



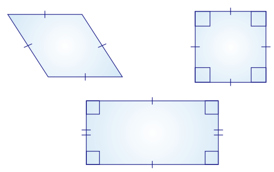
Sección 4: Rectángulos, rombos y cuadrados.

Ejemplo 1.13

En los siguientes cuadriláteros identifique:
a) El que tiene cuatro lados congruentes (escriba su nombre).

b) El que tiene cuatro ángulos congruentes (escriba su nombre).

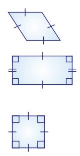
c) El que tiene sus cuatro ángulos y cuatro lados congruentes (escriba su nombre).



Solución:
a) El rombo tiene cuatro lados congruentes.

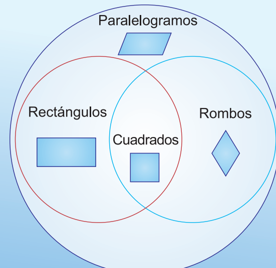
b) El rectángulo tiene cuatro ángulos congruentes.

c) El cuadrado tiene cuatro lados y ángulos congruentes.



Los ángulos del rectángulo y cuadrado miden 90°.
360° ÷ 4 = 90°

Si observa bien las características de los rombos, rectángulos y cuadrados, estos cumplen con las condiciones para ser paralelogramos. Por esta razón, los rombos, los rectángulos y los cuadrados también son paralelogramos.
El cuadrado puede ser considerado un rectángulo o rombo.



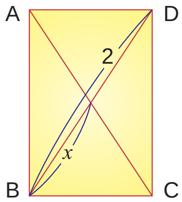
1. **Definir rectángulo, rombo y cuadrado.** **Ejemplo 1.13**
(10 min)

* Si los estudiantes incluyen al cuadrado como respuesta del inciso a) o b), rectifíquelo al final, ya que el inciso c) es una pregunta específica para el cuadrado.
* Al final de este ejemplo concluir con las definiciones de rombo, rectángulo y cuadrado.
* Hacer notar que los ángulos del rectángulo y cuadrado miden siempre 90°.
* Explicar que las características de los rombos, rectángulos y cuadrados cumplen las condiciones para ser paralelogramos.
* Denotar que el cuadrado puede ser considerado un rectángulo o rombo.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

El cuadrilátero ABCD es un rectángulo. Encuentre el valor de x

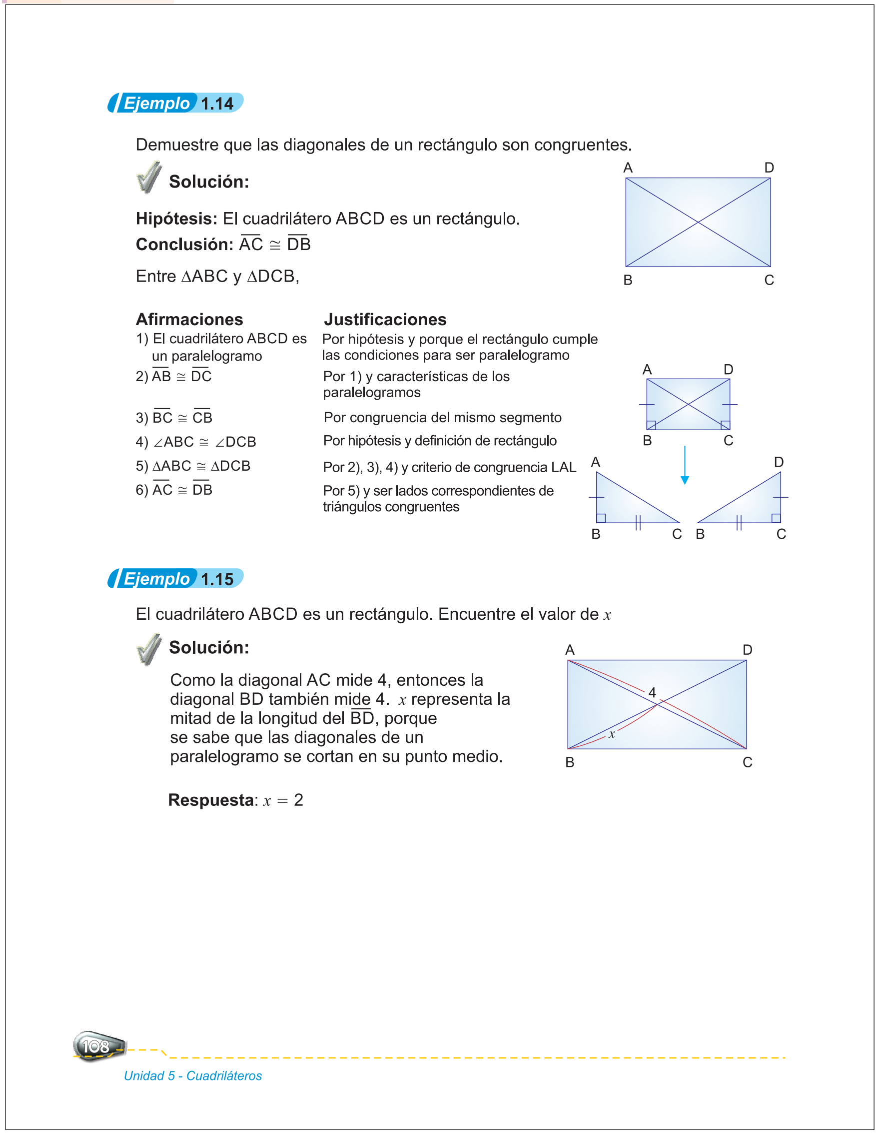


Unidad 5: Cuadriláteros

Lección 1: (7/8) Cuadriláteros

Sección 4: Rectángulos, rombos y cuadrados

Objetivo: Indicar que las diagonales del rectángulo son congruentes.



Ejemplo 1.14

Demuestre que las diagonales de un rectángulo son congruentes.

Solución:

Hipótesis: El cuadrilátero ABCD es un rectángulo.

Conclusión: $\overline{AC} \cong \overline{DB}$

Entre ΔABC y ΔDCB,

Afirmaciones	Justificaciones
1) El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo	Por hipótesis y porque el rectángulo cumple las condiciones para ser paralelogramo
2) $\overline{AB} \cong \overline{DC}$	Por 1) y características de los paralelogramos
3) $\overline{BC} \cong \overline{CB}$	Por congruencia del mismo segmento
4) $\angle$ABC $\cong$ $\angle$DCB	Por hipótesis y definición de rectángulo
5) ΔABC $\cong$ ΔDCB	Por 2), 3), 4) y criterio de congruencia LAL
6) $\overline{AC} \cong \overline{DB}$	Por 5) y ser lados correspondientes de triángulos congruentes

Ejemplo 1.15

El cuadrilátero ABCD es un rectángulo. Encuentre el valor de x

Solución:

Como la diagonal AC mide 4, entonces la diagonal BD también mide 4. x representa la mitad de la longitud del $\overline{BD}$, porque se sabe que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

Respuesta: $x = 2$

108 Unidad 5 - Cuadriláteros

2. Verificar que las diagonales de un rectángulo son congruentes. *Ejemplo* **1.14**

Antes de la demostración *(10 min)*

¿Cuál es la hipótesis y la conclusión?

Anteriormente ¿cómo han demostrado la congruencia entre dos segmentos?

¿Qué triángulos van a demostrar que son congruentes?

* Indicar que la demostración la harán entre ΔABC y ΔDCB.

Durante la demostración *(5 min)*

¿Cuál es el primer paso?

¿Qué implica que el cuadrilátero ABCD sea un rectángulo?

¿Por qué $\overline{AB} \cong \overline{DC}$?

¿Por qué $\overline{BC} \cong \overline{CB}$?

¿Qué podemos concluir de los pasos anteriores respecto al ΔABC y ΔDCB?, ¿por qué $\overline{AC} \cong \overline{DB}$?

Después de la demostración *(5 min)*

¿Qué se demostró?

¿Cuáles son las características de las diagonales de un rectángulo?

3. Encontrar la longitud de la diagonal de un rectángulo.

Ejemplo **1.15** *(10 min)*

¿Cuáles son las características de las diagonales de un rectángulo?

¿Cuánto mide la diagonal AC del rectángulo?

¿Cuánto mide la diagonal BD?

¿Qué representa x en el rectángulo?

¿Cuál es el valor de x?, ¿por qué?

continúa en la siguiente página...

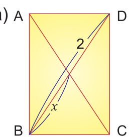
Unidad 5: **Cuadriláteros**

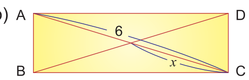
Lección 1: (8/8) Cuadriláteros

Sección 5: Trapecios

Objetivo: Determinar la medida de ángulos basales en trapecios isósceles.

Ejercicio 1.8 El cuadrilátero ABCD es un rectángulo. Encuentre el valor de x.

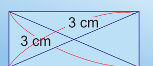
a) 

b) 

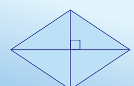
Por ahora solo se demostró la propiedad que cumplen las diagonales del rectángulo. Las propiedades que cumplen las diagonales de un rombo y cuadrado se mencionan a continuación:

Las diagonales de los:

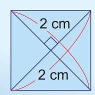
Rectángulos son congruentes.



Rombos son perpendiculares.



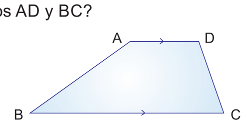
Cuadrados son congruentes y perpendiculares.



Sección 5: Trapecios.

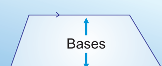
Ejemplo 1.16

Observe la siguiente figura y escriba:
a) ¿Qué par de lados son paralelos?
b) ¿Qué tipo de cuadrilátero es?
c) ¿Qué pares de ángulos son adyacentes a los lados AD y BC?

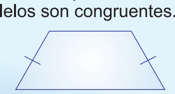


Solución:
a) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
b) Es un trapecio, porque solo tiene un par de lados opuestos paralelos.
c) Los ángulos adyacentes al $\overline{AD}$ son el $\angle A$ y $\angle D$
y los ángulos adyacentes al $\overline{BC}$ son el $\angle B$ y $\angle C$.

A los lados paralelos de un trapecio se les llaman **bases**.

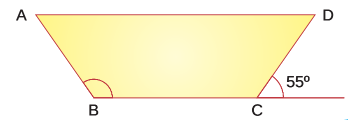


Un **trapecio isósceles** es aquel cuyos lados opuestos **NO** paralelos son congruentes.



Indicador de logro

El cuadrilátero ABCD es trapecio isósceles. Encuentre la medida del $\angle B$.



4. Resolver **Ejercicio 1.8**

(5 min)

Solución

a) x = 1 b) x = 3

* Concluir con las propiedades de las diagonales de los rectángulos, rombos y cuadrados.

[Hasta aquí Clase 7]
[Desde aquí Clase 8]

1. Definir trapecio isósceles.

Ejemplo 1.16

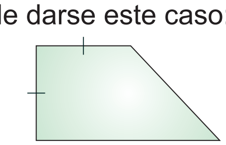
(20 min)

* Recordar qué simboliza “>” y “>>” sobre los segmentos y la clasificación de los cuadriláteros según el paralelismo de sus lados.

¿Qué significa que los ángulos sean adyacentes a los lados AD y BC?

* Concluir con la definición de bases en un trapecio y la definición del trapecio isósceles.

Observe que si en la definición de trapecio isósceles no se aclara que los lados opuestos son congruentes puede darse este caso:

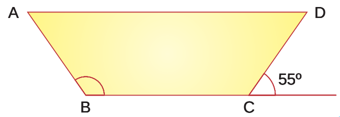


Y este trapecio NO es isósceles. (NO es necesario que haga esta observación al menos que surja como inquietud de un estudiante)

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

El cuadrilátero ABCD es trapecio isósceles. Encuentre la medida del $\angle$B.



Unidad 5: **Cuadriláteros**

Lección 1: (8/8) Cuadriláteros

Sección 5: Trapecios

Objetivo: Deducir que los ángulos adyacentes a una misma base en un trapecio isósceles son congruentes.

2. Deducir que los ángulos adyacentes a una misma base en un trapecio isósceles son congruentes.

(10 min)

* Mostrar a los estudiantes varios trapecios isósceles con la medida de los ángulos adyacentes a una misma base. Que ellos deduzcan la propiedad que cumple este tipo de trapecios.

* Concluir con la propiedad: Los ángulos adyacentes a una misma base de un trapecio isósceles son congruentes.

3. Encontrar la medida de un ángulo adyacente a la base de un trapecio isósceles.

Ejemplo 1.17

(10 min)

¿Qué tipo de trapecio es?, ¿por qué?, ¿qué relación tiene el $\angle$C con el ángulo que mide 110°?, ¿cuánto debe ser la suma de sus medidas?, ¿cuánto mide $\angle$C?, ¿qué representa x en el trapecio?, ¿cómo son las medidas de los ángulos C y B?, ¿qué propiedad cumplen los ángulos adyacentes a una misma base en un trapecio isósceles?, ¿cuál es la medida del $\angle$B?

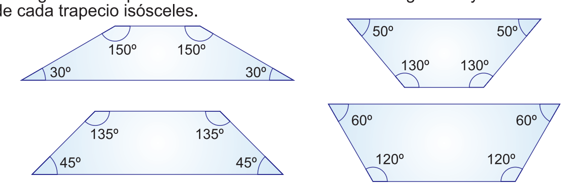
4. Resolver Ejercicio 1.9

(5 min)

Solución

$m\angle$B = 125º

Los siguientes trapecios son isósceles. Observe los ángulos adyacentes a las bases de cada trapecio isósceles.



¿Cómo son entre sí cada par de ángulos adyacentes a las bases del trapecio?, ¿son congruentes?

Si construye otro trapecio isósceles, ¿piensa que los ángulos adyacentes a una misma base serán congruentes?

¿Qué puede concluir acerca de los ángulos adyacentes a una misma base de un trapecio isósceles?

Se debería demostrar que los ángulos adyacentes a una misma base de un trapecio isósceles son congruentes, así como se ha hecho anteriormente con las propiedades de algunas figuras. Por ahora no se hará, pero se aceptará como verdadero que para todo trapecio isósceles se cumple lo siguiente:

Los ángulos adyacentes a una misma base de un trapecio isósceles son congruentes.

Ejemplo 1.17

El cuadrilátero ABCD es trapecio isósceles, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$. Encuentre la medida del $\angle$B.

Solución:

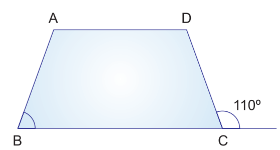
$m\angle C + 110° = 180°$, porque el $\angle$C es el suplemento del ángulo de 110°. Despejando para la $m\angle$C, se tiene que

$m\angle C = 180° - 110° = 70°$

Luego, $m\angle B = m\angle C$ por ser ángulos adyacentes a una misma base del trapecio isósceles ABCD.

Entonces $m\angle B = 70°$

Respuesta: $m\angle B = 70°$



Ejercicio 1.9 El cuadrilátero ABCD es trapecio isósceles, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$. Encuentre la medida del $\angle$B.

110

Unidad 5 - Cuadriláteros

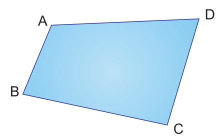
Unidad 5: Cuadriláteros

(1/2): Ejercicios de la unidad

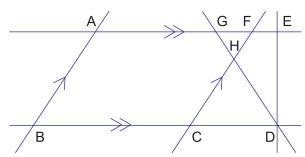
Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre cuadriláteros

Ejercicios

1 Observe el cuadrilátero ABCD y conteste lo siguiente:
a) ¿Qué lados del cuadrilátero son adyacentes al $\overline{BC}$?
b) ¿Qué lados del cuadrilátero son opuestos al $\overline{BC}$?
c) ¿Qué ángulos del cuadrilátero son adyacentes al $\angle B$?
d) ¿Qué ángulos del cuadrilátero son opuestos al $\angle B$?

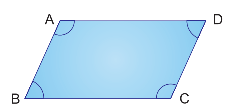


2 En la figura de la derecha:
a) ¿Cuáles cuadriláteros logra identificar?
b) ¿Cuáles de ellos son paralelogramos?, ¿por qué?
c) ¿Cuáles de ellos son trapecios?, ¿por qué?



3 Complete la siguiente demostración. Si los ángulos consecutivos de un cuadrilátero ABCD son suplementarios, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo. (Esta sería otra condición que deben cumplir los cuadriláteros para ser paralelogramos.)

Hipótesis: $m\angle A + m\angle B = 180°$
$m\angle B + m\angle C = 180°$
$m\angle C + m\angle D = 180°$
$m\angle D + m\angle A = 180°$



Conclusión: El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo

Afirmaciones	Justificaciones
1) $m\angle A + m\angle B = 180°$	
2) $m\angle B + m\angle C = 180°$	
3) $m\angle A + m\angle B = m\angle B + m\angle C$	Igualando 1) y 2)
4) $m\angle A = m\angle C$	Por 3) y reducción de términos semejantes
5) $m\angle C + m\angle D = 180°$	
6) $m\angle B + m\angle C =$	Igualando 2) y 5)
7) $m\angle B =$	Por 6) y reducción de términos semejantes
8) Los ángulos opuestos del cuadrilátero ABCD son congruentes	
9) El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo	Por 8) y condiciones para ser un paralelogramo

111

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Justificaciones
1) Por hipótesis
2) Por hipótesis
3) Igualando 1) y 2)
4) Por 3) y reducción de términos semejantes
5) Por hipótesis
6) Igualando 2) y 5)
7) Por 6) y reducción de términos semejantes
8) Por 4) y 7)
9) Por 8) y condiciones para ser un paralelogramo

1 Identificar elementos de un cuadrilátero.

Solución

a) Lados adyacentes al $\overline{BC}$ son $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$.
b) Lado opuesto al $\overline{BC}$ es el $\overline{AD}$.
c) Ángulos adyacentes al $\angle B$ son $\angle A$ y $\angle C$.
d) Ángulo opuesto al $\angle B$ es el $\angle D$.

2 Clasificar cuadriláteros.

Solución

a) Cuadriláteros: ABCF, ABDE, ABDG, CDEF, DEFH.
b) Paralelogramos: ABCF, porque $\overline{AF} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{FC}$.
c) Trapecios: ABDG, porque $\overline{AG} \parallel \overline{BD}$; ABDE, porque $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$; CDEF, porque $\overline{FE} \parallel \overline{CD}$.

3 Completar demostración. Si los ángulos consecutivos de un cuadrilátero ABCD son suplementarios, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

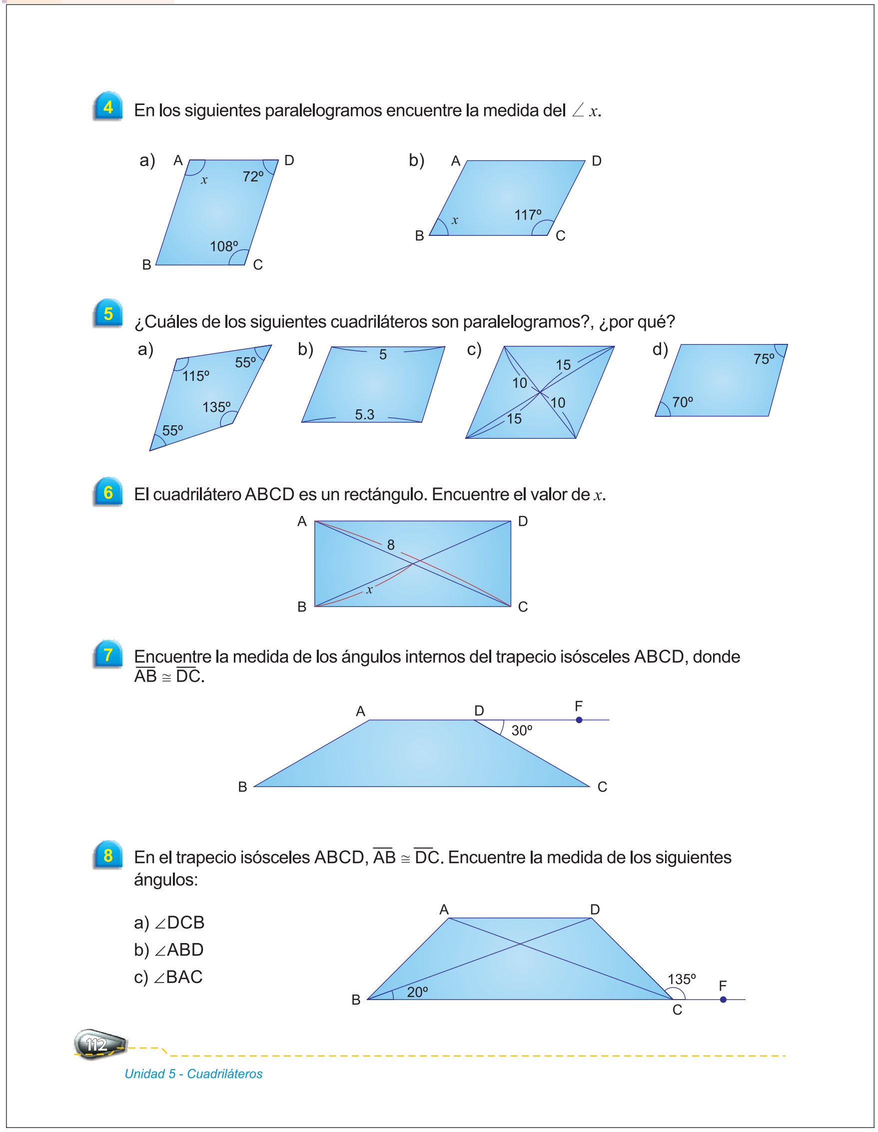
Solución

Afirmaciones
1) $m\angle A + m\angle B = 180°$
2) $m\angle B + m\angle C = 180°$
3) $m\angle A + m\angle B = m\angle B + m\angle C$
4) $m\angle A = m\angle C$
5) $m\angle C + m\angle D = 180°$
6) $m\angle B + m\angle C = \boxed{m\angle C + m\angle D}$
7) $m\angle B = \boxed{m\angle D}$
8) Los ángulos opuestos del cuadrilátero ABCD son congruentes
9) El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo

Unidad 5: Cuadriláteros

(2/2): Ejercicios de la unidad

Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre cuadriláteros



4 En los siguientes paralelogramos encuentre la medida del $\angle x$.

a) A, D, x, 72º, 108º, B, C

b) A, D, B, x, 117º, C

5 ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros son paralelogramos?, ¿por qué?

a) 115º, 55º, 135º, 55º
b) 5, 5.3
c) 15, 10, 10, 15
d) 75º, 70º

6 El cuadrilátero ABCD es un rectángulo. Encuentre el valor de x.

A, D, 8, x, B, C

7 Encuentre la medida de los ángulos internos del trapecio isósceles ABCD, donde $\overline{AB} \cong \overline{DC}$.

A, D, F, 30º, B, C

8 En el trapecio isósceles ABCD, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$. Encuentre la medida de los siguientes ángulos:

a) $\angle$DCB
b) $\angle$ABD
c) $\angle$BAC

A, D, B, 20º, 135º, F, C

112 Unidad 5 - Cuadriláteros

4 Encontrar la medida de un ángulo en un paralelogramo.

Solución

a) $m\angle x$ = 108°

b) $m\angle x$ = 63°

5 Identificar cuál cuadrilátero es un paralelogramo.

Solución

a) No es un paralelogramo, porque solo un par de sus ángulos opuestos son congruentes.

b) No es un paralelogramo, porque un par de sus lados opuestos **NO** son congruentes.

c) Sí es un paralelogramo, porque si las diagonales de un cuadrilátero se cortan en el punto medio, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

d) No es un paralelogramo, porque un par de sus ángulos opuestos **NO** son congruentes.

6 Aplicar propiedades de las diagonales de un rectángulo.

Solución

x = 4

7 Encontrar la medida de ángulos en un trapecio isósceles.

Solución

180° - 30° = 150°, entonces $m\angle$A = $m\angle$D = 150° por ser ángulos adyacentes a una misma base de un trapecio isósceles.
Ahora recordemos que la suma de los ángulos internos de cualquier cuadrilátero es 360°. Entonces

$$m\angle B = m\angle C = \frac{(360º - 2 \times 150º)}{2}$$
$$= 30º$$

8 Encontrar la medida de ángulos basales en trapecios isósceles.

Solución a) $\angle$DCB = 45° b) $\angle$ABD = 25° c) $\angle$BAC = 115°

Para hacer el inciso c) primero justifique que ΔABC y ΔDCB son congruentes por el criterio de congruencia LAL. Por esta razón diremos que
$m\angle$ACB = $m\angle$DBC = 20°,
en el ΔABC, $m\angle$ABC + $m\angle$ACB + $m\angle$BAC = 180°

$$45º + 20º + m\angle BAC = 180°$$
$$m\angle BAC = 115°$$

Unidad 6
Funciones de primer grado

Unidad 6

Funciones de primer grado

(28 horas)

1 Expectativas de logro

- Reconocen situaciones en las que se pueden expresar funciones de primer grado en la forma $y = ax + b$.
- Grafican funciones de primer grado en dos variables en un sistema de coordenadas.
- Resuelven sistemas de dos ecuaciones lineales en dos variables.
- Resuelven sistemas de dos ecuaciones lineales en dos variables.
- Resuelven problemas de la vida diaria aplicando funciones de primer grado.

2 Relación y desarrollo

Séptimo grado

Variables y expresiones

- Expresión algebraica (EA)
- Reglas convencionales
- Expresión de cantidades con variables
- Valor numérico de EAs
- Términos y coeficientes de EAs
- Adición y sustracción de EAs
- Multiplicación y división de EAs

Ecuaciones de primer grado en una variable

- Ecuaciones de primer grado (Definición)
- Propiedades de la igualdad y sus aplicaciones
- Resolución de ecuaciones de primer grado
- Aplicación

Octavo grado

Polinomios

- Monomios y polinomios
- Adición y sustracción de polinomios
- Multiplicación y división de polinomios por un número
- Multiplicación y división de monomios

Sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

- Despeje de una variable
- Sistema de dos ecuaciones de primer grado (Definición)
- Resolución de sistemas mediante:
  - Tablas
  - Método de eliminación
  - Método de sustitución
- Varios tipos de sistemas
- Aplicación

Funciones de primer grado

- Funciones de primer grado
- Razón de cambio
- Sistema de coordenadas
- Gráfica de funciones de primer grado
- Expresión de una función de primer grado $y = ax + b$ mediante su gráfica
- Expresión de una función de primer grado $y = ax + b$ a partir de dos puntos
- Criterio de paralelismo y perpendicularidad
- Solución gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables
- Gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables
- Solución gráfica de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables
- Aplicación

Noveno grado

Polinomios

- Multiplicación y división de un polinomio por un monomio
- Multiplicación de polinomios
- Valor numérico de un polinomio
- Productos notables
- Aplicación de productos notables
- Factorización de polinomios
- Aplicación de la factorización

Ecuaciones de segundo grado

- Ecuación de segundo grado (Definición)
- Resolución de ecuaciones mediante:
  - Sustitución de valores
  - Factorización
  - Raíz cuadrada
  - Completación de cuadrados
  - Fórmula cuadrática
- Aplicación

3 Plan de estudio (28 horas)

Lección	Distribución de horas	Contenidos
1. Funciones de primer grado (3 horas)	1~2/3	• Funciones de primer grado
	3/3	• Razón de cambio
2. Gráficas de funciones de primer grado (12 horas)	1~3/12	• Sistema de coordenadas
	4~7/12	• Gráficas de funciones de primer grado
	8/12	• Expresión de una función de primer grado $y = ax + b$ mediante su gráfica
	9/12	• Expresión de una función de primer grado $y = ax + b$ a partir de dos puntos
	10~12/12	• Criterio de paralelismo y perpendicularidad
3. Solución gráfica de un sistema de ecuaciones de primer grado (8 horas)	1~3/8	• Solución gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables
	4/8	• Gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables
	5~8/8	• Solución gráfica de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables
4. Aplicación de ecuaciones de primer grado (3 horas)	1/3	• Datos experimentales
	2/3	• Figuras geométricas
	3/3	• Utilización de las gráficas
Ejercicios (2 horas)	1~2/2	

4 Puntos de lección

Análisis de las pruebas diagnósticas 2016 - 2017

Comparando con las unidades del bloque de Geometría, en esta unidad hay muchas preguntas que se pueden resolver mecánicamente.

Por eso los estudiantes podrán responder. Para comprender los contenidos de esta unidad, los estudiantes tienen que recordar los conocimientos de proporcionalidad directa de la unidad 6 de 7mo grado.

Sin embargo, hay debilidad por esta parte. Veamos los resultados.

[Pregunta] Encuentre los valores faltantes de y, correspondientes a la función:

$y = 2x - 2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-8	-6	-4			2	4

Institutos: 65%   CEB: 39%   (2017)

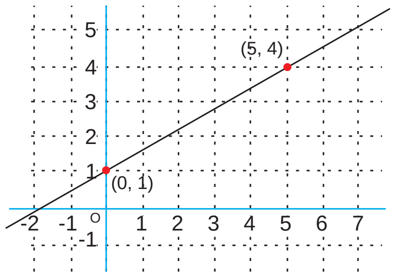
Los resultados de este tipo de pregunta (completar tabla) no son bajos comparando con otras preguntas. Sin embargo,

[Pregunta] Si $x = 3$, encuentre el punto (x, y) de la función $y = 2x - 4$.

Institutos: 26%   CEB: 14% (2017)

Se bajan mucho cuando tienen que contestar en la forma de “las coordenadas”.

[Pregunta] Calcule la pendiente de la gráfica de una función de primer grado que pasa por los puntos (0,1) y (5,4).



Institutos: 4% CEB: 1%   (2017)

La mayoría de los estudiantes no pueden calcular "la pendiente" aunque la pendiente se puede calcular mecánicamente si se tiene dos coordenadas.

Mirando los resultados, se puede decir que los estudiantes no comprenden bien la relación entre la fórmula y la gráfica de la función de primer grado.

Lección 1: Funciones de primer grado

En esta unidad comenzamos enseñando el concepto de función que es indispensable para aplicar ecuaciones lineales con dos variables.

Cuando en dos variables x y y ,el valor que toma x determina un único valor de y, se dice que y es función de x.

y es una función de primer grado de x cuando el valor de y está definido por una expresión de la forma $y = ax + b$ donde a y b son constantes con a distinto de cero y x es una variable.

Una función lineal $y = ax + b$, quiere decir que a cada valor de x corresponde un único valor de y.

Sección 2: Razón de cambio

Cuando se trata de una función de primer grado es importante saber la relación entre los cambios en x y y.

En la función de primer grado $y = ax + b$

$$\textit{Razón de cambio} = \frac{\textit{Cambio en y}}{\textit{Cambio en x}} = a$$

a es una constante

Lección 2: Gráficas de funciones de primer grado

Sección 1: Sistema de coordenadas

Para graficar funciones de primer grado necesitamos conocer un sistema de coordenadas.

Las coordenadas del punto O son (0, 0), O es el origen, no se escribe cero en el sistema de coordenadas.

Las parejas x y y corresponden a los puntos de una recta en el sistema de coordenadas.

En una función de primer grado $y = ax + b$, a cada valor de x y su respectivo valor de y le corresponde un punto en el sistema de coordenadas cuyas coordenadas son los valores x y y.

La gráfica de una función de primer grado es una recta.

Sección 2: Gráfica de funciones de primer grado

Como la gráfica de proporcionalidad directa es una línea recta que pasa por el origen, comparando las funciones de primer grado $y = ax$ y $y = ax + b$, se sabe que $y = ax + b$ se obtiene trasladando $|b|$ unidades hacia arriba o hacia a abajo, la gráfica de $y = ax$.

En la recta $y = ax + b$ el coeficiente a de x se llama pendiente de la recta y b se llama ordenada al origen.

El punto $(0, b)$ en donde la recta corta al eje y se llama intercepto en y .

En la recta $y = ax + b$, cuando en x se avanza a la derecha, si a es positivo entonces en y se avanza hacia arriba, y si a es negativo entonces en y se avanza hacia abajo.

Para trazar la gráfica hay que definir dos puntos en la recta y unir ambos puntos.

Ejemplo 2.11 $y = -2x +1$ la gráfica pasa por el punto (0, 1) ya que la ordenada al origen es 1. Como su pendiente es -2, cuando avanza 1 hacia la derecha avanza 2 hacia abajo es decir que la gráfica pasa por (1, -1).

Sección 3: Expresión de una función de primer grado en la forma $y = ax + b$ dada su gráfica

Para escribir una función de primer grado en la forma $y = ax + b$ a partir de su gráfica es necesario identificar la ordenada al origen y determinar la pendiente de la recta.

Cuando se le pregunte, encuentre la función de primer grado responda de la forma $y = ax + b$.

Sección 4: Expresión de una función de primer grado en la forma $y = ax + b$ a partir de dos puntos

Para encontrar la función de primer grado $y = ax + b$ a partir de dos puntos es necesario seguir los pasos:

1) Determinar la pendiente "a" utilizando la razón de cambio.
2) Encontrar del valor de b, sustituyendo el valor de la pendiente "a" en $y = ax + b$.
3) Sustituir los valores de x y y, eligiendo un punto, en $y = ax + b$.

Sección 5: Criterio de paralelismo y perpendicularidad

Dos rectas son paralelas cuando sus pendientes son iguales, lo que se puede observar con sus gráficas es comparar la distancia que hay entre ambas rectas, de otra manera también es comparar los ángulos correspondientes formados por las dos rectas con respecto al eje x.

Dos rectas son perpendiculares cuando el producto de sus pendientes es igual a -1. Lo cual se ve en la gráfica de ambas rectas que su intersección forma ángulos de 90º.

Lección 3. Solución gráfica de un sistema de ecuaciones de primer grado

Sección 1: : Solución gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables

Se tratarán las gráficas de las ecuaciones de primer grado en dos variables de la forma $ax + by = c$.

La gráfica de la ecuación $ax + by = c$ donde a y b son distintos de cero es una recta y a esta ecuación también se llama ecuación de la recta.

Una ecuación de la forma $ax + by = c$, también se puede convertir en una función de primer grado en la forma $y = ax + b$.

La gráfica de la ecuación $ax + by = c$ donde a y b son distintos de cero es una recta.

Si $a = 0$ entonces la recta es paralela al eje x.

Si $b = 0$ entonces la recta es paralela al eje y.

Los intercepto en x y y son los puntos donde la gráfica corta los ejes x y y respectivamente.

Sección 2: Gráfica de una ecuación de primer grado con dos variables

Para trazar la gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables solo necesita encontrar los interceptos en x y y.

Sección 3: Solución gráfica de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Al tener un sistema de ecuaciones de primer grado en dos variables podemos utilizar las gráficas de las ecuaciones para determinar la solución.

Se presentan 3 casos:

a) Las rectas se cortan en un punto y la solución la determina el punto de intersección (consistente)

b) Las rectas no se cortan en ningún punto, entonces el sistema no tiene solución (inconsistente)

c) Las rectas coinciden totalmente entonces el sistema tiene infinitas soluciones (dependiente)

Lección 4: Aplicación de las funciones de primer grado

Aquí se muestran 3 ejemplos donde aparece la aplicación de funciones de primer grado.

Sección1 : Datos experimentales

Se trabaja con datos experimentales. En el *Ejemplo* **4.1** se muestra una situación en que el cambio de temperatura respecto al tiempo genera una función de primer grado.

Sección 2: Figuras geométricas

Se muestra en el *Ejemplo* **4.2** la relación distancia recorrida = velocidad × tiempo, generando una función lineal en una figura geométrica a través del movimiento de un punto en dicha figura.

Sección 3: Utilización de las gráficas

Dada la gráfica de una situación en contexto se escriben las funciones de primer grado correspondientes para la situación del problema.

Tema: Razón de cambio 1

Ejemplo 1.3 2 **Pág.** 116 3

Observe que la tabla muestra los valores de x y y para la función de primer grado $y = 2x + 1$.
¿Cómo cambia el valor de y cuando x aumenta de 1 en 1?

Solución 4

x	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	4...
y	...	−5	−3	−1	1	3	5	7	9...

+1 +1 +1 +1 +1 +1

+2 +2 +2 +2 +2 +2

Si los valores x pasan de −3 a −2 entonces x aumenta de 1 en 1.
Si los valores x pasan de −5 a −3 entonces y aumenta de 2 en 2.

Respuesta: y cambia de 2 en 2. 4

Ejemplo 1.4 2 **Pág.** 116 3

Para la función de primer grado $y = 2x + 1$, cuando el valor de x cambia de 1 a 4 encuentre el valor de $\dfrac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}$

x	...	1	...	4	...
y	...	3	...	9	...

3

6

Solución 4

Cambio en x es: 4 − 1= 3

Cambio en y es: 9 − 3= 6

entonces $\dfrac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x} = \dfrac{6}{3} = 2$

Respuesta: 2 4

6 Al comparar el cambio del valor de y respecto al valor de x, a esa razón se llama **razón de cambio.** Razón de cambio $= \dfrac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}$

En el Ejemplo 1.3 en este caso el cambio de x es 1 y el cambio en y es 2 entonces razón de cambio $= \dfrac{2}{1} = 2.$

6 En la función de primer grado $y = ax + b$, la razón de cambio es igual al coeficiente a de x.
Razón de cambio $= \dfrac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x} = a$ (constante)

Ejemplo 1.5 2 **Pág.** 117 3

Encuentre la razón de cambio en la función de primer grado $y = -3x + 7$.

Solución 4

Como el coeficiente de x es igual a la razón de cambio entonces es − 3.

Respuesta: −3 4 ✓

Ejercicio 1.3 2 **Pág.** 117 3

Encuentre la razón de cambio en las siguientes funciones de primer grado.

a) $y = 4x + 1$ b) $y = -5x + 6$ c) $y = 3x - 2$

Solución 4

a) 4 ✓ b) −5 ✓ c) 3 ✓

1 Al inicio de la clase escribir solo la palabra "**Tema**" y hasta el final de la clase (o en el desarrollo de la misma) escribir el contenido del tema.

2 Escribir el número del Ejemplo o Ejercicio .

3 Escribir el número de **Pág.** del LE para entender dónde se quedaron con respecto al tiempo.

4 Escribir la **Solución** y **Respuesta**.

5 En el problema planteado marcar los datos importantes para poder llegar a la respuesta.

6 Escribir la conclusión en un rectángulo de color rojo.

✓ Marcar en el Ejercicio cuando la solución o la respuesta sean correctas.

Nota: Los puntos aquí explicados no siempre aplican todos en un plan de pizarra.

Unidad 6: **Funciones de primer grado**

Lección 1: (1/3) Funciones de primer grado

Sección 1: Funciones de primer grado

Objetivo: Determinar la relación entre dos variables.

Indicador de logro

Observe la siguiente tabla y responda.

Tiempo (min)	0	1	2	3	...
Altura (cm)	0	3	6	9	...

¿Cómo se puede expresar la altura del agua y (cm)cuando se expresa el tiempo después de x (min)?

1. Determinar la relación entre dos variables en una situación de contexto. *Ejemplo* **1.1**

(30 min)

* Escribir cuando transcurre 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 minutos, ¿cuál es la altura del agua?
* Enfatizar que la variable x es el tiempo y y es la altura del agua, además la cantidad de agua que sube por minuto no cambia.
* Completar la tabla hasta llegar a los 7 minutos.
* Observar en la tabla que la altura puede determinarse multiplicando por el valor del tiempo.
* Si y es la altura y x es el tiempo, ¿cómo se puede expresar la altura en términos del tiempo?

2. Resolver *Ejercicio* **1.1**

(15 min)

Solución

Por cada minuto transcurrido, el agua sube 3 centímetros.

Respuesta: $y = 3x$

Ejercicios adicionales

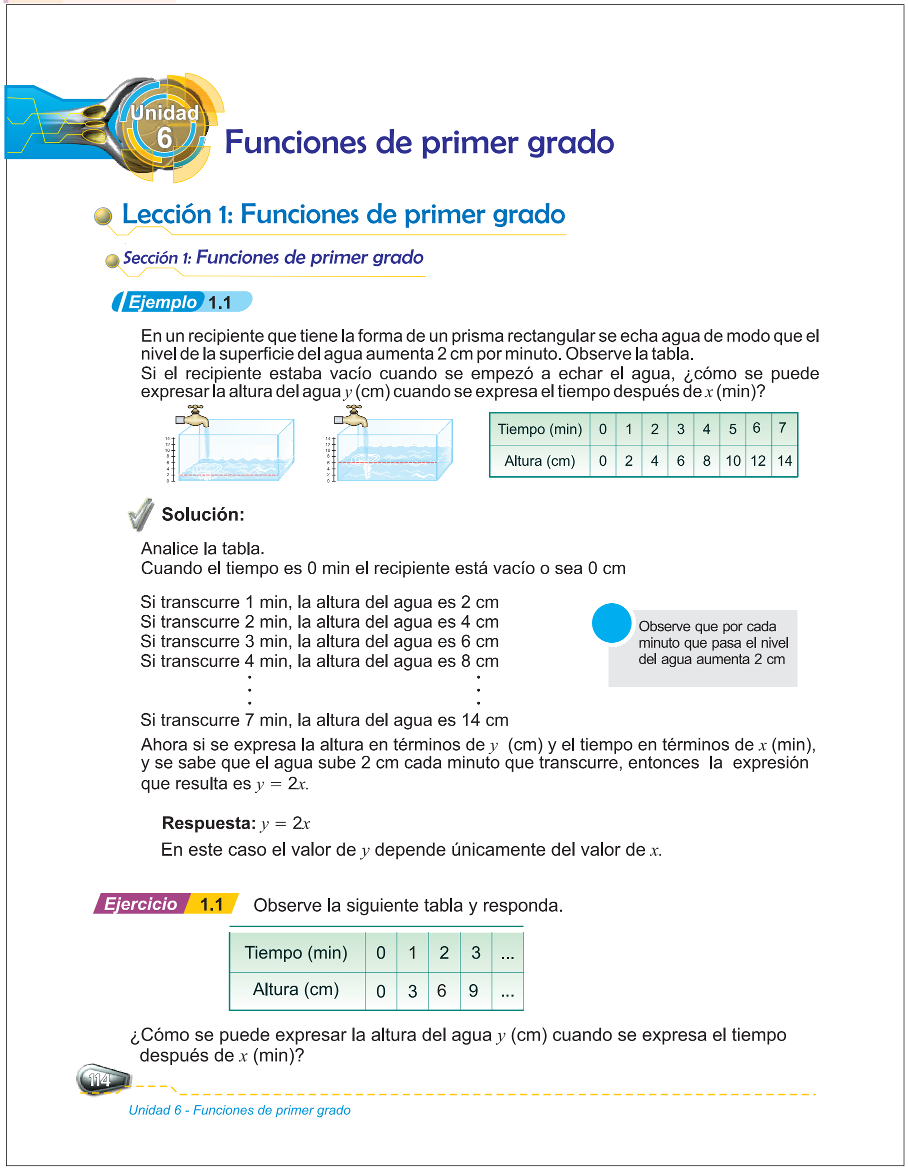
Observe la siguiente tabla y responda.

Tiempo x (cm)	0	1	2	3	4
Altura y (cm)	0	4	8	12	16

¿Cómo se puede expresar la altura y (cm) en términos del tiempo x (min)?

Solución

$y = 4x$



Unidad 6

Funciones de primer grado

Lección 1: Funciones de primer grado

Sección 1: Funciones de primer grado

Ejemplo **1.1**

En un recipiente que tiene la forma de un prisma rectangular se echa agua de modo que el nivel de la superficie del agua aumenta 2 cm por minuto. Observe la tabla.
Si el recipiente estaba vacío cuando se empezó a echar el agua, ¿cómo se puede expresar la altura del agua y (cm) cuando se expresa el tiempo después de x (min)?

Tiempo (min)	0	1	2	3	4	5	6	7
Altura (cm)	0	2	4	6	8	10	12	14

Solución:

Analice la tabla.
Cuando el tiempo es 0 min el recipiente está vacío o sea 0 cm

Si transcurre 1 min, la altura del agua es 2 cm
Si transcurre 2 min, la altura del agua es 4 cm
Si transcurre 3 min, la altura del agua es 6 cm
Si transcurre 4 min, la altura del agua es 8 cm
⋮
Si transcurre 7 min, la altura del agua es 14 cm

Observe que por cada minuto que pasa el nivel del agua aumenta 2 cm

Ahora si se expresa la altura en términos de y (cm) y el tiempo en términos de x (min), y se sabe que el agua sube 2 cm cada minuto que transcurre, entonces la expresión que resulta es $y = 2x$.

Respuesta: $y = 2x$
En este caso el valor de y depende únicamente del valor de x.

Ejercicio **1.1** Observe la siguiente tabla y responda.

Tiempo (min)	0	1	2	3	...
Altura (cm)	0	3	6	9	...

¿Cómo se puede expresar la altura del agua y (cm) cuando se expresa el tiempo después de x (min)?

114

Unidad 6 - Funciones de primer grado

Unidad 6: Funciones de primer grado

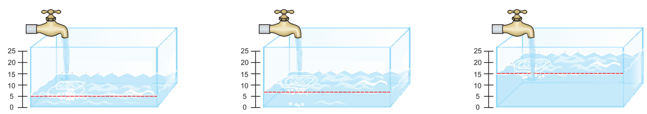
Lección 1: (2/3) Funciones de primer grado

Sección 1: Funciones de primer grado

Objetivo: Definir una función de primer grado de la forma $y = ax + b$.

Ejemplo 1.2

En el **Ejemplo 1.1**, si se empieza a echar agua cuando el nivel del agua está a 5 cm de altura. Observe la tabla, ¿cómo puede expresar la altura del agua y (cm), cuando se expresa el tiempo después de x (min)?



Tiempo x (min)	0	1	2	3	4	5	6	7
Altura y (cm)	5	7	9	11	13	15	17	19

Solución:

Observe que entre el tiempo y la altura utilizando los datos de la tabla, podemos decir que:

Al inicio la altura del agua estaba en 5 cm de agua y se sabe que cada minuto que transcurre sube 2 cm de agua entonces:

	x (min)		y (cm)
La altura del agua después de 1 min se expresa ... $5 + 2 \times$	1	$= 5 + 2 =$	7
La altura del agua después de 2 min se expresa ... $5 + 2 \times$	2	$= 5 + 4 =$	9
La altura del agua después de 3 min se expresa ... $5 + 2 \times$	3	$= 5 + 6 =$	11
	⋮		⋮
La altura del agua después de 7 min se expresa ... $5 + 2 \times$	7	$= 5 + 14 =$	19

Si se sabe que el recipiente ya contiene 5 cm de agua y por cada minuto que transcurre sube 2 cm y si la altura es y (cm) y el tiempo es x (min) entonces la expresión que resulta es $y = 5 + 2\boxed{x}$ así que $y = 2\boxed{x} + 5$.

Respuesta: $y = 2\boxed{x} + 5$

Cuando en dos variables x y y, el valor que toma x determina un único valor de y, se dice que y es función de x.

y es función de primer grado de x cuando el valor de y está definido por una expresión de la forma $\boxed{y = ax + b}$, donde a y b son constantes con a distinto de 0 y x es la variable.

Ejercicio 1.2 Observe la siguiente tabla y responda.

x	0	1	2	3	4
y	3	5	7	9	11

¿Cómo se puede expresar y en función de x?

A la expresión, $y = ax + b$ también se llama función lineal.

115

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Indicador de logro

Dada la siguiente tabla. Exprese y en función de x.

x	0	1	2	3	4
y	3	5	7	9	11

1. **Determinar la relación entre dos variables.**
   Ejemplo 1.2
   (20 min)
   ¿Qué diferencia hay con el **Ejemplo 1.1**?
   ¿Cuánto mide la altura a los cero minutos?

* Escribir los resultados en una tabla.
* Expresar la altura en términos del tiempo cuando ya existe una determinada cantidad de agua.
* En $y = 2x + 5$, ¿qué representa 5?

2. **Definir función de primer grado.**
   (5 min)

* Observar que la altura del agua depende únicamente del tiempo, a medida que pasa el tiempo sube el nivel del agua.
  ¿Qué variable depende de la otra?
* Aclarar que es función.

3. **Resolver Ejercicio 1.2**
   (20 min)
   Solución
   $y = 2x + 3$

Ejercicios adicionales

En una tienda la yarda de un tipo de tela cuesta 80 lempiras. Si la longitud de la tela se representa con x yardas y el precio se representa con y lempiras.

a) Exprese el valor de y en función de x
b) Exprese el valor de y en función de x para la compra de x yarda de tela y 25 lempiras de hilo.

Solución:
a) $y = 80x$ b) $y = 80x + 25$

Indicador de logro

Encuentre la razón de cambio dada una función de primer grado $y = 3x - 2$.

1. **Interpretar los datos de una tabla.** Ejemplo 1.3
   (10 min)

* Observar la tabla, ¿cómo cambian los valores de x en la tabla?

* Si los valores de x pasan de 0 a 1 y de 1 a 2, ¿cuánto va aumentando x?

* Concluir que y aumenta de 2 en 2 cuando x aumenta de 1 en 1.

2. **Encontrar la razón $\frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}$.** Ejemplo 1.4
   (10 min)

* Tomando como referencia el Ejemplo 1.3

* Si los valores de x pasan de 1 a 4, ¿cuánto aumenta x?

* Si los valores de y pasan de 3 a 9, ¿cuánto aumenta y? después escriba con flechita 6.

* Encontrar el valor de $\frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}$

3. **Definir razón de cambio.**
   (10 min)

* Resaltar que entre el Ejemplo 1.3 y el Ejemplo 1.4 la razón de cambio es la misma.

* Definir en una función de primer grado la razón de cambio.

Unidad 6: Funciones de primer grado

***Lección 1:* (3/3)** Funciones de primer grado

Sección 2: Razón de cambio

Objetivo: Encontrar la razón de cambio en una función de primer grado.

Sección 2: Razón de cambio

Ejemplo 1.3

Observe que la tabla muestra los valores de x y y para la función de primer grado $y = 2x + 1$.

¿Cómo cambia el valor de y cuando x aumenta de 1 en 1?

+1 +1 +1 +1 +1 +1

x	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	4...
y	...	−5	−3	−1	1	3	5	7	9...

Solución

Observando la tabla cuando x aumenta de 1 en 1, el valor de y cambia de 2 en 2.

Respuesta: y cambia de 2 en 2.

y	...	−5	−3	−1	1	3	5	7	...

+2 +2 +2 +2 +2 +2

En $y = 2x + 1$ cuando x aumenta 1, y aumenta 2.

Ejemplo 1.4

Para la función de primer grado $y = 2x + 1$, cuando el valor de x cambia de 1 a 4 encuentre el valor de $\frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}$.

Solución

Cambio en x es: $4 - 1 = 3$
Cambio en y es: $9 - 3 = 6$ entonces $\frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x} = \frac{6}{3} = 2$

Respuesta: 2

3

x	...	1	...	4	...
y	...	3	...	9	...

6

Al comparar el cambio del valor de y respecto al valor de x, a esa razón se llama **razón de cambio.** Razón de cambio $= \frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}$

116
Unidad 6 - Funciones de primer grado

continúa en la siguiente página...

Unidad 6: **Funciones de primer grado**

Lección 1: (3/3) Funciones de primer grado

Sección 2: Razón de cambio

Objetivo: Encontrar la razón de cambio en una función de primer grado.

Indicador de logro

Encuentre la razón de cambio dada una función de primer grado $y = 3x - 2$.

En el Ejemplo 1.3 en este caso el cambio de x es 1 y el cambio en y es 2 entonces razón de cambio $= \frac{2}{1} = 2$.

Cambio en x es $1 - 0 = 1$
Cambio en y es $3 - 1 = 2$

Comparando Ejemplo 1.3 y Ejemplo 1.4 observe que la razón de cambio es 2 y que es igual al coeficiente de x en la función de primer grado $y = 2x + 1$.

En la función de primer grado $y = ax + b$, la razón de cambio es igual al coeficiente a de x.

Razón de cambio $= \frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x} = a$ (constante)

Ejemplo 1.5 Encuentre la razón de cambio en la función de primer grado $y = -3x + 7$.

Solución

Como el coeficiente de x es igual a la razón de cambio entonces es -3.

Respuesta: -3

Ejercicio 1.3 Encuentre la razón de cambio en las siguientes funciones de primer grado.

a) $y = 4x + 1$

b) $y = -5x + 6$

c) $y = 3x - 2$

117

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

---

* Comparar la razón de cambio obtenida en el Ejemplo 1.3 y Ejemplo 1.4, con el coeficiente de x en la función $y = 2x + 1$

4. Encontrar la razón de cambio en una función de primer grado. Ejemplo 1.5

(7 min)

¿Cuál es el coeficiente de la variable x de la función $y = -3x + 7$?

* Determinar que la razón de cambio de y a x en $y = -3x + 7$ es -3.

5. Resolver Ejercicio 1.3

(8 min)

Solución

a) 4

b) -5

c) 3

Indicador de logro

Ubique los siguientes puntos A (1, 4), B (-5, 3) en el sistema de coordenadas.

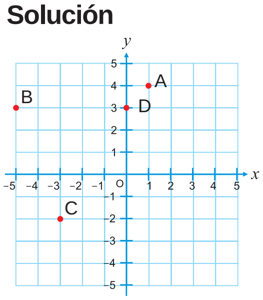
1. **Identificar los ejes y el origen del sistema de coordenadas.**
   (10 min)
   * Se le sugiere llevar una cartulina blanca plastificada cuadriculada.
   * Sugerir como estrategia hojas de cuadrícula para los estudiantes.
   * Indicar que a la recta horizontal se le llama eje x y a la recta vertical se le llama eje y.
   * Hay que señalar que el punto (0, 0) es el origen y lo representamos con la letra O.

2. **Encontrar las coordenadas de un punto.** *Ejemplo* **2.1**
   (10 min)
   * Trazar un segmento vertical desde P al eje x.
   * Trazar un segmento horizontal desde P al eje y.
   * Los puntos de corte en los ejes indican las coordenadas del punto P.

3. **Resolver** *Ejercicio* **2.1**
   (10 min)
   Solución
   A (2, 4) B (4, 1)

4. **Ubicar un punto en el sistema de coordenadas.**
   Ejemplo **2.2**
   (8 min)
   * Indicar que en el punto Q (-1, 3), -1 corresponde al valor de x y 3 corresponde al valor de y.

5. **Resolver** *Ejercicio* **2.2**
   (7 min)
   Solución



Unidad 6: Funciones de primer grado

Lección 2: (1/12) Gráficas de funciones de primer grado

Sección 1: Sistema de coordenadas

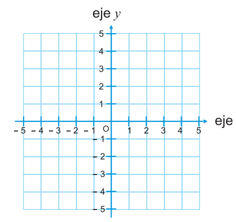
Objetivos:
- Encontrar las coordenadas de un punto en el sistema de coordenadas.
- Ubicar un punto en el sistema de coordenadas dadas sus coordenadas.

Lección 2: Gráficas de funciones de primer grado

Sección 1: Sistema de coordenadas

En 4to grado aprendimos que para ubicar puntos en el plano se toman 2 rectas numéricas que se cortan perpendicularmente (una horizontal y otra vertical).

Se convierten en rectas numéricas de manera que la distancia de 0 a 1 o para cualquier par de números consecutivos debe ser las misma.

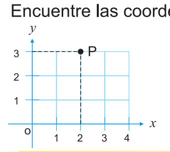


Las coordenadas del punto O son (0,0).
O: Origen

- A la recta horizontal se llama eje x o eje de las **abscisas**.
- La recta vertical se llama eje y o eje de las **ordenadas**.
- A los dos ejes juntos se le denomina sistema de **coordenadas**.
- Al punto de intersección de los dos ejes se le llama **origen del sistema de coordenadas.**

Ejemplo **2.1**

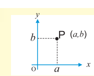
Encuentre las coordenadas del punto P.



En el punto P (2, 3), 2 representa el valor de x y 3 el valor de y
Se expresa: (2, 3)

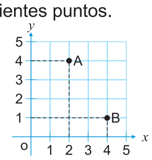
Solución:
Como el segmento vertical corta al eje x en 2 y el segmento horizontal corta al eje y en 3, entonces las coordenadas de P son (2, 3).

Si los segmentos trazados cortan a los ejes x y y en los puntos a y b respectivamente se dice que el punto P tiene coordenadas (a, b) y se escribe P (a, b).



Ejercicio **2.1**

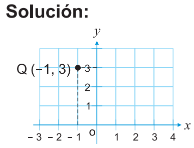
Encuentre las coordenadas de los siguientes puntos.



Ejemplo **2.2**

Ubique el punto Q (−1, 3) en el sistema de coordenadas.

Solución:



Ejercicio **2.2** Ubique los siguientes puntos en un sistema de coordenadas.

a) A (1, 4) b) B (−5, 3) c) C (−3, −2) d) D (0, 3)

Unidad 6: **Funciones de primer grado**

Lección 2: (2/12) Gráficas de funciones de primer grado

Sección 1: Sistema de coordenadas

Objetivo: Ubicar los puntos correspondientes a una función de primer grado.

Indicador de logro

En la función de primer grado $y = 3x - 1$ complete la tabla.

x	−2	−1	0	1	2	3
$y = 3x - 1$						

Ejemplo 2.3

En la función de primer grado $y = 2x + 2$ complete la tabla tomando los valores de x: −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3

Solución

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = 2x + 2$							

Si sustituimos $x = -3, x = -2, x = -1, x = 0, x = 1, x = 2, x = 3,$ en $y = 2x + 2$ entonces

Si $x = -3$	Si $x = 0$	Si $x = 2$
$y = 2(-3) + 2$	$y = 2(0) + 2$	$y = 2(2) + 2$
$= -6 + 2$	$= 0 + 2$	$= 4 + 2$
$= -4$	$= 2$	$= 6$

Respuesta:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = 2x + 2$	−4	−2	0	2	4	6	8

Ejemplo 2.4

Con los valores de la tabla del **Ejemplo 2.3** ubique marcando los puntos de la función de primer grado $y = 2x + 2$ en el sistema de coordenadas.

Solución

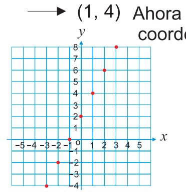
Formando las parejas ordenadas de la tabla observe que:

$x = -3, y = -4 \longrightarrow (-3, -4)$ $\quad x = -2, y = -2 \longrightarrow (-2, -2)$

$x = -1, y = 0 \longrightarrow (-1, 0)$ $\quad x = 0, y = 2 \longrightarrow (0, 2)$

$x = 1, y = 4 \longrightarrow (1, 4)$ Ahora ubique y marque los puntos en el sistema de coordenadas.

Respuesta:

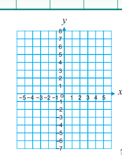


En una función de primer grado a cada valor de x y su respectivo valor de y le corresponde un punto en el sistema de coordenadas, cuyas coordenadas son los valores de x y y.

Ejercicio 2.3 En la función de primer grado $y = 3x - 1$ complete la tabla tomando como valores de x: − 2, −1, 0, 1, 2, 3.

x	−2	−1	0	1	2	3
$y = 3x - 1$						

Ejercicio 2.4 Con los valores de la tabla del **Ejercicio 2.3** ubique y marque los puntos de la función de primer grado $y = 3x - 1$ en el sistema de coordenadas.



119

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

1. Evaluar la función $y = 2x + 2$.

Ejemplo 2.3

(15 min)

¿Cuál es el valor de y si x vale -3, -2, -1?

* Completar la tabla.

¿Cuál es el valor de y si sustituye los números de -3 a 3 en x?

* Sustituir los valores para x en la función $y = 2x + 2$ de manera correcta.

2. Ubicar los puntos de la función $y = 2x + 2$. Ejemplo 2.4

(10 min)

* Considerar los valores de x y y de la tabla del Ejemplo 2.3 como si fueran coordenadas de puntos en el sistema de coordenadas.

* Ubicar los puntos correspondientes en el sistema de coordenadas.

* Indicar que estos puntos corresponden a la función de primer grado $y = 2x + 2$.

* Concluir que en una función de primer grado a cada valor de x con su respectivo y le corresponde un punto en el sistema de coordenadas.

3. Resolver Ejercicio 2.3

(10 min)

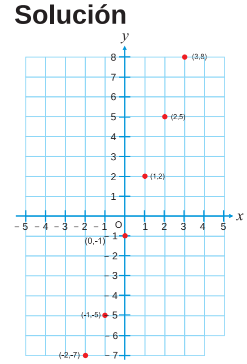
Solución

x	−2	−1	0	1	2	3
$y = 3x - 1$	−7	−4	−1	2	5	8

4. Resolver Ejercicio 2.4

(10 min)

Solución



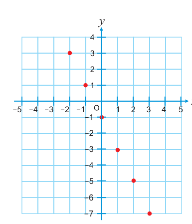
Ejercicios adicionales

Con la función de primer grado $y = -2x - 1$ complete la tabla, ubique y marque los puntos en el sistema de coordenadas tomando como valores para x de -2, -1, 0, 1, 2 y 3.

x	−2	−1	0	1	2	3
$y = -2x - 1$						

Solución

x	−2	−1	0	1	2	3
$y = -2x - 1$	3	1	−1	−3	−5	−7



Indicador de logro

Trazar la gráfica de la función $y = x + 2$.

1. Graficar la función $y = -2x + 1$.

Ejemplo **2.5**

(20 min)

¿Cómo se puede encontrar los valores de y en la función de primer grado $y = -2x + 1$?

* Elaborar tabla y escribir los valores para y.

* Ubicar todas las parejas ordenadas en el sistema de coordenadas.

¿Qué figura forman si se unen todos los puntos?

* Llamar a esa recta, gráfica de la función de primer grado $y = -2x + 1$.

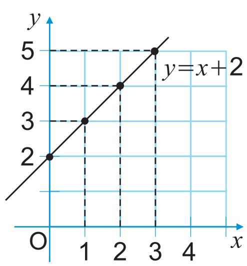
* Indicar que a esa recta también se llama recta $y = -2x + 1$.

2. Resolver *Ejercicio* **2.5**

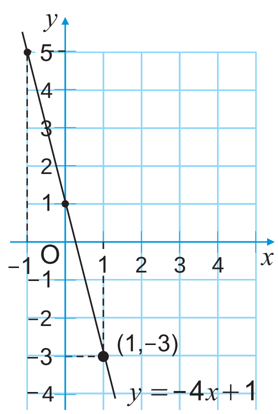
(25 min)

Solución

a)



b)



Unidad 6: Funciones de primer grado

Lección 2: (3/12) Gráficas de funciones de primer grado

Sección 1: Sistema de coordenadas cartesianas

Objetivo: Trazar la gráfica de una función de primer grado.

Ejemplo **2.5**

Trace la gráfica de la función de primer grado $y = -2x + 1$.

Solución:

Para trazar la gráfica de una función de primer grado considere los siguientes pasos:

Paso 1

Elabore y complete la tabla.

x	-3	−2	−1	0	1	2	3
$y = -2x + 1$	7	5	3	1	− 1	− 3	− 5

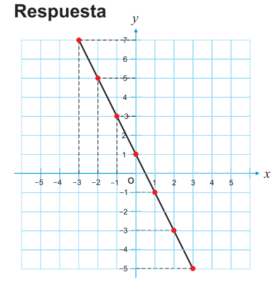
Paso 2

Ubique los puntos de la función en el sistema de coordenadas.

Paso 3

Una los puntos trazados con una línea recta.

Respuesta



$y = -2x + 1$

A esta recta se le llama gráfica de función de primer grado $y = -2x + 1$.
También se le llama recta $y = -2x + 1$.
Es el conjunto de los puntos cuyas coordenadas satisfacen la igualdad de la ecuación $y = -2x + 1$.

Ejercicio **2.5** Trace la gráfica de las siguientes funciones de primer grado en un mismo sistema de coordenadas.

a) $y = x + 2$

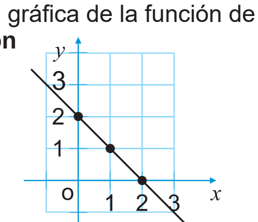
b) $y = -4x + 1$

120
Unidad 6 - Funciones de primer grado

Ejercicios adicionales

Trace la gráfica de la función de primer grado $y = -x + 2$.

Solución



$y = -x + 2$

Unidad 6: Funciones de primer grado

Lección 2: (4/12) Gráficas de funciones de primer grado

Sección 2: Gráfica de funciones de primer grado

Objetivo: Trazar la gráfica de una función de primer grado de la forma $y = ax + b$ mediante la traslación de la gráfica $y = ax$.

Indicador de logro

Dada la gráfica de $y = 3x$ trazar la gráfica de la función $y = 3x + 1$ mediante traslación.

1. Comparar las gráficas de dos funciones de primer grado. *Ejemplo* **2.6**
(15 min)

* Observar las gráficas de dos funciones.
  ¿Qué se puede decir de las dos gráficas?
* Indicar que tienen la misma inclinación.
  ¿Cuántas unidades arriba se encuentra $y = 2x + 3$ de $y = 2x$?
* Concluir que la gráfica de la función $y = 2x + 3$ se encuentra 3 unidades arriba de la gráfica $y = 2x$.

2. Comparar las gráficas de dos funciones de primer grado. *Ejemplo* **2.7**
(15 min)

* Resolver como *Ejemplo* **2.6**.
* Tomando como referencia el *Ejemplo* **2.6**, ¿hacia dónde se trasladó la gráfica $y = 2x$ ahora?, ¿cuántas unidades se trasladó?

Sección 2: Gráfica de funciones de primer grado

Ejemplo **2.6**

Trace la gráfica de las funciones de primer grado $y = 2x$ y $y = 2x + 3$ y compare cada una de las funciones.

Solución:

1) Elabore la tabla.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = 2x$	−6	-4	-2	0	2	4	6
$y = 2x + 3$	-3	-1	1	3	5	7	9

Si $x = -3$ en $y = 2x = 2(-3) = -6$

Si $x = 0$ en $y = 2x = 2(0) = 0$

Si $x = 2$ en $y = 2x = 2(2) = 4$

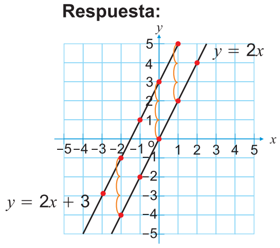
Si $x = -3$ en $y = 2x + 3 = 2(-3) + 3 = -6 + 3 = -3$

Si $x = 0$ en $y = 2x + 3 = 2(0) + 3 = 0 + 3 = 3$

Si $x = 2$ en $y = 2x + 3 = 2(2) + 3 = 4 + 3 = 7$

2) Ubique los puntos de cada función de primer grado en el sistema de coordenadas y trace la gráfica.

Respuesta:



Comparando las gráficas se puede observar que:

- La diferencia en los valores de la tabla en las funciones de primer grado $y = 2x$ y $y = 2x + 3$ es 3 más que el valor de $y = 2x$.
- La gráfica de $y = 2x + 3$ se obtiene trasladando hacia arriba 3 unidades de la gráfica $y = 2x$.
- La gráfica de $y = 2x + 3$ corta al eje y en 3.

Ejemplo **2.7**

Trace la gráfica de las funciones de primer grado $y = 2x - 1$ y $y = 2x$ y compare la diferencia de cada función.

Solución:

1) Elabore la tabla.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = 2x$	−6	−4	−2	0	2	4	6
$y = 2x - 1$	−7	−5	−3	−1	1	3	5

Si $x = -3$ en $y = 2x = 2(-3) = -6$

Si $x = 0$ en $y = 2x = 2(0) = 0$

Si $x = 2$ en $y = 2x = 2(2) = 4$

Si $x = -3$ en $y = 2x - 1 = 2(-3) - 1 = -6 - 1 = -7$

Si $x = 0$ en $y = 2x - 1 = 2(0) - 1 = 0 - 1 = -1$

Si $x = 2$ en $y = 2x - 1 = 2(2) - 1 = 4 - 1 = 3$

121

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Dada la gráfica de $y = 3x$ trazar la gráfica de la función $y = 3x + 1$ mediante traslación.

* Concluir que la gráfica de la función $y = 2x - 1$ se trasladó una unidad hacia bajo de la función $y = 2x$

* La recta $y = ax + b$, se obtiene trasladando $|b|$ unidades hacia arriba o hacia abajo de la recta $y = ax$, b se llama ordenada al origen.

* Se puede dar ejemplos:

(i) La recta $y = 3x + 5$ se obtiene trasladando 5 unidades hacia arriba de la recta $y = 3x$.

(ii) La recta $y = 3x - 5$ se obtiene trasladando 5 unidades hacia abajo de la recta $y = 3x$.

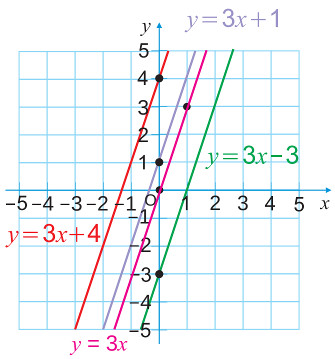
En caso de (i), $b = 5$, $|b| = 5$.

En caso de (ii), $b = -5$, $|b| = 5$.

3. Resolver *Ejercicio* **2.6**

(15 min)

Solución



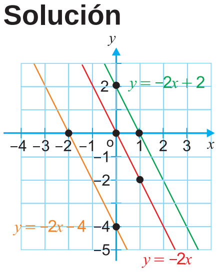
Ejercicios adicionales

Dada la recta $y = -2x$ trazar la gráfica de las siguientes funciones de primer grado en un mismo sistema de coordenadas.

a) $y = -2x + 2$

b) $y = -2x - 4$

Solución



Unidad 6: Funciones de primer grado

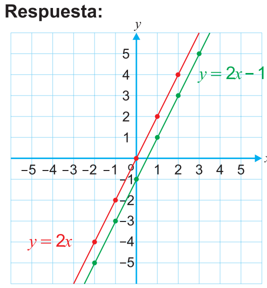
Lección 2: (4/12) Gráficas de funciones de primer grado

Sección 2: Gráfica de funciones de primer grado

Objetivo: Trazar la gráfica de una función de primer grado de la forma $y = ax + b$ mediante la traslación de la gráfica $y = ax$.

2) Ubique los puntos de cada función de primer grado en el sistema de coordenadas y trace la gráfica.

Respuesta:



Comparando las gráficas se puede observar que:

- La diferencia en los valores de la tabla en las funciones de primer grado $y = 2x$ y $y = 2x - 1$ es 1 menos que el valor de $y = 2x$.
- La gráfica de $y = 2x - 1$ se obtiene trasladando hacia abajo 1 unidad de la gráfica de $y = 2x$.
- La gráfica de $y = 2x - 1$ corta al eje y en -1.

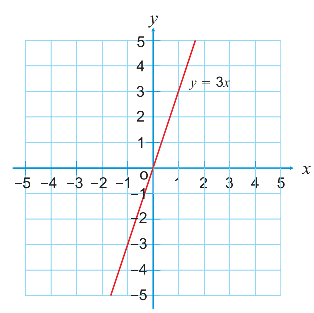
La recta $y = ax + b$ se obtiene trasladando $|b|$ unidades hacia arriba o hacia abajo de la recta $y = ax$, b se llama **ordenada al origen**.

Ejercicio **2.6** Dada la recta $y = 3x$ trazar la gráfica de las siguientes funciones de primer grado en un mismo sistema de coordenadas.

a) $y = 3x + 1$

b) $y = 3x - 3$

c) $y = 3x + 4$



122 *Unidad 6 - Funciones de primer grado*

Unidad 6: Funciones de primer grado

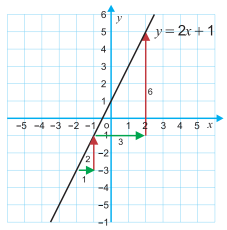
Lección 2: (5/12) Gráficas de funciones de primer grado

Sección 2: Gráfica de funciones de primer grado

Objetivo: Conocer el significado de a y b en la función $y = ax + b$.

Interprete el significado de 2 en la recta $y = 2x + 1$

Observe que en la gráfica cuando se avanza 1 unidad hacia la derecha se avanza 2 unidades hacia arriba y si se avanza 3 unidades hacia la derecha se avanzan 6 unidades hacia arriba.



Como el coeficiente de x es 2, la razón de cambio $\left(\frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}\right)$ es 2 por lo tanto:

Si x aumenta de 1 en 1 el valor de y cambia de 2 en 2.
Si x aumenta de 3 en 3 al valor de y cambia de 6 en 6.

Razón de cambio $= \frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x} = \frac{2}{1} = \frac{6}{3} = 2$

Razón de cambio, se conoce como **pendiente** de la recta.

Ahora interprete el significado de 1 en la recta $y = 2x + 1$

Observe la recta $y = 2x + 1$, 1 significa que se traslada una unidad hacia arriba con respecto a la recta $y = 2x$.

También significa que 1 es la ordenada al origen.
(0,1) es el punto donde la gráfica corta al eje y.

En la recta $y = ax + b$, el coeficiente a de x se llama pendiente de la recta y b se llama **ordenada al origen.**

El punto en donde la recta corta el eje y se llama **intercepto** en y.

El intercepto en y de la recta $y = 2x + 1$ es el punto (0,1).

Ejemplo 2.8

En la recta $y = 3x + 2$, ¿qué significa 3 y 2?, ¿cuál es el intercepto en y?

Respuesta:
3 es la pendiente y 2 la ordenada al origen de la recta $y = 3x + 2$, el intercepto en y es el punto (0, 2).

$y = ax + b$
Pendiente — Ordenada al origen

Ejercicio 2.7 Tomando como referencia el **Ejemplo 2.8** complete la tabla.

	Pendiente	Ordenada al origen	Intercepto en y
$y = 3x + 6$	3	6	(0, 6)
$y = 5x - 7$			
$y = 2x + 3$			

$y = 5x - 7$ se puede decir $y = 5x + (-7)$.

123

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Indicador de logro

En la recta $y = 3x + 2$, que significa 3 y 2, ¿cuál es el intercepto en y?

1. **Interpretar el significado de 2 como coeficiente en la función $y = 2x + 1$. Ejemplo 2.8**
   (20 min)

* Graficar la función $y = 2x + 1$.
  ¿Cuál es la razón de cambio en la función?
* Usar marcador verde para marcar el avance horizontal y el marcador rojo para el avance vertical.
* Si x avanza 1 a la derecha, ¿cuánto cambia y?, ¿hacia dónde?, ¿cuánto cambia y si x aumenta 3?
* Calcular $\frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}$.
* Concluir que la razón de cambio es 2 y se conoce también como la pendiente de la recta.

2. **Interpretar el significado de 1 en la recta $y = 2x + 1$.**
   (10 min)

* Recordar lo visto en el Ejemplo 2.6 y Ejemplo 2.7
* Observar ahora la recta $y = 2x + 1$, ¿qué significa 1?
* Si $x = 0$, ¿cuál es el valor de y?
* Concluir que 1 es la ordenada al origen y el punto (0, 1) es el punto donde la gráfica corta el eje y, es decir intercepto en y.

3. **Interpretar el significado de a y b en la recta $y = ax + b$.**
   Ejemplo 2.8
   (5 min)

* Concluir que en la recta $y = 3x + 2$, 3 es la pendiente y 2 la ordenada al origen. El intercepto en y es (0, 2).

4. **Resolver Ejercicio 2.7**
   (10 min)

Solución

	Pendiente	Ordenada al origen	Intercepto en y
$y = 3x + 6$	3	6	(0, 6)
$y = 5x - 7$	5	-7	(0, -7)
$y = 2x + 3$	2	3	(0, 3)

Ejercicios adicionales

Complete la tabla

	Pendiente	Ordenada al origen	Intercepto en y
$y = 5x - 3$			
$y = \frac{3}{2}x + 5$			
$y = -7x + 6$			

Solución

	Pendiente	Ordenada al origen	Intercepto en y
$y = 5x - 3$	5	-3	(0,−3)
$y = \frac{3}{2}x + 5$	$\frac{3}{2}$	5	(0, 5)
$y = -7x + 6$	-7	6	(0, 6)

Indicador de logro

¿Cuál es la relación entre la tabla, la expresión y la gráfica de la función $y = 3x + 2$?

1. Comparar el significado que tienen a y b en la tabla, la expresión y la gráfica de una función $y = ax + b$.

Ejemplo 2.9

(25 min)

¿Cómo se identifica el valor de 2 en la tabla?, ¿qué valor tiene 2 en la expresión $y = 2x - 1$?, ¿qué papel tiene el valor de 2 en la gráfica?

* Elaborar tabla para $y = 2x - 1$ y trazar su gráfica.

¿Qué valor tiene y cuando $x = 0$ en la tabla?

* Observar la expresión, ¿qué característica tiene -1 en la expresión $y = 2x - 1$?, ¿qué papel cumple -1 en la gráfica?

3. Resolver Ejercicio 2.8

(20 min)

* Siga la estrategia usada con los ejemplos anteriores.

Unidad 6: Funciones de primer grado

Lección 2: (6/12) Gráficas de funciones de primer grado

Sección 2: Gráfica de funciones de primer grado

Objetivo: Conocer el significado de a y b en la función $y = ax + b$ establecer la relación entre la tabla, la expresión y la gráfica.

Ejemplo 2.9

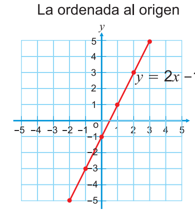
En la función de primer grado $y = 2x - 1$, compare el significado 2, − 1 en la tabla, en la expresión y en la gráfica.

Solución:

	La tabla	La expresión	La gráfica
Significado de -1	$y = -1$ cuando $x = 0$	Término constante	La ordenada al origen
Significado de 2	Razón de cambio $= \frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x} = \frac{2}{1} = 2$	El coeficiente de x	La Pendiente

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$2x - 1$	-7	-5	-3	-1	1	3	5

$y = \boxed{2}x - 1$



$y = ax + b$ ← Ordenada al origen; a: Pendiente

Ejercicio 2.8

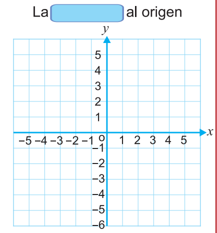
En la función de primer grado $y = 3x + 2$ establezca la relación entre la expresión y la gráfica.

Solución:

	La tabla	La expresión	La gráfica
Significado de 2	$y = \bigcirc$ cuando $x = 0$	Término $\boxed{}$	La $\boxed{}$ al origen
Significado de 3	Razón de cambio $= \frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x} = \boxed{}$	El $\boxed{}$ de x	La $\boxed{}$

x	-2	-1	0	1	2
$3x + 2$			$\bigcirc$		

$y = \boxed{}x + \bigcirc$

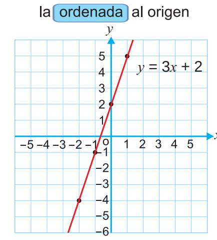


Solución:

	La tabla	La expresión	La gráfica
Significado de 2	$y = 2$ cuando $x = \boxed{0}$	Término $\boxed{\text{constante}}$	la $\boxed{\text{ordenada}}$ al origen
Significado de 3	Razón de cambio $= \frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x} = \boxed{3}$	El $\boxed{\text{coeficiente}}$ de x	La $\boxed{\text{pendiente}}$

x	-2	-1	0	1	2
$3x + 2$	-4	-1	2	5	8

$y = \boxed{3}x + 2$



Unidad 6: Funciones de primer grado

Lección 2:* *(7/12) Gráficas de funciones de primer grado

Sección 2 Gráfica de funciones de primer grado

Objetivo: Graficar una función de primer grado en dos variables utilizando la ordenada al origen y la pendiente.

Ejemplo 2.10

Grafique la función de primer grado $y = 2x + 2$.

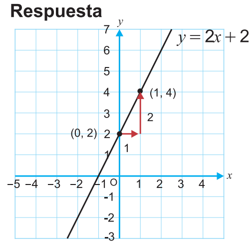
Solución:

Paso 1: Como la ordenada al origen es 2, la gráfica pasa por (0, 2).

Paso 2: Como la pendiente es 2, cuando se avanza 1 hacia la derecha se avanza 2 hacia arriba, es decir que pasa por el punto (1, 4).

Paso 3: Unir los dos puntos (0, 2) y (1, 4).

Respuesta



Ejercicio 2.9 Grafique las siguientes funciones de primer grado.

a) $y = x + 2$ b) $y = 5x - 1$

Ejemplo 2.11

Grafique la función de primer grado $y = -2x + 1$.

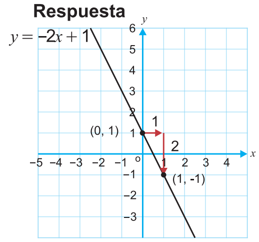
Solución:

Paso 1: Como la ordenada al origen es 1, la gráfica pasa por (0, 1).

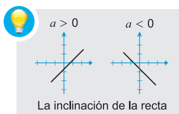
Paso 2: Como la pendiente es −2, cuando se avanza 1 hacia la derecha se avanza 2 hacia abajo, es decir que se pasa por el punto (1, −1).

Paso 3: Unir los dos puntos (0, 1) y (1, −1).

Respuesta



En la recta $y = ax + b$, cuando en x se avanza a la derecha, si a es positivo entonces en y se avanza hacia arriba, y si a es negativo entonces en y se avanza hacia abajo.



La inclinación de la recta

Ejercicio 2.10 Grafique las siguientes funciones.

a) $y = -3x + 4$ b) $y = -x + 3$

Ejemplo 2.12

Grafique la función de primer grado $y = \frac{1}{2}x + 1$.

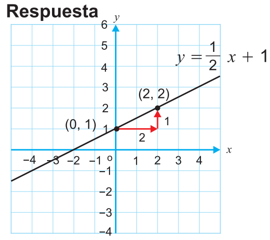
Solución:

Paso 1: Como la ordenada al origen es 1, la gráfica pasa por (0, 1).

Paso 2: Como la pendiente es $\frac{1}{2}$, cuando se avanza 2 hacia la derecha se avanza 1 hacia arriba, es decir que se pasa por el punto (2, 2).

Paso 3: Unir los dos puntos (0, 1) y (2, 2).

Respuesta



Ejercicio 2.11 Grafique la función de primer grado $y = \frac{1}{4}x + 2$, evalúe para $x = 0$ y $x = 4$.

125

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Indicador de logro

Grafique la función de primer grado $y = x + 2$.

1. Graficar una función de primer grado utilizando la ordenada al origen y una pendiente positiva.

Ejemplo 2.10

(6 min)

* Desarrollar conforme a los pasos propuestos en el LE.

* En la función $y = 2x + 2$, ¿cuál es el intercepto en y?

* Aclarar que a partir de (0, 2) avanza una unidad a la derecha y 2 unidades hacia arriba, por tener pendiente positiva.

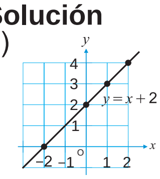
* En la recta $y = ax + b$, cuando en x se avanza a la derecha, si a es positivo entonces en y se avanza hacia arriba y si a es negativa entonces en y se avanza hacia abajo.

2. Resolver Ejercicio 2.9

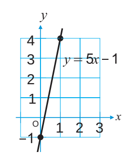
(10 min)

Solución

a)



b)



3. Graficar una función de primer grado utilizando la ordenada al origen y una pendiente negativa.

Ejemplo 2.11

(6 min)

* Desarrollar conforme a los pasos propuestos en el LE. ¿Qué signo tiene la pendiente?

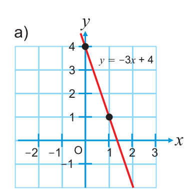
* Aclarar que a partir de (0, 1), avanza 1 unidad a la derecha y 2 unidades hacia abajo por tener pendiente negativa.

4. Resolver Ejercicio 2.10

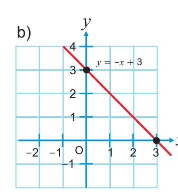
(10 min)

Solución

a)



b)



5. Graficar una función con pendiente fraccionaria.

Ejemplo 2.12 *(8 min)*

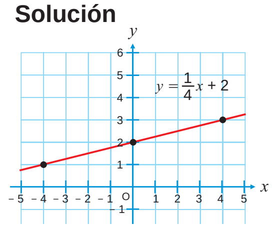
* Indicar que la ordenada al origen es 1, porque su gráfica pasa por el punto (0,1) y pendiente $\frac{1}{2}$.

* Es importante notar que la pendiente no es un número entero.

.

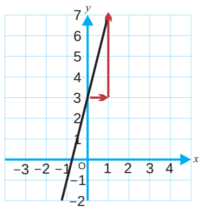
6. Resolver Ejercicio 2.11 *(5 min)*

Solución



Indicador de logro

Dada una gráfica encuentre la ecuación de la recta



Unidad 6: Funciones de primer grado

Lección 2: Gráficas de funciones de primer grado

(8/12)

Sección 3: Expresión de una función de primer grado $y = ax + b$ mediante su gráfica

Objetivos:
- Encontrar la función de primer grado dada su gráfica utilizando la pendiente y ordenada al origen.
- Encontrar la función de primer grado dada la pendiente de su gráfica y un punto de la misma.

1. Encontrar la función de primer grado mediante su gráfica. *Ejemplo* **2.13**

(10 min)

* Una función de primer grado tiene la forma $y = ax + b$, tomando como referencia el punto (0, 4), ¿cuál es el valor de b?, ¿cómo se puede encontrar el valor de a?

* Indicar que a partir de (0, 4) avanza 1 unidad a la derecha y 2 unidades hacia arriba, obteniendo el punto (1, 6), que se observa en el sistema de coordenadas.

* Concluir que la pendiente es 2

2. Resolver *Ejercicio* **2.12**

(15 min)

Solución

a) $y = 4x + 3$ b) $y = -3x + 1$

* En este libro cuando se le pregunte "Encuentre la función de primer grado" debe contestar en la forma $y = ax + b$.

3. Encuentre la función de primer grado cuya gráfica pasa por un punto, conociendo la pendiente. *Ejemplo* **2.14**

(15 min)

* Escribir la función de primer grado $y = ax + b$, ¿qué datos conoce?

* Si tiene el punto (2, 4), ¿cuál es el valor de x y de y?

* Conociendo esos valores podemos encontrar el valor de b.

¿Cuál es la ecuación que se obtiene sustituyendo los valores de a y b?

Sección 3: Expresión de una función de primer grado en la forma $y = ax + b$ dada su gráfica

Ejemplo **2.13**

Exprese la función de primer grado en la forma $y = ax + b$, dada su gráfica.

Solución:

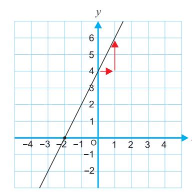
Observando su gráfica la recta corta el eje y en 4 que es la ordenada al origen.

La ordenada al origen es 4.

La pendiente es la razón de cambio $\frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x} = \frac{2}{1} = 2$.

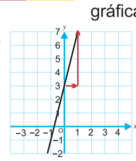
Ahora sustituyendo el valor de $a = 2$, $b = 4$ en $y = ax + b$ encuentra su expresión.

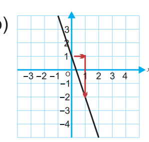
Respuesta: $y = 2x + 4$



Para escribir la función de primer grado en la forma $y = ax + b$ a partir de su gráfica es necesario identificar la ordenada al origen y determinar la pendiente de la recta.

Ejercicio **2.12** Encuentre la función de primer grado en la forma $y = ax + b$, dadas sus gráficas.

a) 

b) 

$y = ax + b$ ← Ordenada al origen

Pendiente

En este libro, cuando se le pregunte **"Encuentre la función de primer grado"** conteste en la forma $y = ax + b$

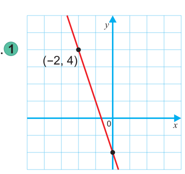
Ejemplo **2.14**

Encuentre la función de primer grado cuya gráfica pasa por (−2, 4) y su pendiente es −3.

Solución:

1. La expresión de la función de primer grado es $y = ax + b$ y como su pendiente es − 3, $a = -3$, entonces $y = -3x + b$...①
2. Como la recta pasa por el punto (−2, 4) sustituyendo $x = -2$ y $y = 4$ en ①, tenemos que
$y = -3x + b$
$4 = -3(-2) + b$
$4 = 6 + b$
$b = -2$

Respuesta: $y = -3x - 2$



Observe que cuando $a = -3$ y $b = -2$ la gráfica de la función de primer grado $y = ax + b$ es la recta $y = -3x + (-2)$ entonces $y = -3x - 2$

Ejercicio **2.13**

Encuentre la función de primer grado cuya gráfica pasa por (0, 1) y su pendiente es −2.

126 *Unidad 6 - Funciones de primer grado*

4. Resolver *Ejercicio* **2.13** *(5 min)*

Solución

$a = -2$ entonces $y = -2x + b$, como la recta pasa por el punto (0, 1), sustituyendo en $y = ax + b$, se tiene

$y = -2x + b$
$1 = -2(0) + b$
$1 = (0) + b$
$b = 1$

Respuesta: $y = -2x + 1$

Unidad 6: **Funciones de primer grado**

Lección 2: (9/12) Gráficas de funciones de primer grado

Sección 4: Expresión de una función de primer grado en la forma $y = ax + b$ a partir de dos puntos

Objetivo: Encontrar la ecuación de la recta dados dos puntos de esta.

Indicador de logro

Encuentre la función de primer grado cuya gráfica pasa por los puntos (2, 3) y (4, 9).

Sección 4: Expresión de una función de primer grado en la forma $y = ax + b$ a partir de dos puntos

Ejemplo 2.15

Encuentre la función de primer grado cuya gráfica pasa por los puntos (1, 3) y (2, 5).

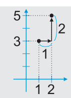
Solución:

Observe dos puntos (1, 3) y (2, 5).

Cambio en y de 3 a 5 es: 5 − 3 = 2

Cambio en x de 1 a 2 es: 2 − 1 = 1

Entonces la pendiente de la recta es $a = \frac{5-3}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$.



Note que si avanza 1 hacia la derecha avanza 2 hacia arriba.

Por lo tanto la pendiente de la recta es $\frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x} = \frac{5-3}{2-1}$

La función de primer grado que buscamos es

$y = 2x + b$

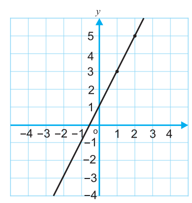
Como la recta pasa por el punto (1, 3), sustituyendo $x = 1$, $y = 3$ en $y = 2x + b$ se tiene:

$y = 2x + b$

$3 = 2\ (1) + b$

$3 = 2 + b$

$b = 1$



Respuesta: $y = 2x + 1$

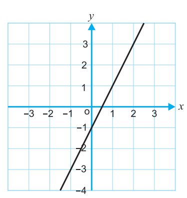
Para encontrar una función de primer grado ($y = ax + b$) a partir de dos puntos es necesario:

1. Determinar la pendiente "a", utilizando la razón de cambio.
2. Sustituir el valor de la pendiente "a" en $y = ax + b$.
3. Elegir uno de los puntos, sustituir los valores de x y y en $y = ax + b$, para encontrar el valor de b.

Ejercicio 2.14 Encuentre la función de primer grado cuya gráfica pasa por los puntos (2, 3) y (4, 9).

Ejercicio 2.15 Resuelva.

a) Encuentre la función de primer grado cuya gráfica es la siguiente recta.



b) Encuentre la función de primer grado cuya gráfica pasa por el punto (2, −1) y su pendiente es 5.

c) Encuentre la función de primer grado cuya gráfica pasa por los puntos (1, −1) y (2, −6).

127

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

1. **Encontrar la función de primer grado dado dos puntos.**

   Ejemplo 2.15

   (15 min)

   * Aclarar que con los puntos (1,3) y (2,5) puede obtener la razón de cambio $\frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}$.

   * Encontrada su pendiente puede trabajar como en el **Ejemplo 2.14**

   * Se puede concluir que puede utilizar cualquier punto que está en la recta para encontrar la función de primer grado.

2. **Resumir los pasos para encontrar una función de primer grado.**

   (5 min)

3. **Resolver Ejercicio 2.14**

   (10 min)

   Solución

   $y = 3x - 3$

4. **Resolver Ejercicio 2.15**

   (15 min)

   Solución

   a) $y = 2x - 1$

   b) $y = 5x - 11$

   c) $y = -5x + 4$

Ejercicios adicionales

a) Encuentre la función de primer grado si su gráfica pasa por los puntos (-2,3), (-3,-5)

b) Encuentre la función de primer grado si su gráfica pasa por el punto (1,-2) y tiene como pendiente -3.

Solución

a) $y = 8x + 19$

b) $y = -3x + 1$

Indicador de logro

Encuentre la función de primer grado cuya gráfica es paralela a la recta $y = 2x + 5$ y pasa por (1, 1).

1. **Determinar la condición para que dos rectas sean paralelas.**
   (15 min)
   * Observar las gráficas de las rectas.
   ¿Qué pasa si prolongamos las rectas?, ¿se cortan?
   ¿Cómo son las pendientes de ambas rectas?
2. **Establecer un criterio de paralelismo.**
   (2 min)
3. **Resolver** *Ejercicio* **2.16**
   (3 min)
   Solución
   c) y d)
4. **Encontrar la ecuación de una recta paralela a otra.**
   Ejemplo **2.16**
   (15 min)
   * Para encontrar una recta paralela a esta, ¿cuál debería ser la pendiente?
   ¿Qué otro dato se necesita para determinar esa función de primer grado?
   * Se tiene $y = 3x + 6$ y la recta pasa por (-1, -2). Determinar b.
5. **Resolver** *Ejercicio* **2.17**
   (10 min)
   Solución
   a) $y = 2x - 1$ b) $y = -x - 1$

Ejercicios adicionales

Encuentre la función de primer grado sí su gráfica es paralela a $y = 4x - 1$ y pasa por el punto (0, 4)

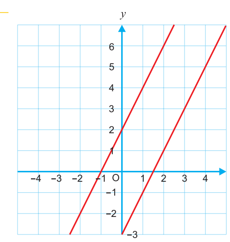
Solución

$y = 4x + 4$

Unidad 6:	**Funciones de primer grado**
Lección 2: (10/12)	Gráficas de funciones de primer grado
Sección 5:	Criterio de paralelismo y perpendicularidad
Objetivo:	Encontrar la ecuación de una recta paralela a otra.

Sección 5: Criterio de paralelismo y perpendicularidad

Con la gráfica de la derecha lea y observe detenidamente.
1) Observe las gráficas de las siguientes funciones de primer grado.
2) Observe que si las rectas $y = 2x + 2$ y $y = 2x - 3$ por más que se prolongan, nunca se van a tocar en un punto.
Por lo tanto se puede asumir que son paralelas.
Observe que las pendientes de ambas rectas son iguales, es decir, ambas tienen pendiente 2.
De lo anterior se concluye lo siguiente.



$y = 2x + 2$ $y = 2x - 3$

Criterio de paralelismo entre rectas.
Dos rectas son paralelas cuando sus pendientes son iguales.

Cuando $a_1 = a_2$
Las rectas $\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases}$
son paralelas

Ejercicio **2.16** Seleccione, cuáles de las siguientes rectas son paralelas a la recta $y = -3x + 4$ utilizando el criterio de paralelismo.

a) $y = 3x + 4$ b) $y = -2x + 4$ c) $y = -3x - 5$ d) $y = -3x$

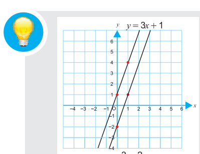
Ejemplo **2.16**

Encuentre la función de primer grado cuya gráfica es paralela a $y = 3x - 2$ y pasa por (−1, −2).

Solución:
Se conoce que ambas ecuaciones tienen la misma pendiente, por lo tanto, tomando como pendiente $a = 3$, tenemos que $y = 3x + b$ y también sabemos que pasa por el punto (−1, −2) entonces sustituyendo estos valores encontramos b.

$y = 3x + b$
$-2 = 3(-1) + b$
$-2 = -3 + b$
$b = 1$

Respuesta: $y = 3x + 1$



Ejercicio **2.17** Encuentre la función de primer grado cuya gráfica es paralela a la recta:

a) $y = 2x + 5$ y pasa por (1, 1) b) $y = -x + 4$ y pasa por (-2, 1)

Unidad 6: **Funciones de primer grado**

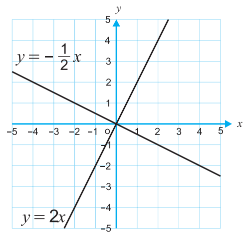
Lección 2: (11/12) Gráficas de funciones de primer grado

Sección 5: Criterio de paralelismo y perpendicularidad

Objetivo: Determinar si dos rectas son perpendiculares usando el criterio de perpendicularidad.

Con la gráfica de la derecha lea y observe detenidamente.
1) Las dos rectas se intersecan en un punto. Por lo que determinan 4 ángulos.
2) Utilice el transportador para medir el ángulo comprendido entre las dos rectas.

Note que la medida de cada ángulo es de 90º, es decir, que cada ángulo es un ángulo recto.
Por lo tanto, la recta $y = -\frac{1}{2}x$ y $y = 2x$ son perpendiculares.
Además observe al multiplicar sus pendientes $-\frac{1}{2} \times 2 = -1$



Criterio de perpendicularidad entre rectas.
Dos rectas son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es igual a −1.

Cuando $a_1 \times a_2 = -1$
Las rectas $\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases}$
son perpendiculares

Ejemplo 2.17

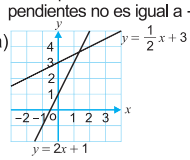
Seleccione cuáles de las siguientes rectas son perpendiculares a la recta $y = 2x + 1$.

a) $y = \frac{1}{2}x + 3$ b) $y = -2x + 8$ c) $y = -\frac{1}{2}x + 2$

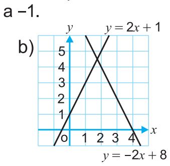
Solución:
Para determinar si las rectas son perpendiculares es suficiente aplicar el criterio de perpendicularidad.

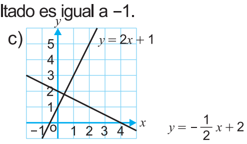
a) $2 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$
No son perpendiculares ya que al multiplicar ambas pendientes no es igual a −1.

b) $2 \times (-2) = -4$
No son perpendiculares ya que al multiplicar ambas pendientes no es igual a −1.

a)


c) $2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{2} = -1$
Sí, son perpendiculares porque al multiplicar ambas pendientes el resultado es igual a −1.

b)


c)


Respuesta: inciso "c"

Ejercicio 2.18 Seleccione cuáles de las siguientes rectas son perpendiculares a la recta $y = 3x + 5$.

a) $y = -3x + 8$ b) $y = -\frac{1}{3}x + 2$ c) $y = \frac{1}{3}x - 6$

d) $y = 3x - 6$ e) $y = -\frac{2}{3}x + 8$ f) $y = -\frac{1}{3}x - 10$

Indicador de logro

¿Seleccione cuáles de las siguientes rectas son perpendiculares a $y = 3x + 5$?

a) $y = -3x + 8$ b) $y = -\frac{1}{3}x + 2$
c) $y = \frac{1}{3}x - 6$ d) $y = 3x - 6$
e) $y = -\frac{2}{3}x + 8$ f) $y = -\frac{1}{3}x - 10$

1. Determinar el criterio de perpendicularidad de rectas.
(15 min)

* Observar la gráfica, ¿en qué punto se intersecan las dos rectas?
* Observe que la gráfica de ambas rectas forman 4 ángulos, ¿cuánto mide cada ángulo?
* Concluir que ambas rectas son perpendiculares.
  ¿Cómo son las pendientes de ambas rectas?
* Notar que al multiplicar sus pendientes el resultado es -1.
* Concluir que si el producto de ambas pendientes es -1, entonces ambas rectas son perpendiculares.

2. Determinar si dos rectas son perpendiculares.
Ejemplo 2.17
(23 min)
¿Cuál es la pendiente de $y = 2x + 1$.

* Calcular los productos de las pendientes de la recta dada y la de cada recta en los incisos a), b) y c).

5. Resolver Ejercicio 2.18
(7 min)

Solución

a) -3 x 3 = -9

b) $-\frac{1}{3}$ x 3 = -1

c) $\frac{1}{3}$ x 3 = 1

d) 3 x 3 = 9

e) $-\frac{2}{3}$ x 3 = -2

f) $-\frac{1}{3}$ x 3 = -1

Respuesta: b) y f)

Unidad 6: Funciones de primer grado

Lección 2: (12/12) Gráficas de funciones de primer grado

Sección 5: Criterio de paralelismo y perpendicularidad

Objetivo: Encontrar la función de primer grado que su gráfica pasa por un punto y es perpendicular a una recta.

Indicador de logro

Encuentre la función de primer grado si su gráfica es perpendicular a $y = 4x - 1$ y pasa por (0, 4).

1. Encontrar la función de primer grado si su gráfica pasa por un punto y es perpendicular a una recta.

Ejemplo **2.18**

(25 min)

¿Cuál es la pendiente de $y = 3x + 4$?

* Aplicar el criterio de perpendicularidad, ¿cuál es la pendiente de la función de primer grado que se busca?
* Se sabe que el producto de ambas pendientes es -1.
* Si una función de primer grado es de la forma $y = ax + b$, entonces si multiplica 3 x a = -1 puede encontrar el valor de a.

¿Cómo queda formada la función que se busca?

* Si la función de primer grado es $y = -\frac{1}{3}x + b$, ¿cómo encuentra el valor de b?
* Indicar que la función de primer grado pasa por el punto (-3, 2) y sustituir estos valores para obtener el valor de b.
* Si tiene tiempo puede dibujar su gráfica para verificar su perpendicularidad.

2. Resolver *Ejercicio* **2.19**

(20 min)

Solución

a) $y = -\frac{1}{4}x + 4$

b) $y = 2x + 4$

Ejemplo **2.18**

Encuentre la función de primer grado si su gráfica pasa por el punto (−3, 2) y es perpendicular a $y = 3x + 4$.

Solución:

Sea $y = ax + b$ la función que se pide.

Por el criterio de perpendicularidad sabemos que $3 \times a = -1$ implica que $a = -\frac{1}{3}$

y queda $y = -\frac{1}{3}x + b$ y como sabemos que pasa por el punto (−3, 2) tenemos que

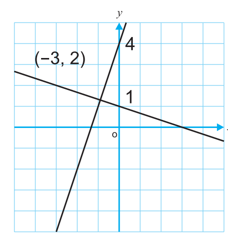
$y = -\frac{1}{3}x + b$

$2 = -\frac{1}{3}(-3) + b$

$2 = \frac{3}{3} + b$

$2 = 1 + b$

$b = 1$



Respuesta: $y = -\frac{1}{3}x + 1$

Ejercicio **2.19** Encuentre la función de primer grado si su gráfica es perpendicular a la recta:

a) $y = 4x - 1$ y que pasa por el punto (0, 4)

b) $y = -\frac{1}{2}x + 3$ y que pasa por el punto (1, 6)

150 *Unidad 6 - Funciones de primer grado*

Ejercicios adicionales

Encuentre la función de primer grado si su gráfica es perpendicular a la recta.

a) $y = 3x - 2$ y pasa por (6, 2)

b) $y = \frac{3}{2}x - 1$ y pasa por (-3, -4)

c) $y = 2x + 5$ y pasa por (1, 1)

Solución

a) $y = -\frac{1}{3}x + 4$

b) $y = -\frac{2}{3}x - 6$

c) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

Unidad 6: **Funciones de primer grado**

Lección 3: (1/8) Solución gráfica de un sistema de ecuaciones de primer grado

Sección 1: Solución gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables

Objetivo: Trazar la gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables.

Lección 3: Solución gráfica de un sistema de ecuaciones de primer grado

Sección 1: Solución gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables

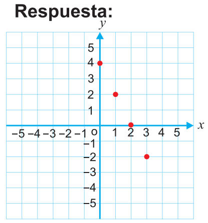
Ahora vamos a pensar en las soluciones de la ecuación de primer grado en dos variables.

Los pares de valores de x y y, (0,4), (1,2), (2,0) y (3, − 2) cumplen la ecuación $2x + y = 4$, es decir estos pares son las soluciones de $2x + y = 4$.

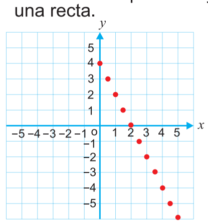
Ejemplo 3.1

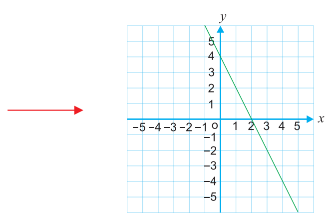
Ubique los puntos (0,4), (1,2), (2,0), y (3, − 2) en el sistema de coordenadas.

Respuesta:



Tomando más puntos cuyas coordenadas cumplen $2x + y = 4$, los puntos van a formar una recta.





Si se despeja para y en $2x + y$, $y = -2x + 4$

Entonces se puede considerar que y es una función de primer grado de x.

Ahora el conjunto de los puntos cuyas coordenadas son soluciones de la ecuación $2x + y = 4$ coinciden con la gráfica de la función de primer grado $y = -2x + 4$ y es una recta.

A esta recta se le llama gráfica de la ecuación $2x + y = 4$.

La gráfica de la ecuación $ax + by = c$ donde por lo menos uno de a y b es distinto de cero, es una recta. La ecuación $ax + by = c$, se llama ecuación de la recta.

131

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Indicador de logro

Convierta las siguientes ecuaciones a la forma $y = ax + b$ y trace su gráfica.

a) $3x + y = -6$

1. **Verificar soluciones de una ecuación de primer grado en dos variables.**
   (5 min)

2. **Ubicar los puntos en un sistema de coordenadas y trazar la gráfica de la ecuación $2x + y = 4$.** Ejemplo 3.1
   (10 min)

* Ubicar 4 puntos.
* Ubicar más puntos.
* Explicar que los puntos van a formar una recta.
* Concluir que la gráfica de la ecuación $ax + by = c$, donde a y b son distintos de cero es una recta. La ecuación $ax + by = c$, se llama ecuación de la recta.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Convierta las siguientes ecuaciones a la forma $y = ax + b$ y trace su gráfica.

a) $3x + y = -6$

3. Transformar una ecuación en dos variables en una función de primer grado a la forma $y = ax + b$. *Ejemplo* **3.2**

(15 min)

* Desarrollar paso a paso como aparece en el LE.

* Despejar para la variable y en la ecuación de dos variables.

* En la función de primer grado $y = -x + 2$, ¿cuál es la pendiente?, ¿cuál es la ordenada al origen?

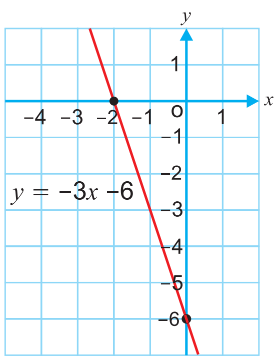
Trazar la gráfica.

4. Resolver *Ejercicio* **3.1**

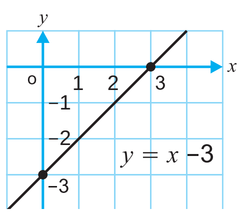
(15 min)

Solución

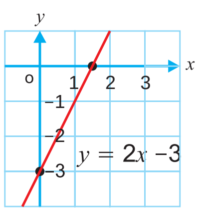
a)



b)



c)



Unidad 6: Funciones de primer grado

Lección 3: (1/8) Solución gráfica de un sistema de ecuaciones de primer grado

Sección 1: Solución gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables

Objetivo: Trazar la gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables.

Ejemplo **3.2**

Convierta la ecuación $x + y = 2$ a la forma $y = ax + b$ y trace su gráfica.

Solución:

Paso 1 Pasar la ecuación $x + y = 2$ a la forma $y = ax + b$

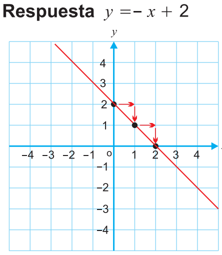
$$x + y = 2$$
$$y = -x + 2$$

Paso 2 Como la ordenada al origen es 2, la gráfica pasa por el punto (0,2).

Paso 3 Como la pendiente es -1 entonces cuando avanza 1 a la derecha avanza 1 hacia abajo, es decir, que la recta pasa por los puntos (1,1), (2,0).

Paso 4 Al unir los puntos (1,1), (2,0) se obtiene su recta.

Respuesta $y = -x + 2$



La gráfica de una función de primer grado es un recta.

Ejercicio **3.1** Convierta las siguientes ecuaciones a la forma $y = ax + b$ y trace su gráfica.

a) $3x + y = -6$ b) $-x + y = -3$ c) $y - 2x = -3$

Unidad 6: Funciones de primer grado

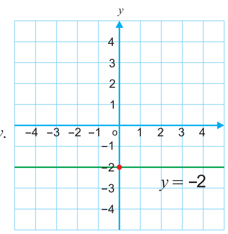
Lección 3: (2/8) Solución gráfica de un sistema de ecuaciones de primer grado

Sección 1: Solución gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables

Objetivo: Trazar la gráfica de una ecuación de primer grado de la forma $x = a$, $y = b$.

Ejemplo 3.3

Trace la gráfica de la ecuación $2y + 4 = 0$.



Solución:

Lo primero que se debe hacer es despejar para y.

$$2y + 4 = 0$$
$$2y = -4$$
$$y = -\frac{4}{2}$$
$$y = -2$$

Observando que en la ecuación $y = -2$, independientemente del valor de x, el valor de y siempre será el mismo. Su gráfica es una recta horizontal, es decir, paralela al eje x.

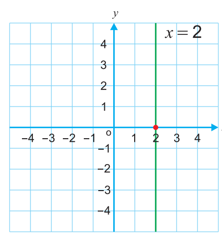
x	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...
y	...	−2	−2	−2	−2	−2	−2	−2	...

Ejercicio 3.2 Trace la gráfica de las siguientes ecuaciones.

a) $y = 2$ b) $y = -5$ c) $4y - 12 = 0$ d) $2y + 2 = 0$

Ejemplo 3.4

Trace la gráfica de la ecuación $3x - 6 = 0$.



Solución:

$$3x = 6$$
$$x = \frac{6}{3}$$
$$x = 2$$

Note que la ecuación $3x = 6$ no se puede convertir a la forma $y = ax + b$.

Sin embargo en la ecuación $x = 2$ independientemente del valor de y, el valor de x siempre será el mismo. Su gráfica es una recta vertical, es decir, paralela al eje y.

La gráfica de la ecuación $ax + by = c$ donde a y/o b son distintos de cero es una recta.

Si $a = 0$ entonces la recta es horizontal.
Si $b = 0$ entonces la recta es vertical.

En este caso, a no significa pendiente, b no significa ordenada al origen, porque no estamos hablando de la forma $y = ax + b$.

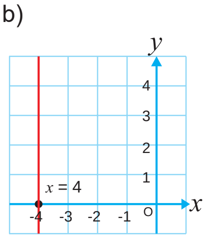
Ejercicio 3.3 Trace la gráfica de las siguientes ecuaciones.

a) $x = 3$ b) $2x + 8 = 0$ c) $5x - 25 = 0$ d) $x = 0$

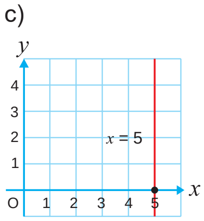
133

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

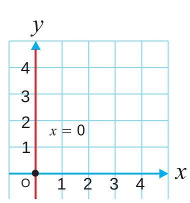
b)



c)



d)



Indicador de logro

Trazar la gráfica de las siguientes ecuaciones $y = 2$, $x = 3$.

1. Trazar la gráfica de una ecuación $y = b$.

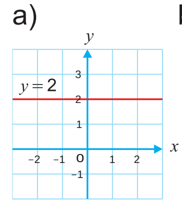
Ejemplo 3.3
(10 min)

* Despejar para la variable y.
* Recalcar que independientemente del valor de x, el valor de y siempre es -2.

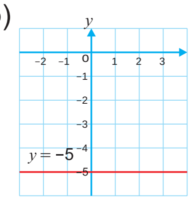
2. Resolver Ejercicio 3.2
(15 min)

Solución

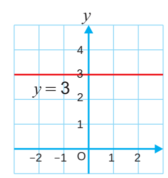
a)



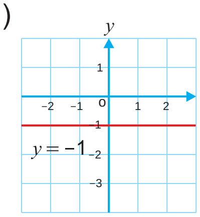
b)



c)



d)



3. Trazar la gráfica de una ecuación $x = a$.

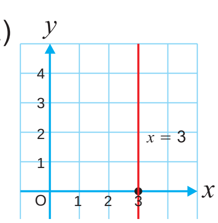
Ejemplo 3.4
(10 min)

* Despejar para la variable x.
* Recalcar que en este caso independientemente cualquier valor de y el valor de $x = 2$.
* Concluir en la gráfica de la ecuación $ax + by = c$, si $a = 0$ la recta es horizontal y si $b = 0$ a recta es vertical.

4. Resolver Ejercicio 3.3
(10 min)

Solución

a)



Indicador de logro

Encuentre los interceptos en x y y de la siguiente recta $y = 3x - 6$.

1. **Encontrar las coordenadas donde la gráfica corta los ejes x y y.** Ejemplo 3.5

   (10 min)

* Dibujar la gráfica $y = 2x - 2$.

¿Qué puntos de la gráfica cortan los ejes x y y?

* Escribir las coordenadas de los puntos.

2. **Resolver** Ejercicio 3.4

   (10 min)

   Solución

   a) (1, 0) y (0, -1)

   b) (-2,0) y (0,-4)

* Indicar que el punto donde la recta corta el eje x se llama intercepto en x y tiene la forma $(x, 0)$. El punto donde la recta corta al eje y se llama intercepto en y y tiene la forma $(0, y)$.

3. **Encontrar los interceptos de la gráfica de una función de primer grado.** Ejemplo 3.6

   (10 min)

* Aclarar que el intercepto en x se determina cuando $y = 0$ y el intercepto en y cuando $x = 0$.

* Concluir que fácilmente se puede trazar la gráfica de la ecuación usando los dos interceptos.

4. **Resolver** Ejercicio 3.5

   (15 min)

   Solución

   a) intercepto en x: (2, 0), intercepto en y: (0, -6)

   b) intercepto en x: (3, 0), intercepto en y: (0, 12)

Unidad 6: Funciones de primer grado

Lección 3: (3/8) Solución gráfica de un sistema de ecuaciones de primer grado

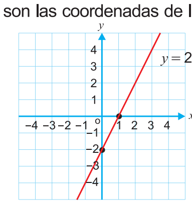
Sección 1: Solución gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables

Objetivo: Encontrar los interceptos en los ejes x y y de la recta de una ecuación de primer grado en dos variables.

Ejemplo 3.5 Observe la recta $y = 2x - 2$. ¿Cúales son las coordenadas de los puntos de la recta que cortan al eje x y y?

Solución:

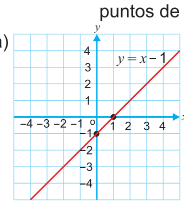
Observe que la recta $y = 2x - 2$ corta al eje x en (1, 0), y corta al eje y en (0, −2).



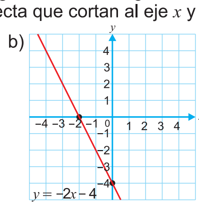
Respuesta: (0,−2) y (1,0)

Ejercicio 3.4 Observe las siguientes rectas. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos de la recta que cortan al eje x y y?

a)



b)



En general sabemos que el punto en donde la gráfica corta el eje y se llama intercepto en y, de igual manera el punto donde la gráfica corta el eje x se llama intercepto en x.

Los **interceptos** en x y y son los puntos donde la gráfica corta los ejes x y y respectivamente.

Ejemplo 3.6 Encuentre los interceptos en x y y de la recta $y = -2x + 10$

Solución:

En el eje x el valor de y es 0, por tanto para encontrar el intercepto en x se sustituye $y = 0$ en $y = -2x + 10$ de donde se obtiene

$$\begin{aligned} y &= -2x + 10 \\ 0 &= -2x + 10 \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

En el eje y el valor de x es 0, por tanto para encontrar el intercepto en y se sustituye $x = 0$ en $y = -2x + 10$ de donde se obtiene

$$\begin{aligned} y &= -2x + 10 \\ y &= -2\,(0) + 10 \\ y &= 10 \end{aligned}$$

Ya se sabe que 10 es la ordenada al origen, por lo tanto se puede encontrar el intercepto en y si calcular.

Respuesta: El intercepto en x es (5, 0) El intercepto en y es (0, 10)

Ejercicio 3.5 Encuentre los interceptos en x y y de las siguientes rectas.

a) $y = 3x - 6$ b) $y = -4x + 12$

134

Unidad 6 - Funciones de primer grado

Unidad 6: Funciones de primer grado

Lección 3: (4/8) Solución gráfica de un sistema de ecuaciones de primer grado

Sección 2: Gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables

Objetivo: Trazar la gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables usando los interceptos.

Sección 2: *Gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables*

Ejemplo 3.7

Trace la gráfica de la ecuación $4x - 3y = 12$ utilizando los interceptos en x y y.

Solución:

❶ Para encontrar el intercepto en y haga lo siguiente:

Si $x = 0$ entonces
$$4x - 3y = 12$$
$$4(0) - 3y = 12$$
$$-3y = 12$$
$$y = -4$$

Por lo que, el intercepto en y es el punto $(0, -4)$.

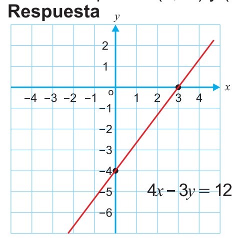
❷ Para encontrar el intercepto en x haga lo siguiente:

Si $y = 0$ entonces
$$4x - 3y = 12$$
$$4x - 3(0) = 12$$
$$4x = 12$$
$$x = 3$$

Por lo que, el intercepto en x es el punto $(3, 0)$.

❸ Una los puntos $(0,-4)$ y $(3,0)$.

Respuesta



Para trazar la gráfica de una ecuación solo se necesita encontrar los interceptos en x y y.

Ejercicio 3.6 Trace la gráfica de las siguientes ecuaciones utilizando los interceptos en x y y.

a) $2x + y = 10$ b) $2x + 3y = 6$

Ejemplo 3.8

Trace la gráfica de la ecuación $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 1$ utilizando los interceptos en x y y.

Solución:

❶ Para encontrar el intercepto en y haga lo siguiente:

Si $x = 0$ entonces
$$-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 1$$
$$-\frac{1}{3}(0) + \frac{1}{2}y = 1$$
$$\frac{1}{2}y = 1$$
$$y = 2$$

Por lo que el intercepto en y es $(0, 2)$.

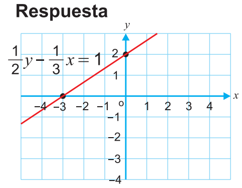
❷ Para encontrar el intercepto en x haga lo siguiente:

Si $y = 0$ entonces
$$-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 1$$
$$-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}(0) = 1$$
$$-\frac{1}{3}x = 1$$
$$x = -3$$

Por lo que el intercepto en x es $(-3, 0)$.

❸ Una los puntos $(0,2)$ y $(-3,0)$.

Respuesta



135

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Indicador de logro

Trace la gráfica de la siguiente ecuación utilizando los interceptos en x y y.

a) $2x + y = 10$

1. Trazar la gráfica de una ecuación en dos variables utilizando los interceptos.

Ejemplo 3.7

(10 min)

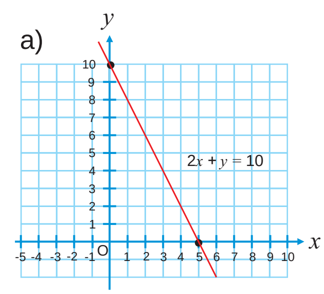
* Calcular los interceptos en x y y de la ecuación $4x - 2y = 12$.
  ¿Cuáles son las coordenadas?
  ¿Cuántos puntos se necesitan para trazar una recta?
* Ubicar los interceptos en el sistema de coordenadas.
* Trazar la gráfica.

2. Resolver Ejercicio 3.6

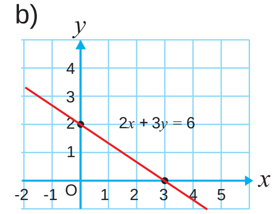
(7 min)

Solución

a)



b)



3. Trazar la gráfica de la ecuación $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 1$.

Ejemplo 3.8

(8 min)

* Calcular los interceptos y ubicarlos en el sistema de coordenadas.
* Trazar la gráfica.
* Concluir que $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 1$ es equivalente a $y = \frac{2}{3}x + 2$.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Trace la gráfica de la siguiente ecuación utilizando los interceptos en x y y.

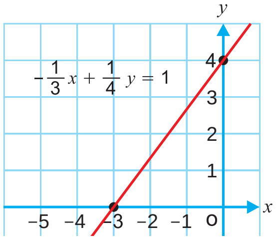
a) $2x + y = 10$

4. Resolver Ejercicio 3.7

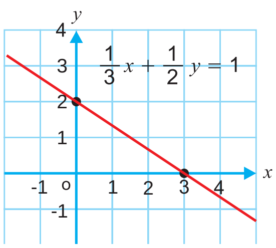
(8 min)

Solución

a)



b)



5. Encontrar los inteceptos de una ecuación $ax + by = 0$. Ejemplo 3.9

(7 min)

Trazar la gráfica de $3y - 9 = 0$ y $8x = 16$.

* Observar la gráfica $3y - 9 = 0$

¿Cuál es el intercepto de la recta $3y - 9 = 0$ en el eje y?

¿Existe el intercepto en x?, ¿por qué?

* Concluir que $3y - 9 = 0$ no tiene intercepto en el eje x.

* Observar la gráfica $8x = 16$, ¿cuál es el intercepto en x?

¿Puede encontrar el intercepto en y?, ¿por qué?

* Concluir que $8x = 16$ no tiene intercepto en y.

6. Resolver Ejercicio 3.8

(5 min)

Solución

a) El intercepto en y es el punto (0, 1), no tiene intercepto en x.

b) El intercepto en x es el punto (-4, 0), no tiene intercepto en y.

Unidad 6: Funciones de primer grado

Lección 3: (4/8) Solución gráfica de un sistema de ecuaciones de primer grado

Sección 2: Solución gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables.

Objetivo: Trazar la gráfica de una ecuación de primer grado en dos variables usando los interceptos.

Ejercicio 3.7 Trace la gráfica de las siguientes ecuaciones utilizando los interceptos.

a) $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 1$ b) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 1$

Ejemplo 3.9

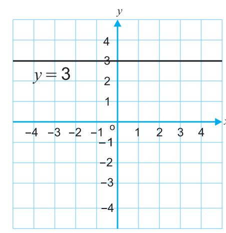
Encuentre los interceptos de las siguientes rectas.

a) $3y - 9 = 0$ b) $8x = 16$

Solución:

a) Como la recta $3y - 9 = 0$ no corta al eje x el intercepto en x no existe.
El intercepto en y se obtiene al despejar para y.

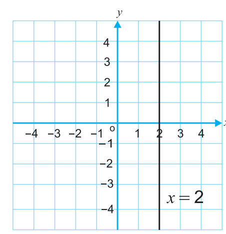
$3y - 9 = 0$
$3y = 9$
$y = 3$



Respuesta: El intercepto en y es el punto (0, 3), y no tiene intercepto en el eje x.

b) Como la recta $8x = 16$ no corta al eje y el intercepto en y no existe.
El intercepto en x se obtiene al despejar para x.

$8x = 16$
$x = 2$



Respuesta: El intercepto en x es el punto (2, 0), y no tiene intercepto en el eje y.

La gráfica es muy útil para comprender e imaginar las rectas.

Ejercicio 3.8 Encuentre los interceptos de las siguientes rectas.

a) $4y + 3 = 7$ b) $5x + 20 = 0$

Unidad 6: Funciones de primer grado

Lección 3: (5/8) Solución gráfica de un sistema de ecuaciones de primer grado

Sección 3: Solución gráfica de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

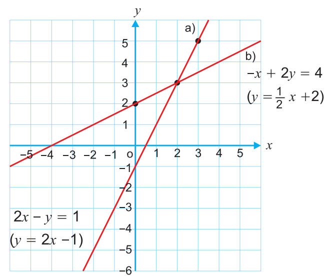
Objetivo: Encontrar de forma gráfica la solución de un sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables.

Sección 3: Solución gráfica de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Ejemplo 3.10

Dadas las siguientes gráficas encuentre el punto donde se intersecan ambas rectas.

a) $2x - y = 1$ b) $-x + 2y = 4$



Solución:

Observe las gráficas y pregúntese, ¿qué punto en común tienen ambas rectas?

Es fácil de encontrar el punto donde se intersecan las dos rectas. Sus coordenadas son (2,3).

Respuesta: El punto (2, 3)

Ahora vamos a formar el sistema de ecuaciones y resolverlo

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & (1) \\ -x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones vamos a eliminar una variable del sistema y así obtener una ecuación de primer grado.

Observar los coeficientes de la variable y, tienen − 1 y 2 entonces vamos multiplicar (1) x 2 y luego vamos a sumarlas

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & (1) \times 2 \\ -x + 2y = 4 & (2) \end{cases} \rightarrow \begin{array}{r} 4x - 2y = 2 \\ +)\ -x + 2y = 4 \\ \hline 3x \quad = 6 \\ x = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} A = B \\ +)\ C = D \\ \hline A + C = B + D \end{array}$$

Para encontrar el valor de y sustituye $x = 2$ en (1)

$2x - y = 1$
$2(2) - y = 1$
$4 - y = 1$
$-y = -3$
$y = 3$

También puede tomar la ecuación (2) para encontrar el valor de y.

La solución del sistema es $x = 2,\ y = 3$.

Entonces se puede concluir que a través de sus gráficas se puede observar que las rectas se intersecan en el punto (2,3) y que al resolver el sistema de ecuaciones la respuesta es la misma.

Las coordenadas del punto de intersección de dos rectas son la solución del sistema de ecuaciones de ambas rectas.

Ejercicio 3.9 Encuentre el punto de intersección de ambas rectas, forme un sistema de ecuaciones y resuelvalo.

a) $2x - y = 4$ b) $-3x + y = 1$

137

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Indicador de logro

Encuentre el punto de intersección de ambas rectas, forme un sistema de ecuaciones y resuelva.

a) $2x - y = 4$ b) $-3x + y = 1$

1. Encontrar el punto donde se intersecan dos rectas.

Ejemplo 3.10

(25 min)

* Observar que las dos rectas se intersecan en un solo punto, ¿cuál es ese punto en que se intersecan las dos rectas?
* Concluir que ambas rectas se intersecan en el punto (2, 3) y es la solución común de ambas ecuaciones de la recta.
* Aclarar que hay otra manera de encontrar el punto donde se intersecan ambas rectas y esa manera es formando un sistema y resolverlo.
* Indicar que en este ejemplo es fácil de encontrar el punto donde se intersecan las dos rectas y su punto es (2, 3).
* Concluir que el punto de intersección de las rectas de las ecuaciones es también solución al sistema formado por ellas.

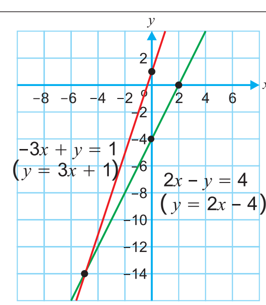
2. Resolver Ejercicio 3.9 (20 min)

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \text{............} & (1) \\ -3x + y = 1 \text{..........} & (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2x - y = 4 \\ +)\ -3x + y = 1 \\ \hline -x \quad = 5 \\ x \quad = -5 \end{array}$$

$2(-5) - y = 4$
$-10 - y = 4$
$-y = 14$
$y = -14$

Respuesta: (-5, -14)



Indicador de logro

Resolver **Ejercicio 3.10** del LE.

1. Encontrar el punto de intersección de dos rectas dadas sus ecuaciones.

Ejemplo 3.11

(15 min)

* Dibujar las dos rectas, ¿puede encontrar a simple vista el punto donde se intersecan?

¿De que otra manera se pueden encontrar el punto de intersección de las dos rectas?

Resolviendo el sistema concluimos que $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ es el punto de intersección .

2. Resolver Ejercicio 3.10

(15 min)

Solución

$$\begin{cases} 8x - 2y = -3 \ldots\ldots (1) \\ 4x + 4y = 11 \ldots\ldots (2) \rightarrow \times(-2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 8x - 2y = -3 \\ +)\ -8x - 8y = -22 \\ \hline -10y = -25 \\ y = \frac{5}{2} \end{array}$$

$8x - 2\left(\frac{5}{2}\right) = -3$

$8x - 5 = -3$

$8x = 2$

$x = \frac{1}{4}$

Respuesta: El punto $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right)$

3. Resolver Ejercicio 3.11

(15 min)

Solución

a) $$\begin{cases} 2x - 4y = 4 \ldots\ldots (1) \rightarrow \times 2 \\ 3x + 8y = -1 \ldots (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 4x - 8y = 8 \\ +)\ 3x + 8y = -1 \\ \hline 7x \quad = 7 \\ x \quad = 1 \end{array}$$

$2(1) - 4y = 4$

$-4y = 4 - 2$

$y = -\frac{1}{2}$

Respuesta: El punto $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$

Unidad 6: Funciones de primer grado

Lección 3: (6/8) Solución gráfica de un sistema de ecuaciones de primer grado

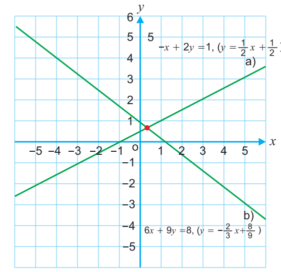
Sección 3: Solución gráfica de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Objetivo: Encontrar las coordenadas del punto de intersección de dos rectas.

Ejemplo 3.11

Dadas las gráficas de las siguientes ecuaciones encuentre el punto donde se intersecan ambas rectas.

a) $-x + 2y = 1$ b) $6x + 9y = 8$



Solución:

Observando las dos gráficas vemos que se nos hace difícil encontrar el punto donde se intersecan las dos rectas.

Formando con ellas un sistema de ecuaciones, podemos encontrar fácilmente el punto donde se intersecan ambas rectas.

$$\begin{cases} -x + 2y = 1 \quad (1) \\ 6x + 9y = 8 \quad (2) \end{cases}$$

Para resolver el sistema vamos a multiplicar (1) × 6 y luego sumamos las ecuaciones

$$\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 6x + 9y = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} (1) \times 6 \\ (2) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} -6x + 12y = 6 \\ +)\ 6x + 9y = 8 \\ \hline 21y = 14 \end{array} \rightarrow y = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

Para encontrar el valor de x sustituimos $y = \frac{2}{3}$ en (1) y obtenemos

$-x + 2y = 1$

$-x + 2\left(\frac{2}{3}\right) = 1$

$-x + \frac{4}{3} = 1$

$-x = 1 - \frac{4}{3}$

$x = \frac{1}{3}$

Con solo observar las gráficas, no siempre se puede determinar el punto de intersección exactamente. Por lo que en este caso, sí es necesario resolver el sistema de ecuaciones de primer grado.

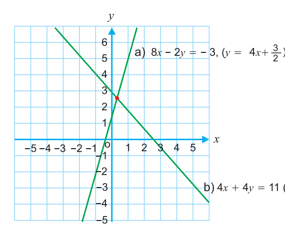
Respuesta: El punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Ejercicio 3.10

Dadas las gráficas de las siguientes ecuaciones encuentre el punto donde se intersecan ambas rectas.

a) $8x - 2y = -3$

b) $4x + 4y = 11$



Ejercicio 3.11 Determine el punto de intersección de las rectas cuyas ecuaciones están dadas en los sistemas.

a) $\begin{cases} 2x - 4y = 4 \\ 3x + 8y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = -3 \\ 6x + 2y = 2 \end{cases}$

138 Unidad 6 - Funciones de primer grado

b) $$\begin{cases} 3x - y = -3 \ldots\ldots (1) \rightarrow \times 2 \\ 6x + 2y = 2 \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 6x - 2y = -6 \\ +)\ 6x + 2y = 2 \\ \hline 12x \quad = -4 \\ x \quad = -\frac{1}{3} \end{array}$$

$3\left(-\frac{1}{3}\right) - y = -3$

$-1 - y = -3$

$-y = -3 + 1$

$y = 2$

Respuesta: El punto $\left(-\frac{1}{3}, 2\right)$

Unidad 6: Funciones de primer grado

Lección 3: (7/8) Solución gráfica de un sistema de ecuaciones de primer grado

Sección 3: Solución gráfica de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Objetivo: Determinar si un sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones o no tiene solución.

Anteriormente se aprendió que la solución de un sistema de dos ecuaciones es el punto donde se intersecan las gráficas de ellas.
Ahora observe qué sucede en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.12

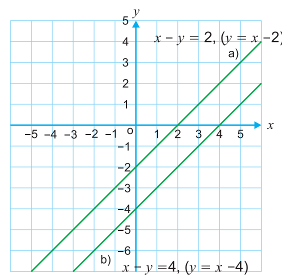
Dada las siguientes gráficas de ambas ecuaciones, encuentre las coordenadas del punto donde se intersecan las siguientes rectas.

a) $x - y = 2$ b) $x - y = 4$

Solución:

Si observa las gráficas de ambas ecuaciones, estas no tienen un punto en común, por más que se prolonguen nunca se van a intersecar en un punto.
Por lo tanto, se puede asumir que son paralelas.

Respuesta
No hay ningún punto donde se intersequen ambas rectas.



En la clase anterior se explicó otra manera para encontrar el punto donde se intersecan ambas rectas.

Resolviendo un sistema de ecuaciones puede encontrar el punto donde se intersecan ambas rectas.

$$\begin{cases} x - y = 2 & (1) \\ x - y = 4 & (2) \end{cases}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones vamos a multiplicar ecuación (2) por − 1 y luego sumamos las ecuaciones.

$$\begin{cases} x - y = 2 & (1) \\ x - y = 4 & (2) \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} (1) \\ (2) \times (-1) \end{matrix} \rightarrow \begin{array}{r} x - y = 2 \\ +) -x + y = -4 \\ \hline 0 \neq -2 \end{array}$$

Observe que no se cumple, es decir, el sistema no tiene solución.

Cuando las dos rectas no tienen punto de intersección, se puede concluir que el sistema de ecuaciones formado por ellas **no tiene solución**.

Ejercicio 3.12 Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x + 4y = 5 \\ 4x + 16y = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 2y = 5 \\ x - y = 7 \end{cases}$

Indicador de logro

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - 2y = 5 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

1. Caracterizar un sistema que no tiene solución.

Ejemplo 3.12

(15 min)

¿Qué observan en ambas rectas?, ¿hay algún punto donde se intersecan ambas rectas?

* Comprobar resolviendo el sistema.
* Concluir que cuando se tiene este tipo de resultado el sistema no tiene solución.

2. Resolver Ejercicio 3.12

(10 min)

Solución

a) $0 \neq -11$; el sistema no tiene solución.

b) $0 \neq -9$; el sistema no tiene solución.

Ejercicios adicionales

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 3y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 5 \end{cases}$

Solución

a) $0 \neq -11$, el sistema no tiene solución.

b) $0 \neq 3$, el sistema no tiene solución.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - 2y = 5 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

3. Caracterizar un sistema con infinitas soluciones.

Ejemplo **3.13**

(10 min)

¿Qué observan en ambas rectas?, ¿hay algún punto donde se intersecan ambas rectas?

* Concluir que cuando se resuelve un sistema de ecuaciones lineales y se obtiene este tipo de resultado 0 = 0 el sistema tiene infinitas soluciones.

4. Resolver *Ejercicio* **3.13**

(10 min)

Solución

a) 0 = 0 el sistema tiene infinitas soluciones.

b) 0 = 0 el sistema tiene infinitas soluciones.

c) 0 = 0 el sistema tiene infinitas soluciones.

Unidad 6: Funciones de primer grado

Lección 3: (7/8) Solución gráfica de un sistema de ecuaciones de primer grado

Sección 3: Solución gráfica de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

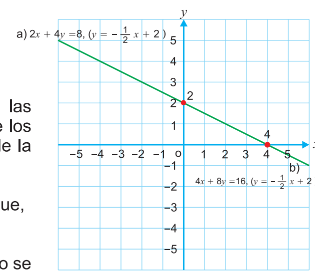
Objetivo: Determinar si un sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones o no tiene solución.

Un sistema de ecuaciones puede tener una solución o ninguna solución, ahora observemos lo que pasa en el siguiente ejemplo.

Ejemplo **3.13**

Trace las gráficas de las siguientes ecuaciones, encuentre el punto donde se intersecan ambas rectas.

a) $2x + 4y = 8$ b) $4x + 8y = 16$



Solución:

Si observa la gráfica de ambas ecuaciones las rectas a) y b) son idénticas, esto significa que los puntos de una de las rectas son los puntos de la otra.

Respuesta: Las dos rectas coinciden, por lo que, hay infinitas intersecciones.

Para resolver el sistema de ecuaciones primero se multiplica la ecuación ① por −2 y luego se suman las ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ 4x + 8y = 16 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} ① \times(-2) \\ ② \end{matrix} \rightarrow \begin{array}{r} -4x - 8y = -16 \\ +)\ 4x + 8y = 16 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

Observe que la igualdad se cumple. Dividiendo la ecuación ① y ② entre 2 y 4 respectivamente se obtiene la misma ecuación $x + 2y = 4$. Por lo tanto, las soluciones de una son las de la otra. Entonces tiene infinitas soluciones.

Cuando dos ecuaciones se reducen a la misma, las soluciones de la ecuación ① coinciden con las de la ecuación ② así que se puede concluir que el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones.

Ejercicio **3.13** ¿Cuántas soluciones tienen los siguientes sistemas de ecuaciones?

a) $\begin{cases} -x - 2y = 3 \\ -3x - 6y = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 9x + 3y = 27 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = -6 \\ -x + y = 6 \end{cases}$

140

Unidad 6 - Funciones de primer grado

Ejercicios adicionales

Resuelva $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases}$ y responda que tipo de solución tiene

Solución

0 = 0 tiene infinitas soluciones.

Unidad 6: Funciones de primer grado

Lección 3: (8/8) Solución gráfica de un sistema de ecuaciones de primer grado

Sección 3: Solución gráfica de sistemas de dos ecuaciones de primer grado en dos variables

Objetivo: Determinar si un sistema de ecuaciones tiene solución o no.

Ejemplo 3.14

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 2x + 6y = 2 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 4y = 14 \\ x - 5y = -8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x + 2y = 5 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases}$

Solución:

a) $\begin{cases} 2x + 6y = 2 & ① \\ x + 3y = 1 & ② \end{cases}$

Para resolver el sistema de ecuaciones se multiplica ② × (−2) y luego se suman ambas ecuaciones.

$\begin{cases} 2x + 6y = 2 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} ① \\ ② \times (-2) \end{matrix} \rightarrow \begin{array}{r} 2x + 6y = 2 \\ +)\ -2x - 6y = -2 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$

Es decir ① y ② × (−2) coinciden.

Respuesta: El sistema tiene infinitas soluciones.

b) $\begin{cases} 3x + 4y = 14 & ① \\ x - 5y = -8 & ② \end{cases}$

Para resolverlo multiplicamos ② × (−3) y luego sumamos las ecuaciones.

$\begin{cases} 3x + 4y = 14 \\ x - 5y = -8 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} ① \\ ② \times (-3) \end{matrix} \rightarrow \begin{array}{r} 3x + 4y = 14 \\ +)\ -3x + 15y = +24 \\ \hline 19y = 38 \\ y = 2 \end{array}$

Sustituyendo $y = 2$ en ①

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 14 \\ 3x + 4\ (2) &= 14 \\ 3x + 8 &= 14 \\ 3x &= 14 - 8 \\ 3x &= 6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Respuesta: La solución del sistema es $x = 2,\ y = 2$

c) $\begin{cases} -2x + 2y = 5 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases}$

Para resolver el sistema sumamos ambas ecuaciones.

$$\begin{array}{r} -2x + 2y = 5 \\ +)\ 2x - 2y = 3 \\ \hline 0 \neq 8 \end{array}$$

Respuesta: El sistema no tiene solución.

141

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Indicador de logro

Resuelva y clasifique el sistema de ecuaciones lineales en inconsistente, consistente y dependiente.

$\begin{cases} x - y = 6 \\ x + y = 4 \end{cases}$

1. Resolver en cada caso el sistema de ecuaciones.

Ejemplo 3.14

(20 min)

* Concluir que si al resolver el sistema se obtiene un expresión como 0 = 0 entonces el sistema tiene infinitas soluciones.
* Si al resolver se obtiene $0 \neq a$ entonces el sistema no tiene solución.
* Cero es igual a un número cualquiera, por ejemplo $(0 \neq 8)$ el sistema es inconsistente.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Resuelva y clasifique el sistema de ecuaciones lineales en inconsistente, consistente y dependiente.

$$\begin{cases} x - y = 6 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

2. Resolver Ejercicio 3.14

(20 min)

* Leer el LE y clasificar los sistemas de ecuación según el tipo de solución que tenga.

Solución

a) Consistente (solución es $x = 5$, $y = -1$)

b) Dependiente

c) Consistente (solución es $x = 3$, $y- = 1$)

d) Inconsistente

3. Resolver Ejercicio 3.15

(10 min)

Solución

a) Inconsistente

b) Consistente

c) Dependiente

d) Consistente

Ejercicios adicionales

Resuelva y clasifique el sistema en consistente, inconsistente o dependiente. $\begin{cases} 3x + 4y = 15 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

Solución

Consistente (solución es $x = 1$, $y = 3$)

Unidad 6: Funciones de primer grado

Lección 3: (8/8) Solución gráfica de un sistema de ecuaciones de primer grado

Sección 2: Gráfica de funciones de primer grado

Objetivo: Determinar si un sistema de ecuaciones tiene solución o no.

Un sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables es:

- **Inconsistente**: Si no tiene solución.
- **Consistente:** Si tiene exactamente una solución.
- **Dependiente**: Si tiene infinitas soluciones.

Ejercicio 3.14 Resuelva y clasifique los siguientes sistemas de ecuaciones en inconsistente, consistente y dependiente.

a) $\begin{cases} x - y = 6 \\ x + y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 8y = 4 \\ x - 4y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 3y = 3 \\ -x - y = 4 \end{cases}$

Ejercicio 3.15

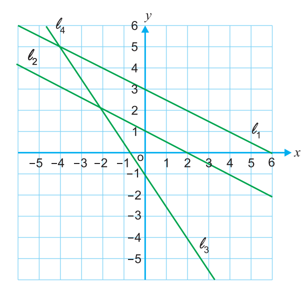
Clasifique en consistente, inconsistente y dependiente los siguientes sistemas de dos ecuaciones de primer grado determinados por el par de rectas dadas.

a) ℓ_1 y ℓ_2

b) ℓ_2 y ℓ_4

c) ℓ_3 y ℓ_4

d) ℓ_1 y ℓ_3



Unidad 6: Funciones de primer grado

Lección 4: (1/3) Aplicación de las funciones de primer grado

Sección 1: Datos experimentales

Objetivo: Resolver problemas sobre datos experimentales utilizando las funciones de primer grado.

Lección 4: Aplicación de las funciones de primer grado

Sección 1: Datos experimentales

Ejemplo 4.1

La siguiente tabla muestra el cambio de la temperatura cuando se calienta el agua.

a) Ubique los puntos que corresponden a los datos de la tabla.

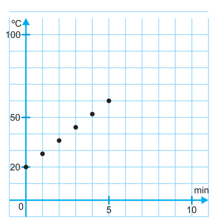
b) ¿Cuánto será la temperatura en el momento $x = 10$ (min)?

x (min)	0	1	2	3	4	5	…	10
y (ºC)	20	28	36	44	52	60	…	

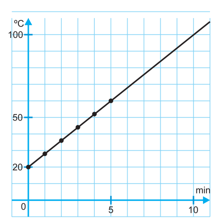
c) Si se supone que los valores de x y y están en la recta que une los puntos (0, 20) y (10, 100), ¿cuál sería la ecuación que representa la relación y en término de x?

Solución:

a) Observe que para ubicar los puntos se debe identificar las coordenadas x y y. Ejemplo: (0, 20), (1, 28)



b) Como los puntos están ubicados en una recta, se puede hacer uso de la gráfica y determinar el valor.



Respuesta: 100 ºC

c) Como la ordenada al origen es 20 y la pendiente es:

$$\frac{\textbf{Cambio en } y}{\textbf{Cambio en } x} = \frac{100-20}{10-0} = \frac{80}{10} = 8$$

Respuesta: $y = 8x + 20$

La relación entre la temperatura del agua al calentarse y el tiempo es una función de primer grado. En el Ejemplo 4.1.

Ejercicio 4.1 La relación que existe entre la distancia recorrida y el tiempo de una persona que camina a 10 km por hora está representada por $y = 10x$, si x representa el tiempo en horas, y y la distancia recorrida en km.

a) Trace la gráfica que relaciona la distancia recorrida y (km) con el tiempo x (horas).

b) ¿Cuántos km recorre al transcurrir 3 horas?

143

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Indicador de logro

La relación que existe entre la distancia recorrida y el tiempo de una persona que camina a una a 10 km por hora está representada por $y = 10x$, si x representa el tiempo y y la distancia recorrida.

a) Trace la gráfica que relación la distancia recorrida y (km) con el tiempo x (horas).

b) ¿Cuántos km recorre al transcurrir 3 horas?

1. Resolver un problema sobre datos experimentales.

Ejemplo 4.1

(25 min)

* Interpretar los datos de la tabla.
* Ubicar los puntos en un sistema de coordenadas, en el eje y use escala de 10.
* Observando la recta cuando $x = 10$, ¿a cuánto asciende la temperatura?
* Si tomamos dos puntos (0, 20) y (10, 100), ¿cuál es su pendiente?, recuerde la razón de cambio.

  $\frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}$, si se avanza 10 unidades a la derecha, avanza 80 unidades hacia arriba.

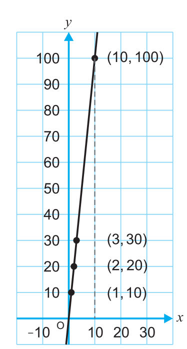
  ¿Cuál es la ecuación que representa la gráfica?

2. Resolver Ejercicio 4.1

(20 min)

Solución

a)



b) 30 km

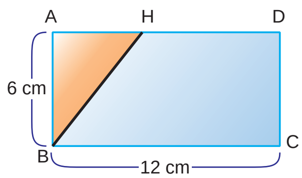
Indicador de logro

En la figura se muestra el rectángulo ABCD. Los lados AB y BC , miden 6 y 12 cm respectivamente.

El punto H avanza en el lado AD desde el punto A hacia el punto D a la velocidad de 3 cm por segundo.

a) Exprese la distancia AH después de x segundos que H salió de A.

b) Si el área del cuadrilátero HBCD es y cm², exprese el área y en términos del tiempo x.

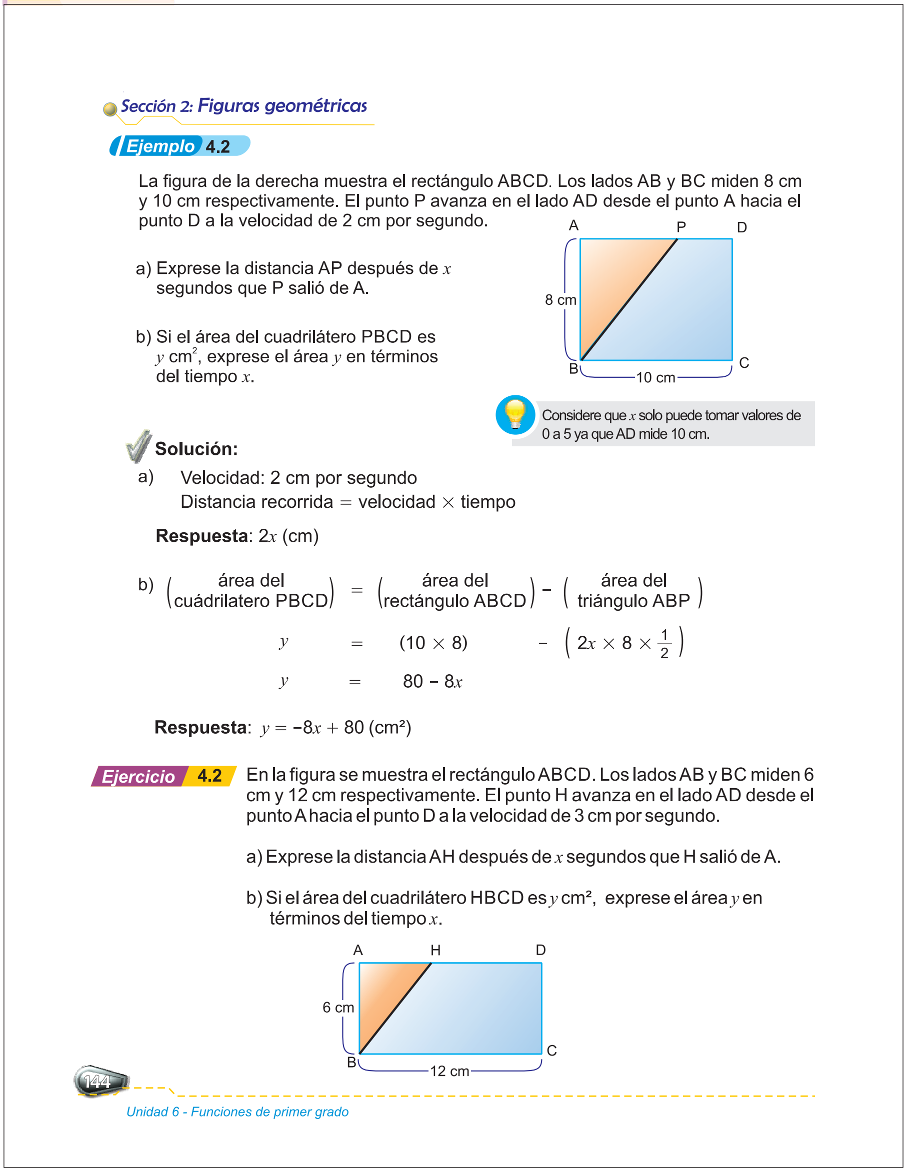


Unidad 6: Funciones de primer grado

Lección 4: (2/3) Aplicación de las funciones de primer grado

Sección 2: Figuras geométricas

Objetivo: Resolver problemas de geometría utilizando la función de primer grado.



Sección 2: Figuras geométricas

Ejemplo 4.2

La figura de la derecha muestra el rectángulo ABCD. Los lados AB y BC miden 8 cm y 10 cm respectivamente. El punto P avanza en el lado AD desde el punto A hacia el punto D a la velocidad de 2 cm por segundo.

a) Exprese la distancia AP después de x segundos que P salió de A.

b) Si el área del cuadrilátero PBCD es y cm², exprese el área y en términos del tiempo x.

A P D, 8 cm, B C, 10 cm

Considere que x solo puede tomar valores de 0 a 5 ya que AD mide 10 cm.

Solución:

a) Velocidad: 2 cm por segundo
Distancia recorrida = velocidad × tiempo

Respuesta: $2x$ (cm)

b) (área del cuadrilátero PBCD) = (área del rectángulo ABCD) − (área del triángulo ABP)

$y = (10 \times 8) - \left(2x \times 8 \times \frac{1}{2}\right)$

$y = 80 - 8x$

Respuesta: $y = -8x + 80$ (cm²)

Ejercicio 4.2 En la figura se muestra el rectángulo ABCD. Los lados AB y BC miden 6 cm y 12 cm respectivamente. El punto H avanza en el lado AD desde el punto A hacia el punto D a la velocidad de 3 cm por segundo.

a) Exprese la distancia AH después de x segundos que H salió de A.

b) Si el área del cuadrilátero HBCD es y cm², exprese el área y en términos del tiempo x.

A H D, 6 cm, B C, 12 cm

144 Unidad 6 - Funciones de primer grado

1. Resolver un problema de geometría utilizando la función de primer grado.

Ejemplo 4.2

(25 min)

* Imaginar que el punto P avanza desde A hacia D sin moverse el punto B.

¿A qué velocidad se mueve el punto P?, ¿a qué es igual la distancia recorrida?

¿A qué es igual la distancia recorrida AP después de x segundos que P salió de A? ¿Qué figura forman los puntos A, B, P?

¿Cómo puede encontrar el área del cuadrilátero PBCD?

¿Cuál es el área del rectángulo ABCD?

* Hacer notar que las medidas de la base y de la altura del triángulo son $2x$ y 8 respectivamente.

¿Qué puede concluir?

* Concluir que el área del cuadrilátero es la diferencia del área del rectángulo ABCD y el triángulo BAP entonces $y = -8x + 80$

2. Resolver Ejercicio 4.2

(20 min)

Solución

a) Distancia de AH después de x segundos $3x$ (cm)

Respuesta: $3x$ (cm)

b) y = (área de ABCD) - (área de ΔABH)

$y = (12 \times 6) - (\frac{1}{2} \times 3x \times 6)$

$y = -9x + 72$

Respuesta: $y = -9x + 72$ (cm²)

Unidad 6: **Funciones de primer grado**

Lección 4: (3/3) Aplicación de las funciones de primer grado

Sección 3: Utilización de las gráficas

Objetivo: Resolver problemas sobre ecuaciones de primer grado utilizando gráficas.

Sección 3: Utilización de las gráficas

Ejemplo 4.3

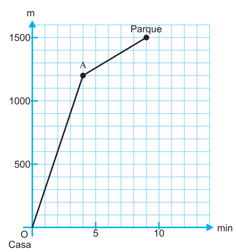
Juan salió de su casa hacia el parque que se encuentra a 1500 m de su casa. De la casa hasta el punto A viajó en bicicleta y de A hasta el parque caminó x (minutos). La gráfica de abajo muestra la distancia recorrida y en metros desde la salida de la casa cuando han transcurrido x (minutos).

a) Exprese la relación entre x y y cuando x tiene los valores de 0 a 4.

b) ¿A qué velocidad viajó en bicicleta?

c) Exprese la relación entre x y y cuando x tiene los valores 4 a 9.

d) ¿A qué velocidad caminó del punto A al parque?



Solución:

a) Observe que la ecuación de la recta OA tiene la forma $y = ax$, ya que el intercepto en y es 0.

Si sustituimos $x = 4$ y $y = 1200$ en $y = ax$ se obtiene que

$$y = ax$$
$$1200 = a(4)$$
$$4a = 1200$$
$$a = 300$$

Respuesta: La relación entre x y y está dada por $y = 300x$ cuando x va de 0 a 4.

b) De la relación $y = 300x$, sabemos que en 1 minuto avanza 300 m.

Respuesta: velocidad en bicicleta es 300 m por minuto.

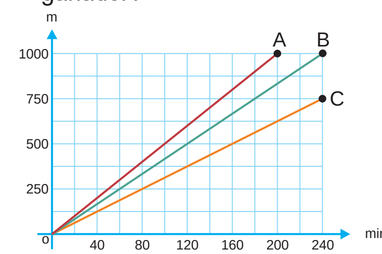
Indicador de logro

Tres alumnos, A, B y C participan en una carrera de 1000 m. La gráfica muestra de forma aproximada su comportamiento en la carrera.

a) ¿Quién fue el ganador de la carrera?

b) ¿Cuál es la pendiente del ganador de la carrera?

c) ¿Cuál fue la velocidad del jugador ganador?



1. Resolver problemas de ecuaciones de primer grado utilizando gráficas.

Ejemplo 4.3

(20 min)

* Identificar el punto A, ¿cuáles son sus coordenadas?, ¿cuál es el intercepto en y de la recta OA?
* Indicar que la recta OA es de la forma $y = ax$.
* Usar el punto A para encontrar la pendiente.
* Escribir la ecuación $y = 300x$.
* Cuándo x va de 0 a 4, ¿cuál es la relación entre x y y?
* Recordar que distancia recorrida = velocidad x tiempo y teniendo en cuenta que la relación $y = 300x$, si $x = 1$ minuto, ¿cuál es la distancia recorrida de la bicicleta en 1 minuto?

continúa en la siguiente página...

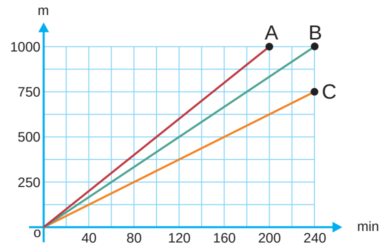
Indicador de logro

Tres alumnos, A, B y C participan en una carrera de 1000 m. La gráfica muestra de forma aproximada su comportamiento en la carrera.

a) ¿Quién fue el ganador de la carrera?

b) ¿Cuál es la pendiente del ganador de la carrera?

c) ¿Cuál fue la velocidad del jugador ganador?



¿Cuáles son las coordenadas del punto de ubicación del parque?

* Indicar que con los puntos (4, 1200) y (9, 1500) se determina la pendiente de la recta desde el punto A al punto de ubicación del parque.

* Concluir que la forma de la ecuación es $y = 60x + b$, ¿cómo puede encontrar el valor de b?

2. Resolver *Ejercicio* **4.3**

(25 min)

Solución

a) Estudiante A

b) $\dfrac{1000 - 0}{200 - 0} = \dfrac{1000}{200} = 5$

c) 5 m por minuto

Unidad 6: **Funciones de primer grado**

Lección 4: (3/3) Aplicación de las funciones de primer grado

Sección 3: Utilización de las gráficas

Objetivo: Resolver problemas sobre ecuaciones de primer grado utilizando gráficas.

c) La ecuación de la recta del punto A hasta el parque tiene la forma $y = ax + b$, sabemos que la recta pasa por los puntos (4, 1200) y (9, 1500),

la pendiente $a = \dfrac{1500 - 1200}{9 - 4} = \dfrac{300}{5} = 60$, la ecuación buscada es de la forma $y = 60x + b$.

Como la recta pasa por (4, 1200), sustituyendo $x = 4$ y $y = 1200$ en $y = 60x + b$ obtenemos

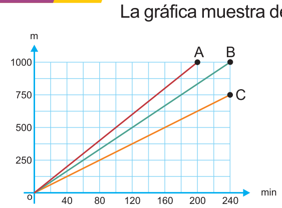
$$\begin{aligned} y &= 60x + b \\ 1200 &= 60\,(4) + b \\ 1200 &= 240 + b \\ b &= 960 \end{aligned}$$

Respuesta: La relación entre x y y está dada por $y = 60x + 960$ cuando x va de 4 a 9.

d) De la relación $y = 60x + 960$ se sabe que en 1 minuto avanza 60 m.

Respuesta: 60 m por minuto.

Ejercicio **4.3** Tres estudiantes, nombrados A, B y C, participan en una carrera de 1000 m. La gráfica muestra de forma aproximada su comportamiento en la carrera.



Conteste.

a) ¿Quién fue el ganador de la carrera?

b) ¿Cuál es la pendiente de la recta que representa al ganador de la carrera en la gráfica?

c) ¿Cuál fue la velocidad del jugador ganador?

Unidad 6: Funciones de primer grado

(1/2) Ejercicios de la unidad

Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre las funciones de primer grado en dos variables.

Ejercicios

1 Las siguientes tablas muestran la relación entre x y y. Exprese el valor de y en términos de x.

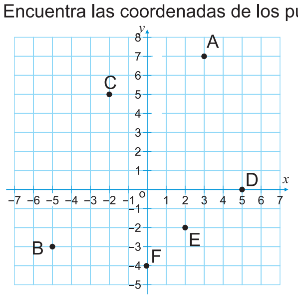
a)

x	0	1	2	3	4	5
y	0	7	14	21	28	35

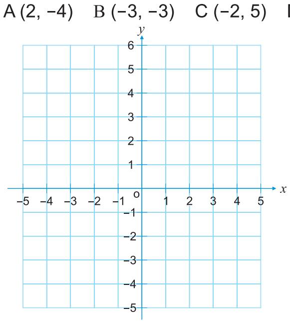
b)

x	0	1	2	3	4	5
y	12	16	20	24	28	32

2 Encuentra las coordenadas de los puntos A, B, C, D, E, F.



3 Ubique los siguientes puntos en el sistema de coordenadas.
A (2, −4) B (−3, −3) C (−2, 5) D (4, 6) E (0, 3) F (5, 0)



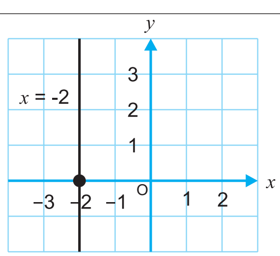
4 Grafique las siguientes funciones de primer grado en un sistema de coordenadas.

a) $y = 3x - 3$ b) $y = -x + 4$ c) $x = -2$ d) $y = -3$

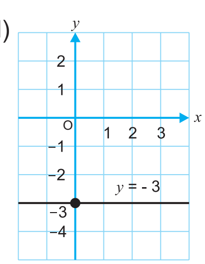
147

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

c)



d)



1 Expresión de la relación de y en términos de x.

Solución

a) $y = 7x$ b) $y = 4x + 12$

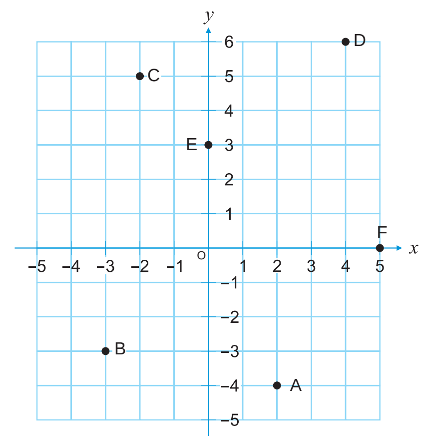
2 Sistema de coordenadas.

Solución

A (3, 7) B (-5, -3) C (-2, 5)
D (5, 0) E (2, -2) F (0, -4)

3 Ubicar puntos en el sistema de coordenadas.

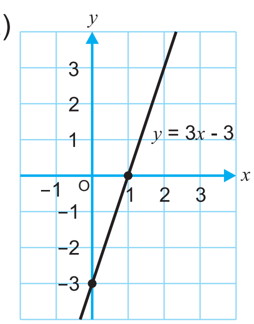
Solución



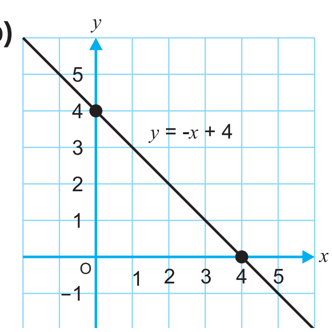
4 Graficar funciones de primer grado en un sistema de coordenadas.

Solución

a)



b)



5 **Determinar la función de primer grado dada su gráfica.**

Solución

a) y = -3x -2 b) $y = -\frac{4}{5}x - 4$

6 **Determinar la función de primer grado.**

Solución

y = -3x + 7

7 **Determinar funciones de primer grado dado dos puntos de sus gráficas.**

Solución

a) y = 5x - 3 b) $y = \frac{2}{3}x + 5$

8 **Determinar una recta paralela a otra dada que pase por un punto.**

Solución

y = 3x - 8 recta paralela

9 **Determinar una recta perpendicular a otra dada que pase por un punto.**

Solución

$y = -\frac{1}{3}x + b$

$1 = -\frac{1}{3}(3) + b$

$1 = -1 + b$

$b = 2$

Respuesta: $y = -\frac{1}{3}x + 2$

10 **Encontrar los interceptos en x y y de una ecuación de primer grado en dos variables.**

Solución

a) Interceptos: (1, 0) y (0, 1)

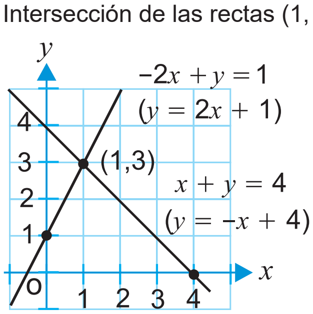
b) Interceptos: (-4, 0) y (0, 1)

c) Interceptos: (3, 0) y (0, -3)

11 **Resolver el sistema y trazar su gráfica.**

$$\begin{cases} -2x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Intersección de las rectas (1, 3)

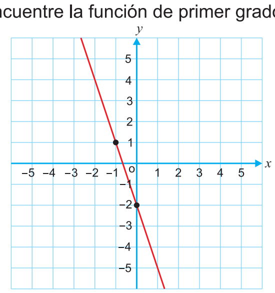


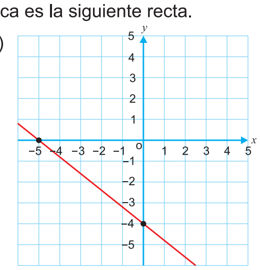
Unidad 6: Funciones de primer grado

(2/2) Ejercicios de la unidad

Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre las funciones de primer grado en dos variables.

5 Encuentre la función de primer grado cuya gráfica es la siguiente recta.

a) 

b) 

6 Encuentre la función de primer grado cuya gráfica pasa por el punto (4, −5) y su pendiente es −3.

7 Encuentre la función de primer grado cuya gráfica pasa por los puntos:

a) (1, 2) y (2, 7) b) (3, 7) y (−6, 1)

8 Encuentre la función de primer grado cuya gráfica es paralela a la recta $y = 3x - 2$ y pasa por el punto (3, 1).

9 Encuentre la función de primer grado cuya gráfica es perpendicular a la recta $y = 3x - 2$ y pasa por el punto (3, 1).

10 Encuentre los interceptos en x y y de las siguientes rectas.

a) $x + y = 1$ b) $4y - x = 4$ c) $x - y = 3$

11 Resuelva el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -2x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$ y luego trace su gráfica.

12 Clasifique en consistentes, inconsistentes y dependientes los siguientes sistemas de dos ecuaciones de primer grado determinadas por el par de rectas dadas.

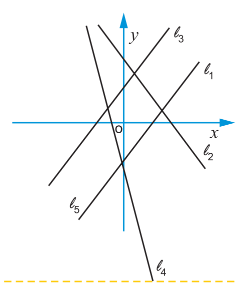
a) ℓ_1 y ℓ_3

b) ℓ_4 y ℓ_5

c) ℓ_1 y ℓ_5

d) ℓ_2 y ℓ_3

e) ℓ_2 y ℓ_4



148 Unidad 6 - Funciones de primer grado

12 **Clasificar los pares de rectas como solución de un sistema.**

Solución

a) Inconsistente b) Consistente

c) Dependiente d) Consistente

e) Consistente

Unidad 7

Manera de contar

Lección 1: Manera de contar

Unidad 7

Manera de contar

(8 horas)

1 Expectativas de logro

- Desarrollan el concepto en forma intuitiva de la probabilidad de eventos iguales, eventos más o menos probables, eventos seguros e imposibles, en situaciones del entorno.

2 Relación y desarrollo

Séptimo grado

Gráficas de faja y circulares

- Gráficas de faja
- Construcción de gráficas de faja con porcentaje
- Gráficas circulares
- Relación de porcentaje y ángulo central de gráficas circulares
- Análisis de tabla conociendo el porcentaje

Octavo grado

Manera de contar

- Principio de la suma
- Principio del producto

Probabilidad

- Relación entre razón y probabilidad
- Fórmula de la probabilidad
- Propiedades de la probabilidad
- Construcción de tablas y diagramas de árbol
- Relación entre la probabilidad de ocurrir y de no ocurrir un evento
- Probabilidad donde los eventos AB y BA son los mismos
- Aplicación de la probabilidad

Noveno grado

Organización y presentación de datos

- Tabla de frecuencia
- Histograma
- Polígono de frecuencia
- Frecuencia relativa
- Moda
- Media
- Mediana

3 Plan de estudio (8 horas)

Lección	Distribución de horas	Contenidos
1. Manera de contar (6 horas)	1/6	• Cantidad de maneras de ocurrencia de 2 casos aplicando el principio de la suma
	2/6	• Cantidad de maneras de ocurrencia de 2 casos por medio de una tabla (Principio del producto)
	3/6	• Cantidad de maneras de ocurrencia de 2 casos por medio de un diagrama de árbol (Principio del producto)
	4/6	• Cantidad de maneras de ocurrencia de 2 casos aplicando el principio del producto
	5/6	• Cantidad de maneras de ocurrencia de 2 o 3 casos aplicando el principio del producto
	6/6	• Posibles combinaciones de 2 casos cuando el caso AB es el mismo que BA
Ejercicios (2 horas)	1~2/2	

4 Puntos de lección

Análisis de las pruebas diagnósticas 2016 - 2017

Manera de contar

En general a los estudiantes no se les enseña la unidad “Manera de contar”, lo mismo sucede con la unidad de “Probabilidad”. Los docentes tampoco desarrollan los contenidos de estas unidades. Este libro está manejando las preguntas no complicadas para comprender los conocimientos básicos importantes.

Los ejemplos de los resultados son los siguientes:

[Pregunta]

Hay tres estudiantes y cuatro sillas, ¿de cuántas maneras los estudiantes pueden elegir su silla?

Institutos: 1% CEB: 0% (2017)

A propósito, ¿puede contestar correctamente este problema? Piense un rato, por favor.

¿Cuál es su respuesta? ¿Es 4, 7, 9, 12, 16 o 24?

La respuesta correcta es 24.

Recomendamos a los docentes que lean los contenidos y resuelvan los ejemplos y ejercicios antes de enseñar a los estudiantes.

Lección 1: Manera de contar

En esta lección se trata de contar el número de casos que ocurren como resultado de un ensayo o el número de maneras en las que se pueda hacer un ensayo. Ejemplo:

a) Al lanzar un dado encontrar el número de casos posibles de obtener los números menores que 3 o mayores que 3.

b) Encontrar la cantidad total de colocaciones cuando se van a fotografiar 4 estudiantes uno a la par del otro.

Para este tipo de conteo hay 2 principios: el principio de la suma y el principio del producto.

Principio de la suma

Si un evento o suceso ocurre de m formas y un segundo evento puede ocurrir de n formas y no es posible realizar ambos eventos de manera simultánea, entonces cualquiera de ellos se puede ocurrir de $m + n$ formas. Cuando esto sucede se le llama principio de la suma.

En el principio de la suma los dos eventos no pueden realizarse al mismo tiempo, es decir, que son eventos independientes, razón por la cual hay $m + n$ formas de realizar uno u otro evento.

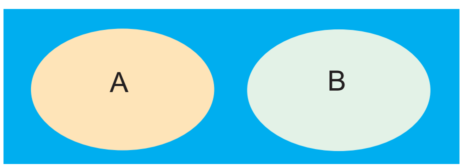
Cuando hay dos casos que no ocurren al mismo tiempo, el número de maneras de la ocurrencia de alguno de ellos es la suma del número de casos de estos. Cuando hay más de dos casos que no ocurren al mismo tiempo, también se pueden sumar los números de casos.

En el ejemplo a), al lanzar un dado no sale un punto menor que 3 y al mismo tiempo un punto mayor que 3, por lo que el número de casos para que salgan puntos menores o mayores que 3 es la suma de la cantidad de casos que salga puntos menores que 3 (que son 2 casos, puntos 1 y 2) más la cantidad de casos que salgan puntos mayores que 3 (que son 3 casos, puntos 4, 5 y 6), es decir, el número de casos es 2 + 3 = 5, 5 casos.

Una relación más formal del principio de la suma dice que si hay dos conjuntos finitos y disjuntos entonces

|A U B| = |A| U |B|

donde |A| representa la cardinalidad del conjunto A, es decir, el número de elementos de A.



El principio de la suma se puede dar para 2 o más conjuntos.

Principio del producto

Si un ensayo puede ocurrir de m maneras y a cada manera le corresponden n formas, entonces el número total de casos que ocurra el ensayo se determina con $m \times n$. Cuando esto sucede se le llama principio del producto.

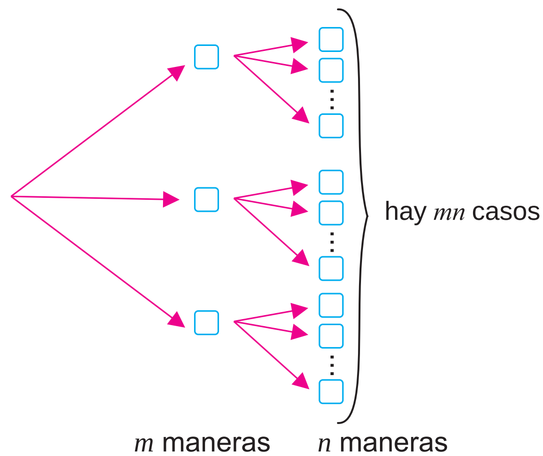
En el ejemplo b), se trata de encontrar la cantidad total de colocaciones cuando se van a fotografiar 4 estudiantes uno a la par del otro. Hay 4 lugares para ubicarse, por lo que el primer estudiante tiene 4 opciones para colocarse, una vez que se colocó el primer estudiante los demás solo tienen 3 opciones para ubicarse, ubicado el segundo estudiante los otros que quedan solo tienen 2 opciones, ubicado el tercer estudiante el último solo tiene una opción.

Entonces pensando en las opciones que cada uno tiene hay 4 x 3 x 2 x 1 = 24 maneras distintas de colocarse.

Para explicar el principio del producto se usan tablas o diagramas de árbol.

A \ B	1	2	...	n
1	.	.	...	.
2	.	.	...	.
...	...	...	...	...
m	.	.	...	$m \times n$

Hay mn intersecciones



La tabla se puede usar solo cuando a cada caso de A le corresponden los mismos casos de B.

Un diagrama de árbol es una manera de contar las combinaciones en forma ordenada. Cada una de las ramas muestra una combinación diferente.

Para que los estudiantes realicen bien los ejercicios relacionados con los principios de conteo es necesario que utilicen arreglos y esquemas adecuados para cada problema, las tablas y diagramas de árbol son buenas opciones.

Tema: Cantidad de maneras de ocurrencia de 2 casos por medio de una tabla 1

Ejemplo 1.4 2 **Pág.** 152 3

Se tiran dos dados, uno grande y otro pequeño. Encuentre el número de casos donde el número del dado pequeño es menor que 3 y el del dado grande es un número impar.

Solución 4

Casos del dado pequeño: 1 y 2
Casos del dado grande: 1, 3 y 5

Números del dado		Grande		
		1	3	5
Pequeño	1	(1, 1)	(1, 3)	(1, 5)
	2	(2, 1)	(2, 3)	(2, 5)

Los casos son
(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 3) y (2, 5).

(2, 5)

Número del dado pequeño

Número del dado grande

Respuesta: El número total de casos es 6. 4

Ejercicio 1.4 2 **Pág.** 152 3

Se tiran dos dados, uno grande y otro pequeño. Encuentre el número de casos donde el número del dado pequeño es mayor que 3 y el del dado grande es un número par.

Solución 4

Números del dado		Grande		
		2	4	6
Pequeño	4	(4, 2)	(4, 4)	(4, 6)
	5	(5, 2)	(5, 4)	(5, 6)
	6	(6, 2)	(6, 4)	(6, 6)

Los casos son:
(4, 2), (4, 4), (4,6), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 2), (6, 4) y (6, 6).

Respuesta: El número total de casos es 9. 4

Ejemplo 1.5 2 **Pág.** 153 3

Se dispone de los colores: azul, rojo, amarillo y verde para pintar las dos partes de la bandera con 2 colores diferentes.
¿De cuántas maneras se puede pintar?

Solución 4

Llene la siguiente tabla:

① \ ②	azul	rojo	amarillo	verde
azul				
rojo				
amarillo				
verde				

Respuesta: En total hay 12 maneras. 4

Para seguir con el ejercicio 1.5 se puede borrar la parte izquierda de la pizarra.

1 Al inicio de la clase escribir solo la palabra "**Tema**" y hasta el final de la clase (o en el desarrollo de la misma) escribir el contenido del tema.

2 Escribir el número del Ejemplo o Ejercicio.

3 Escribir el número de **Pág.** del LE para entender dónde se quedaron con respecto al tiempo.

4 Escribir la **Solución** y **Respuesta**.

5 En el problema planteado marcar los datos importantes para poder llegar a la respuesta.

6 Escribir la conclusión en un rectángulo de color rojo.

Marcar en el Ejercicio cuando la solución o la respuesta sean correctas.

Nota: Los puntos aquí explicados no siempre aplican todos en un plan de pizarra.

Indicador de logro

Encuentre el número de casos posibles de obtener los números menores que 3 o mayores que 3 en el lanzamiento de un dado.

1. Encontrar el número de casos posibles de obtener un número menor que 3 al lanzar un dado.

Ejemplo **1.1**

(10 min)

* Nombrar ensayo al lanzar un dado, lanzar una moneda, o escoger una carta de una baraja.

* Recordar los posibles casos que pueden obtenerse al lanzar un dado. Puede pedir que dibujen los 6 casos (caras del dado).

* Hacer énfasis en la condición de determinar el número de casos posibles de obtener los números menores que 3 en el lanzamiento del dado.

* Concluir que hay dos posibles casos ya que sólo el 1 y el 2 son menores que 3.

* Descartar los casos cuando salen los puntos 3, 4, 5 y 6 ya que éstos son mayores o igual que 3.

2. Resolver *Ejercicio* **1.1**

(5 min)

Solución

a) 3 casos posibles (4, 5, 6)

b) 3 casos posibles (2, 4, 6)

3. Encontrar el número de casos posibles de obtener un número menor que 3 o mayor que 3 al lanzar un dado.

Ejemplo **1.2**

(7 min)

* Recalcar que esta situación tiene dos condiciones y que hay que determinar el número de casos posibles para cada una de ellas.

Unidad 7: **Manera de contar**

Lección 1: (1/6) Manera de contar

Sección 1: Principio de la suma

Objetivo: Encontrar la cantidad de maneras de ocurrencia de 2 casos aplicando el principio de la suma.

Unidad 7

Manera de contar

Lección 1: Manera de contar

Sección 1: Principio de la suma

En esta lección se trata de contar el número de casos que ocurren como resultado de un ensayo o el número de maneras en las que se puede hacer un ensayo.

Ejemplo **1.1**

Encuentre el número de casos posibles de obtener los números menores que 3 en el lanzamiento de un dado.

Solución:
Los números que tiene el dado (puntos) son 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
Al lanzarlo solo existen los números 1 y 2 que son menores que 3.

2 casos posibles, porque 1 y 2 son menores que 3.

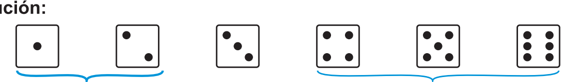
Respuesta: Hay 2 casos posibles.

Ejercicio **1.1** a) Encuentre el número de casos posibles de obtener los números mayores que 3 en el lanzamiento de un dado.
b) Encuentre el número de casos posibles de obtener los números pares en el lanzamiento de un dado.

Ejemplo **1.2**

Encuentre el número de casos posibles de obtener los números menores que 3 o mayores que 3 en el lanzamiento de un dado.

Solución:



2 casos posibles, porque 1 y 2 son menores que 3.

3 casos posibles, porque 4, 5 y 6 son mayores que 3.

Entonces, en total hay 5 casos posibles.
$2 + 3 = 5$

Al sumar los casos menores que 3 (que son 2) con los casos mayores que 3 (que son 3) nos da un total de 5 casos.

Respuesta: Hay 5 casos posibles.

150 Unidad 7 - Manera de contar

¿Cuántos casos posibles hay menores que 3?

¿Cuántos casos posibles hay mayores que 3?

¿Cuántos casos posibles hay para obtener los números menores que 3 y mayores que 3 al lanzar un dado?

* Concluir que hay 5 casos posibles.

* Concluir que cuando hay dos condiciones, el número de casos posibles resulta de la suma de los casos posibles de cada una de las condiciones.

continúa en la siguiente página...

Unidad 7: **Manera de contar**

Lección 1: (1/6) Manera de contar

Sección 1: Principio de la suma

Objetivo: Encontrar la cantidad de maneras de ocurrencia de 2 casos aplicando el principio de la suma.

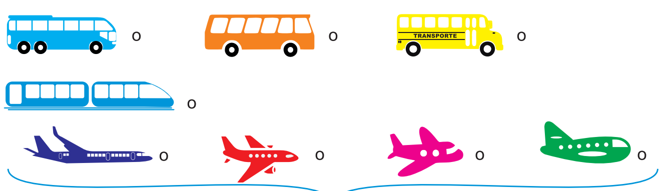
Cuando hay dos casos que no ocurren al mismo tiempo, el número de maneras de la ocurrencia de alguno de ellos es la suma del número de casos de estos.

Principio de suma
Si un evento o suceso ocurre de m formas y un segundo evento puede ocurrir de n formas y no es posible que ocurran ambos eventos de manera simultánea, entonces para realizar cualquiera de ellos puede utilizarse de $m + n$ formas.

Ejercicio 1.2 a) Encuentre el número de casos posibles de obtener los números menores que 4 o mayores que 5 en el lanzamiento de un dado.
b) Encuentre el número de casos posibles de obtener los números menores que 2 o mayores que 4 en el lanzamiento de un dado.

Ejemplo 1.3
¿Cuántas son las maneras de hacer un viaje a un sitio determinado si para poder realizar el viaje hay 3 empresas de autobuses, 1 de tren y 4 compañías de aviación?

Solución:



8 maneras para viajar

Como hay 3 empresas de autobuses, 1 empresa de tren y 4 compañías de aviación, entonces tenemos $3 + 1 + 4 = 8$ maneras diferentes de viajar.

Respuesta: Hay 8 maneras diferentes de realizar el viaje.

Cuando hay más de dos casos que no ocurren al mismo tiempo, también se pueden sumar los números de casos.

Ejercicio 1.3 ¿Cuántas son las maneras de hacer un viaje a un sitio determinado si para poder realizar el viaje hay 2 empresas de autobuses, 3 empresas de aviones y 4 empresas de barcos?

7. **Resolver** Ejercicio 1.3
(5 min)
Solución
9 maneras de viajar
$2 + 3 + 4 = 9$

Indicador de logro

Encuentre el número de casos posibles de obtener los números menores que 3 o mayores que 3 en el lanzamiento de un dado.

4. **Leer el resumen sobre el principio de suma.**
(3 min)
* Concluir que cuando hay dos casos que no ocurren al mismo tiempo, el número de maneras de la ocurrencia de algunos de ellos es la suma del número de casos de estos.
* Leer el resumen.

5. **Resolver** Ejercicio 1.2
(5 min)
Solución
a) 4 casos posibles
(1, 2, 3, 6)
b) 3 casos posibles
(1, 5, 6)

6. **Aplicar el principio de suma en un problema.**
Ejemplo 1.3
(10 min)
¿Cuáles son las maneras de viajar según las condiciones del problema?
¿Cuántas empresas de autobuses hay?
¿Cuántas empresas de tren hay?
¿Cuántas compañías de avión hay?
¿Cuántas maneras de viajar hay en total?
* Concluir que en este problema hay más de dos casos que no ocurren al mismo tiempo y que también en esta situación se aplica el principio de suma.
* Leer la explicación del LE.

Indicador de logro

Se lanzan dos dados, uno grande y otro pequeño. Encuentre el número de casos posibles donde el número del dado pequeño es menor que 3 y el del dado grande es un número impar.

Unidad 7: **Manera de contar**

Lección 1: (2/6) Manera de contar

Sección 2: Principio del producto

Objetivo: Encontrar la cantidad de maneras de ocurrencia de casos por medio de una tabla.

1. Encontrar la cantidad de maneras de ocurrencia de 2 casos.

Ejemplo **1.4**

(15 min)

* Leer el problema y comprender la situación de cada dado.

¿Cuál es el número de casos para el dado pequeño?

¿Cuál es el número de casos para el dado grande?

¿Cuál es el número de casos cuando se tiran los dos dados?

* Sugerir que elaboren una tabla y que determinen las parejas de números que se forman.

* Concluir que en las parejas que se forman, la primera componente corresponde al número del dado pequeño y la segunda al dado grande.

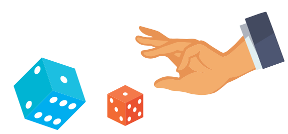
* Concluir que el número de casos en el lanzamiento de los dos dados es 6.

* Concluir que utilizando una tabla es fácil encontrar la cantidad de maneras de ocurrencia de dos casos.

Sección 2: Principio del producto

Ejemplo **1.4**

Se tiran dos dados, uno grande y otro pequeño. Encuentre el número de casos donde el número del dado pequeño es menor que 3 y el del grande es un número impar.



Solución:

Los casos se muestran a continuación:
Dado pequeño: 1, 2 (Números menores que 3)
Dado grande: 1, 3, 5 (Números impares)

Números del dado		Grande		
		1	3	5
Pequeño	1	(1, 1)	(1, 3)	(1, 5)
	2	(2, 1)	(2, 3)	(2, 5)

En la tabla podemos observar fácilmente el número de casos.

En este caso...
(1, 5)
Número que corresponde al dado pequeño
Número que corresponde al dado grande

Los casos son (1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 3) y (2, 5).

Respuesta: El número total de casos es 6.

Ejercicio **1.4** Se tiran dos dados, uno grande y otro pequeño. Encuentre el número de casos donde el número del dado pequeño es mayor que 3 y el del grande es un número par.

Complete la tabla y resuelva.

Números del dado		Grande		
Pequeño				

2. Resolver *Ejercicio* **1.4**

(10 min)

Solución

9 casos

Números del dado		Grande		
		2	4	6
Pequeño	4	(4, 2)	(4, 4)	(4, 6)
	5	(5, 2)	(5, 4)	(5, 6)
	6	(6, 2)	(6, 4)	(6, 6)

continúa en la siguiente página...

Unidad 7: Manera de contar

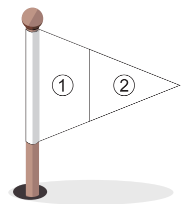
Lección 1: (2/6) Manera de contar

Sección 2: Principio del producto

Objetivo: Encontrar la cantidad de maneras de ocurrencia de 2 casos por medio de una tabla.

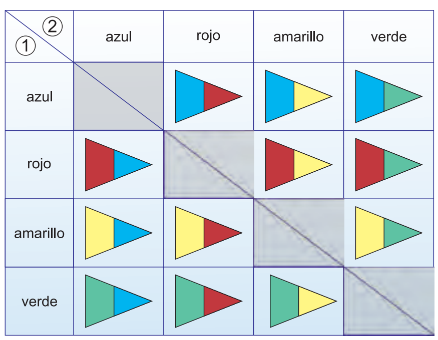
Ejemplo **1.5**

Se dispone de los colores: azul, rojo, amarillo y verde para pintar las dos partes de la bandera con 2 colores diferentes. ¿De cuántas maneras se puede pintar?



Solución:

Se seleccionan los colores en el orden 1 y 2 y se hace la siguiente "tabla de las combinaciones".

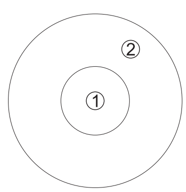


no es válido, ya que se está utilizando el mismo color. Igual sucede para las demás combinaciones en la diagonal.

Respuesta: En total hay 12 maneras.

Ejercicio **1.5** Se dispone de los colores: negro, blanco, azul, rojo y amarillo para pintar las dos partes del tiro al blanco con dos colores diferentes. ¿De cuántas maneras se puede pintar?

Resuelve utilizando la tabla como el *Ejemplo* **1.5**.



153

Libro del Estudiante - Matemáticas 8° grado

4. **Resolver** *Ejercicio* **1.5**

(10 min)

Solución

20 maneras

	Negro	**Blanco**	**Azul**	**Rojo**	**Amarillo**
Negro		N - B	N - A	N - R	N - Am
Blanco	B - N		B - A	B - R	B - Am
Azul	A - N	A - B		A - R	A - Am
Rojo	R - N	R - B	R - A		R - Am
Amarillo	Am - N	Am - B	Am - A	Am - R	

Indicador de logro

Se lanzan dos dados, uno grande y otro pequeño. Encuentre el número de casos posibles donde el número del dado pequeño es menor que 3 y el del dado grande es un número impar.

3. **Encontrar la cantidad de maneras de ocurrencia de 2 casos.**

Ejemplo **1.5**

(10 min)

* Leer el problema y comprender la situación de los dos colores diferentes en las partes de la bandera.

  ¿Cuál es el número de casos ¿De cuántos colores se dispone?

  ¿Cuántas partes tiene la bandera?

  ¿Cómo deben ser los colores que se utilicen en las dos partes de la bandera?

  ¿Cómo podemos saber de cuántas maneras distintas se pueden pintar las dos partes de la bandera?

* Sugerirles que elaboren una tabla para encontrar las distintas maneras de pintar la bandera.

* Concluir que en la tabla aparecen algunas parejas [(azul, azul), (rojo, rojo), (amarillo, amarillo), (verde, verde)] que no cumplen con la condición de ser de distinto color para pintar la bandera y que por lo tanto éstas no forman parte de la respuesta.

* Concluir que en este ejemplo la bandera se puede pintar de 12 maneras distintas.

Indicador de logro

Un estudiante tiene que seleccionar 1 de 3 materias optativas, 1 actividad extraescolar entre teatro, danza y música y 1 de los siguientes idiomas: inglés y francés. ¿Cuántas maneras distintas tiene para escoger? .

1. Encontrar la cantidad de maneras de ocurrencia de 2 casos utilizando un diagrama de árbol.

Ejemplo **1.6**

(10 min)

* Leer el *Ejemplo* **1.4** (sobre el dado pequeño y el dado grande) y pensar en otra forma en cómo organizar los datos para encontrar el número de casos de obtener un número menor que 3 en el dado pequeño y un número impar en el dado grande.

* Sugerir que organicen los datos como lo presenta el libro.

* Llamar a esta forma "diagrama de árbol".

* Mencionar algunas ventajas de organizar los datos en diagramas de árbol.

2. Resolver *Ejercicio* **1.6**

(10 min)

Solución (Página 194)

Comprobar que el número de casos es 9.

3. Encontrar la cantidad de maneras de ocurrencia de 3 casos utilizando un diagrama de árbol.

Ejemplo **1.7**

(12 min)

* Leer el problema y pensar en la forma de organizar los datos para encontrar las maneras posibles de realizar el viaje.

¿Cuántos ciudades puede visitar?

¿En cuántos medios de transporte puede viajar?

¿En cuántos hoteles puede alojarse?

Unidad 7: Manera de contar

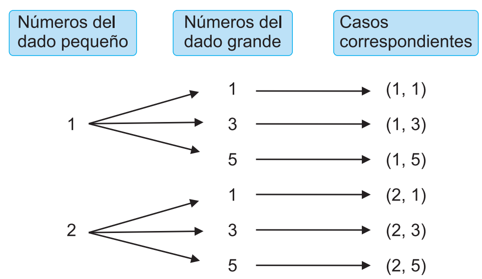
Lección 1: (3/6) Manera de contar

Sección 2: Principio del producto

Objetivo: Encontrar la cantidad de maneras de ocurrencia de 2 o más casos por medio de un diagrama de árbol.

Ejemplo **1.6**

En el *Ejemplo* **1.4** también se pueden mostrar los casos de otra forma diferente a la tabla de las combinaciones.



Esta manera que muestra como ramificaciones se llama "**diagrama de árbol**".
Un diagrama de árbol es una manera para contar las combinaciones en forma ordenada.
Cada una de las ramas muestra una combinación diferente.

Ejercicio **1.6** Exprese en un diagrama de árbol el *Ejercicio* **1.4** .

Ejemplo **1.7**

En los meses de vacaciones un estudiante puede visitar las ciudades de Danlí, Juticalpa o Comayagua. Puede viajar en vehículo propio o bus interurbano y puede alojarse en 3 hoteles: A, B o C.
¿Cuántas maneras posibles hay para que el estudiante tome sus vacaciones?

Solución:

Se puede escoger primero la ciudad, luego el transporte y por último el hotel.

154 Unidad 7 - Manera de contar

¿Cómo puede organizar los datos para saber la cantidad de maneras posibles en las que puede tomar las vacaciones?

* Sugerirles que apliquen lo aprendido anteriomente, es decir, que utilicen una tabla de combinaciones o un diagrama de árbol.

¿Por qué no se puede utilizar una tabla de combinaciones?

¿Por qué es conveniente utilizar un diagrama de árbol?

continúa en la siguiente página...

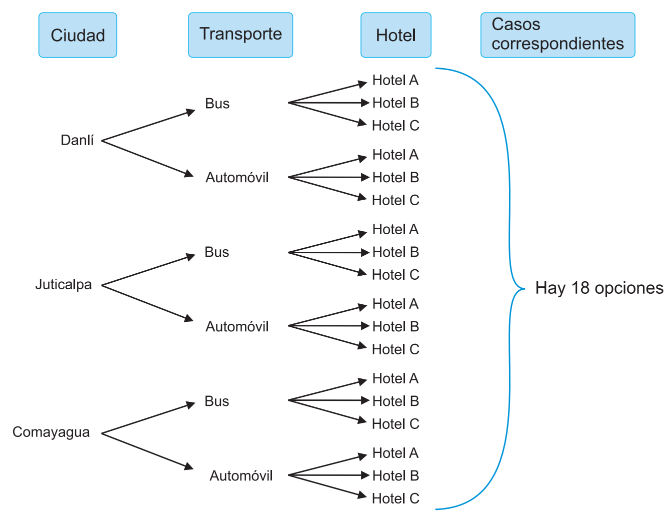
Unidad 7: **Manera de contar**

Lección 1: (3/6) Manera de contar

Sección 2: Principio del producto

Objetivo: Encontrar la cantidad de maneras de ocurrencia de 2 o más casos por medio de un diagrama de árbol.

Vamos a hacer un diagrama de árbol.



Respuesta: Hay 18 maneras.

La ventaja de este diagrama es que se puede continuar con muchas más combinaciones.

Ejercicio **1.7** Un estudiante tiene que seleccionar 1 de 3 materias optativas, 1 actividad extra escolar entre teatro, danza y música y 1 de los siguientes idiomas: inglés o francés.
¿Cuántas maneras distintas tiene para escoger?

155

Libro del Estudiante - Matemáticas 8° grado

Indicador de logro

Un estudiante tiene que seleccionar 1 de 3 materias optativas, 1 actividad extraescolar entre teatro, danza y música y 1 de los siguientes idiomas: inglés y francés. ¿Cuántas maneras distintas tiene para escoger? .

¿Qué datos podemos organizar primero en el diagrama de árbol?

* Sugerirles que el orden de los datos puede ser escoger primero la ciudad, luego el transporte y por último el hotel.

Concluir que hay 18 maneras diferentes de realizar el viaje.

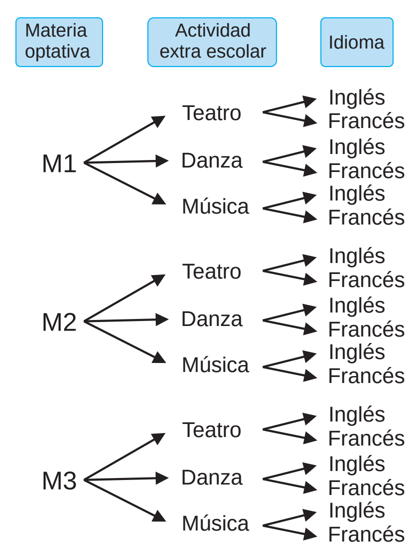
4. Leer la explicación del libro del estudiante.
(3 min)

* Concluir que una de las ventajas del diagrama de árbol es que puede continuar con muchas más combinaciones.

5. Resolver *Ejercicio* **1.7**
(10 min)

Solución

18 maneras.



Indicador de logro

Martha tiene en su armario 2 pantalones, uno de color azul y otro verde y 3 camisas de color blanco, rojo y negro. ¿De cuántas maneras se puede combinar?

1. **Encontrar la cantidad de maneras de ocurrencia de 2 casos utilizando un diagrama de árbol para concluir con el principio del producto.**

   Ejemplo 1.8

   (23 min)

   * Leer el Ejemplo y pensar en la forma de organizar los datos (Sugerir que utilicen el diagrama de árbol).
   * Explicar lo que significa "sin reposición" en el contexto de este problema, asimismo que sepan cómo se forma el número de dos cifras.

     ¿En la primera extracción qué números tienen la posibilidad de salir?

     ¿En la segunda extracción que números tienen la posibilidad de salir?

     ¿Cuántos números distintos de dos cifras se puede formar?
   * Concluir que hay 12 casos y que este número sale de

     4 × 3 = 12.
   * Concluir que significan los números 4, 3 y 12 en el producto 4 × 3 = 12.

2. **Leer el resumen del principio de producto.**

   (2 min)

3. **Resolver Ejercicio 1.8**

   (10 min)

   Solución (Página 194)

   2 x 3 = 6; 6 maneras

4. **Resolver Ejercicio 1.9**

   (10 min)

   Solución

   4 x 2 = 8; 8 casos

Unidad 7: Manera de contar

Lección 1: (4/6) Manera de contar

Sección 2: Principio del producto

Objetivo: Encontrar la cantidad de maneras de ocurrencia de 2 casos aplicando el principio del producto.

Ejemplo 1.8

Se tienen 4 tarjetas numeradas del 1 al 4. De estas 4 tarjetas se hacen 2 extracciones sin reposición y se colocan las tarjetas en el orden de la extracción de izquierda a derecha formando un número de dos cifras. ¿Cuántos números distintos se pueden formar?

Solución:
Vamos a dibujar el diagrama de árbol.

Primera extracción	Segunda extracción	Casos correspondientes
1	2	12
	3	13
	4	14
2	1	21
	3	23
	4	24
3	1	31
	2	32
	4	34
4	1	41
	2	42
	3	43

De este diagrama se sabe que hay 4 × 3 = 12 casos

Sin reposición significa que una vez extraída una tarjeta, esta no puede colocarse o reponerse y extraerse de nuevo.

$4 \times 3 = 12$

Primera extracción · Segunda extracción · Total de números formados

Respuesta: Hay 12 casos.

Principio de producto.
El número total de casos es el producto de los números de casos para cada parte, es decir, $n \times m$.
Para determinar la cantidad total de resultados, multiplica la cantidad de posibilidades de la primera característica por la cantidad de posibilidades de la segunda característica y así sucesivamente.

Ejercicio 1.8 Martha tiene en su armario 2 pantalones, uno de color azul y otro verde y 3 camisas, una de color blanco, una roja y una negra. ¿De cuántas maneras se puede combinar?

Ejercicio 1.9 Se va a decorar una carta. Hay 4 tipos de papeles, rojo, azul, amarillo y verde. También hay 2 tipos de cintas, una dorada y una plateada ¿Cuántos casos se pueden combinar?

156 *Unidad 7 - Manera de contar*

Papel	Cinta	Combinación
Rojo	Dorado	Rojo - Dorado
	Plateado	Rojo - Plateado
Azul	Dorado	Azul - Dorado
	Plateado	Azul - Plateado
Amarillo	Dorado	Amarillo - Dorado
	Plateado	Amarillo - Plateado
Verde	Dorado	Verde - Dorado
	Plateado	Verde - Plateado

Unidad 7: **Manera de contar**

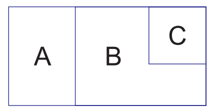
Lección 1: (5/6) Manera de contar

Sección 2: Principio del producto

Objetivo: Encontrar la cantidad de maneras de ocurrencia de 3 o más casos aplicando el principio del producto.

Ejemplo 1.9

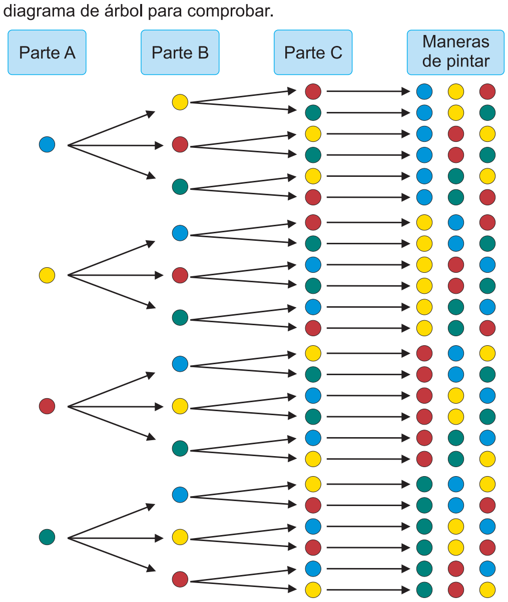
Se dispone de los colores: azul, amarillo, rojo y verde para pintar las tres partes del rectángulo de la derecha con 3 colores diferentes. ¿De cuántas maneras se puede pintar?



Solución:
Si se seleccionan los colores en el orden A, B y C, para la parte A hay 4 opciones, para la parte B hay 3 opciones y para la parte C hay 2 opciones. Por lo tanto el número total de opciones es $4 \times 3 \times 2 = 24$.

Respuesta: Hay 24 maneras.

Un diagrama de árbol para comprobar.



$4 \times 3 \times 2 = 24$

Ejercicio 1.10 Hay 5 estudiantes y 3 cargos vacantes (director/a, subdirector/a y secretario/a) en una directiva. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden elegir?

157

Libro del Estudiante - Matemáticas 8° grado

Indicador de logro

Se van a fotografiar 4 estudiantes uno a la par del otro. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar?

1. **Encontrar la cantidad de maneras de ocurrencia de 3 casos utilizando un diagrama de árbol y el principio del producto.**

   Ejemplo 1.9

   (15 min)

   * Leer el problema y comprender sus condiciones.

   ¿De cuántos colores se dispone?

   ¿Cuántas partes del rectángulo se pintarán?

   Si se escoge la parte A del rectángulo ¿cuántas opciones de colores hay?

   Una vez escogido el color para la parte A ¿cuántas opciones hay para la parte B?

   Una vez escogida los colores para las partes A y B ¿cuántas opciones hay para la parte C?

   ¿Qué principio podemos aplicar en este problema?

   * Concluir que significan los números 4, 3, 2 y 24 en el producto $4 \times 3 \times 2 = 24$.

   * Concluir que el principio del producto se puede aplicar a más de 2 casos (este ejemplo se aplicó a 3 casos).

2. **Resolver Ejercicio 1.10**

   (10 min)

   Solución (Página 194)

   $5 \times 4 \times 3 = 60$

   60 maneras

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Se van a fotografiar 4 estudiantes uno a la par del otro. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar?

3. Encontrar la cantidad de maneras de ocurrencia de 4 casos utilizando un diagrama de árbol y el principio del producto.

Ejemplo 1.10

(10 min)

* Leer el problema y comprender sus condiciones.

  ¿Cuántos niños se van a fotografiar?

  ¿Cuántas opciones tienen los niños para ser ubicados en la primera posición?

  Si un niño ya fue elegido para la primera posición, ¿cuántas opciones tienen los otros niños para la segunda posición?

  Si ya fue elegido un niño para la primera posición y otro niño para la segunda, ¿cuántas opciones tiene el resto de los niños para la tercera posición?

  Y si ya fue escogido un niño para la primera posición, uno para la segunda y otro para la tercera, ¿cuántas opciones tiene el otro niño para la cuarta posición?

  ¿Qué principio se puede aplicar en este problema?
* Concluir que significan los números 4, 3, 2, 1 y 24 en el producto $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.
* Concluir que el principio del producto se puede aplicar a más de 3 casos (este ejemplo se aplicó a 4 casos).

4. Resolver Ejercicio 1.11

(10 min)

Solución

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

120 maneras

Unidad 7: Manera de contar

Lección 1: (5/6) Manera de contar

Sección 2: Principio del producto

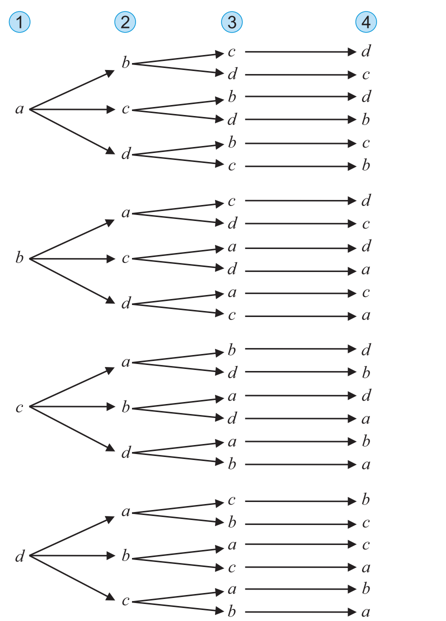
Objetivo: Encontrar la cantidad de maneras de ocurrencia de 3 o más casos aplicando el principio del producto.

Ejemplo 1.10

Se van a fotografiar 4 estudiantes uno a la par del otro. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar?

Solución:
Hay 4 lugares para ubicarse, y vamos a utilizar a, b, c y d para los 4 estudiantes.

<Un diagrama de árbol>



$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Respuesta: Hay 24 maneras.

Ejercicio 1.11 Van a hacer una carrera de relevos. Hay 5 corredores de relevos. Ellos piensan en el orden para correr. ¿Cuántas maneras hay para el orden de relevos?

158 Unidad 7 - Manera de contar

Unidad 7: **Manera de contar**

Lección 1: (6/6) Manera de contar

Sección 2: Principio del producto

Objetivo: Encontrar las posibles combinaciones de 2 casos tomando en cuenta que el caso AB es el mismo que BA.

Ejemplo 1.11

Hay 4 equipos de fútbol. Si cada equipo juega con los otros 3, ¿cuántos partidos pueden jugarse?

Solución:
Si se denominan los 4 equipos con A, B, C y D se hace la siguiente tabla de los partidos.

	A	B	C	D
A		●	●	●
B			●	●
C				●
D				

Respuesta: En total pueden jugarse 6 partidos

En este caso, equipo A vs equipo B es igual que equipo B vs equipo A.
Cuando se tiene que pensar el orden, AB y BA son distintos aunque en algunos casos no se necesita el orden, como por ejemplo el partido AB es el mismo BA.

Ejercicio 1.12 Hay 5 sabores de helados: chocolate, fresa, vainilla, mango y ron con pasas. Al comprar, puede elegir 2 sabores en una copa. ¿En cuántas combinaciones puede pensar para comprar? Resuelva utilizando una tabla como en el Ejemplo 1.11 .

Ejercicio 1.13 Hay 6 tipos de frutas: piñas, uvas, bananos, mangos, manzanas y sandías. Se van a comprar 2 tipos de frutas para llevar a la casa. ¿En cuántas combinaciones puede pensar para comprar? Resuelva utilizando una tabla como en el Ejemplo 1.11 .

159

Libro del Estudiante - Matemáticas 8° grado

3. **Resolver Ejercicio 1.13**
   (10 min)
   Solución
   15 combinaciones

	Piña	Uva	Banano	Mango	Manzana	Sandía
Piña		●	●	●	●	●
Uva			●	●	●	●
Banano				●	●	●
Mango					●	●
Manzana						●
Sandía						

Indicador de logro

Hay 4 equipos de fútbol. Si cada equipo juega con los otros 3, ¿cuántos partidos pueden jugarse?

1. **Encontrar las posibles combinaciones cuando el orden en los casos no es importante.**

   Ejemplo 1.11
   (25 min)

* Leer el problema y comprender sus condiciones.
  ¿Cuántos equipos de fútbol hay?
  ¿Contra quién debe jugar cada equipo?
  ¿Cuántos partidos puede jugar cada equipo?
* Sugerir que hagan una tabla para determinar la cantidad de partidos que pueden jugarse.
  Según la tabla, ¿qué datos deben eliminarse? ¿Por qué?
  ¿Qué sucede con todos los partidos que juega el equipo A en relación a todos los partidos que juega el equipo B?
  R: Algunos partidos son los mismos, por ejemplo, el partido de la parte superior de la tabla AB es el mismo que el de BA.
* Concluir que los datos de la tabla que quedan en la diagonal deben eliminarse porque son partidos establecidos contra el mismo equipo, asimismo se eliminan los datos de debajo de la diagonal porque se repiten con los datos de arriba de la diagonal
* Concluir que en algunos casos no se necesita el orden en los datos, y que hay que determinar en los ejercicios si es importante el orden o no.

2. **Resolver Ejercicio 1.12**
   (10 min)
   Solución (Página 194)
   10 combinaciones

1 **Encontrar la cantidad de maneras de ocurrencia de dos casos aplicando el principio de la suma.**

Solución

3

(1, 2, 6)

2 **Encontrar la cantidad de maneras de ocurrencia de tres casos aplicando el principio de la suma.**

Solución

4 + 2 + 3 = 9

3 **Encontrar la cantidad de maneras de ocurrencia de dos casos utilizando una tabla.**

Solución (Página 194)

6

4 **Encontrar la cantidad de maneras de ocurrencia de dos casos aplicando el principio del producto.**

Solución (Página 194)

5 × 4 = 20

5 **Encontrar la cantidad de maneras de ocurrencia de dos casos aplicando el principio del producto.**

Solución

3 × 4 = 12

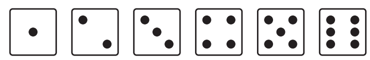
Unidad 7: Manera de contar

(1/2) Ejercicios de la unidad

Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre los principios de la manera de contar.

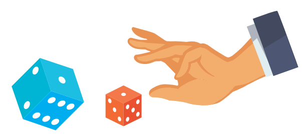
Ejercicios

1 Encuentre el número de casos posibles de obtener los números menores que 3 o mayores que 5 en el lanzamiento de un dado.



2 ¿Cuántas son las maneras de hacer un viaje a un sitio determinado si para poder realizar el viaje hay 4 empresas de autobuses, 2 empresas de trenes y 3 empresas de aviones?

3 En el lanzamiento de dos dados encuentre el número de casos posibles de obtener un total de 7 puntos.

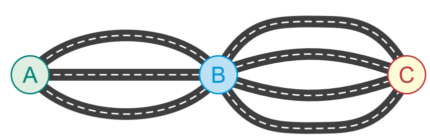


4 Se tienen 5 tarjetas numeradas del 1 al 5, de estas 5 tarjetas se hacen 2 extracciones sin reposición y se colocan las tarjetas en el orden de la extracción de izquierda a derecha formando un número de dos cifras ¿Cuántos números distintos se pueden formar?

1 2 3 4 5

Decena	Unidad
?	?

5 De A a B hay 3 caminos. De B a C hay 4 caminos. Para ir de A a C pasando sólo una vez por B ¿Cuántas rutas hay?

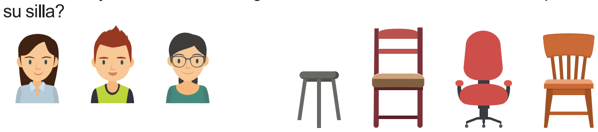


Unidad 7: Manera de contar

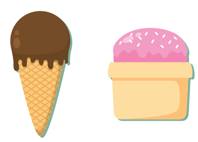
(2/2) Ejercicios de la unidad

Objetivo: Confirmar lo aprendido sobre los principios de la manera de contar.

6 Hay 3 estudiantes y 4 sillas diferentes. ¿De cuántas maneras los estudiantes pueden elegir su silla?



7 Un helado puede venir en un cono o en una copa y los sabores son chocolate, fresa y vainilla. Puede comprar sólo un sabor, ya sea en el cono o en la copa. ¿Cuántos casos hay para comprar?



8 Al comprar un ramo hay que elegir un tipo de flores, un papel y una cinta. Hay 3 tipos de flores, 2 colores de papeles y 2 tipos de cintas. ¿Cuántas maneras hay para comprar un ramo?

9 Hay 4 marcadores, los colores pueden ser negro, rojo, azul y verde. Si elegimos 2 de esos marcadores, ¿cuántas combinaciones de marcadores se pueden hacer?

10 Hay 5 tipos de deportes; fútbol, voleibol, baloncesto, béisbol y ping-pong. Si se quiere jugar 2 de ellos, ¿cuántas combinaciones de deportes hay?

6 Encontrar la cantidad de maneras de ocurrencia de tres casos aplicando el principio del producto.

Solución (Página 195)

$4 \times 3 \times 2 = 24$

7 Encontrar la cantidad de maneras de ocurrencia de dos casos aplicando el principio del producto.

Solución (Página 195)

$2 \times 3 = 6$

8 Encontrar la cantidad de maneras de ocurrencia de tres casos aplicando el principio del producto.

Solución (Página 195)

$3 \times 2 \times 2 = 12$

9 Encontrar las posibles combinaciones de dos casos cuando el orden AB es el mismo que BA.

Solución (Página 195)

6

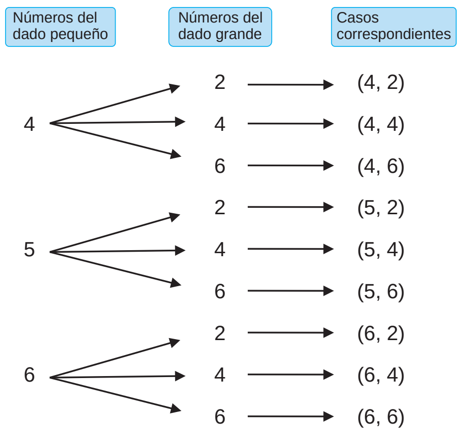
10 Encontrar las posibles combinaciones de dos casos cuando el orden AB es el mismo que BA.

Solución (Página 195)

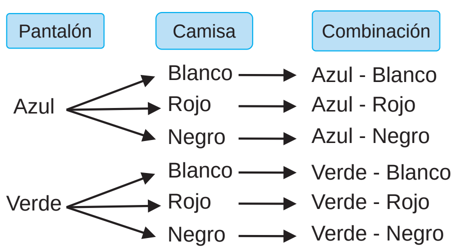
10

Solución de ejercicios de Manera de contar

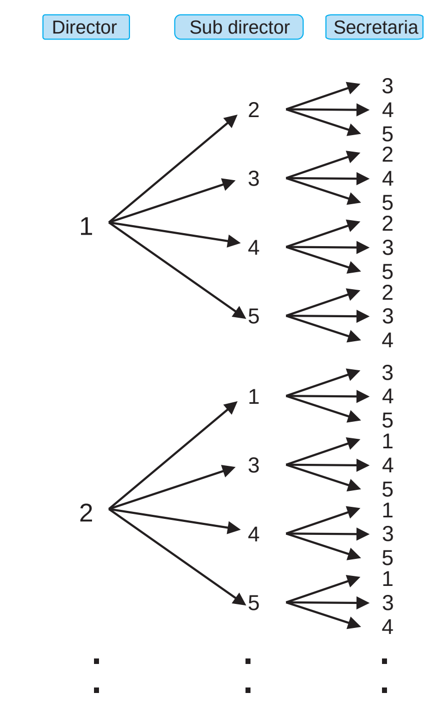
Ejercicio 1.6 (Página 186)



Ejercicio 1.8 (Página 188)



Ejercicio 1.10 (Página 189)



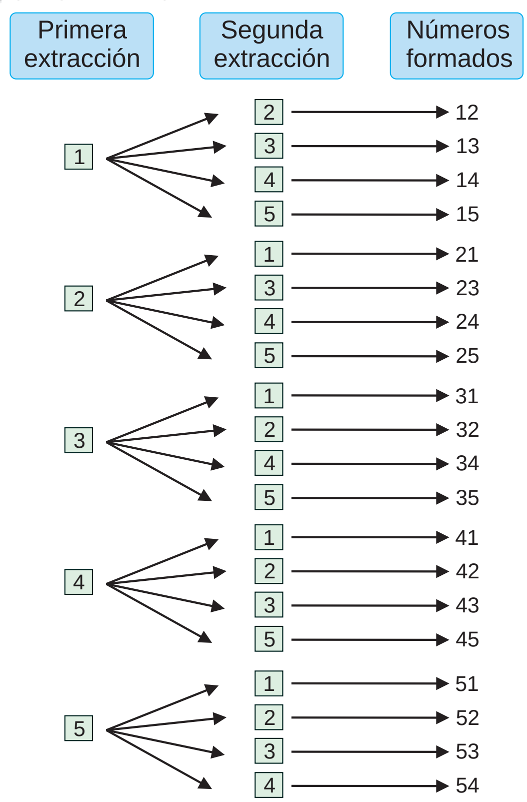
Ejercicio 1.12 (Página 191)

	Chocolate	Fresa	Vainilla	Mango	Ron con pasas
Chocolate		●	●	●	●
Fresa			●	●	●
Vainilla				●	●
Mango					●
Ron con pasas					

3 (Página 192)

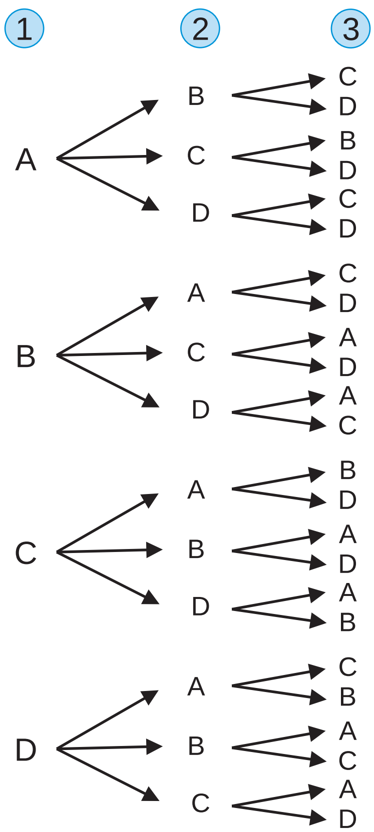
Números del dado		Dado A					
		1	2	3	4	5	6
Dado B	1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

4 (Página 192)

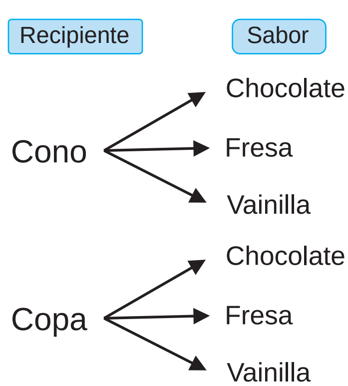


6 (Página 193)

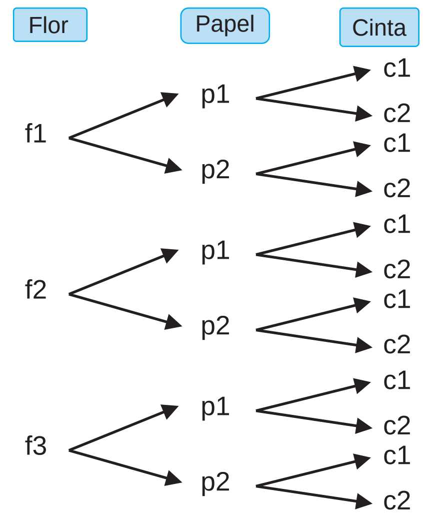
1, 2 y 3 representan personas.
A, B, C y D representan sillas.



7 (Página 193)



8 (Página 193)



9 (Página 193)

	Negro	Rojo	Azul	Verde
Negro		●	●	●
Rojo			●	●
Azul				●
Verde				

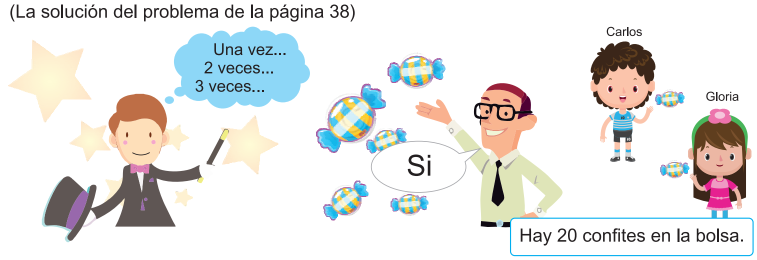
10 (Página 193)

	Fútbol	Voleibol	Baloncesto	Béisbol	Ping pong
Fútbol		●	●	●	●
Voleibol			●	●	●
Baloncesto				●	●
Béisbol					●
Ping pong					

Unidad 7: Manera de contar

¿Cuántos confites tienen?

¿Cómo encuentra el mago las cantidades de confites que tiene Gloria y Carlos?
(La solución del problema de la página 38)



Solución:

x: La cantidad de veces que el maestro da 2 confites a Gloria

y: La cantidad de veces que el maestro da 1 confite a Carlos

1. El total de confites es 20.
2. Como el maestro da a Gloria "2 confites" cada vez. Se puede expresar la cantidad final de confites que Gloria tiene como $2x$.
3. Como el maestro da a Carlos "1 confite"cada vez. Se puede expresar la cantidad final de confites que Carlos tiene como y.
4. Entonces, se puede expresar la cantidad total de confites, como $2x + y = 20$.
5. El mago cuenta la cantidad total de veces que el maestro dice "Si".
6. La cantidad total de veces que el maestro dice "Si" es igual a la suma de x y y. Se puede expresar como $x + y$.
7. Resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado en dos variables.

¡OJO!: x y y no representan las cantidades de confites que tienen ellos.

$$\begin{cases} 2x + y = 20 \\ x + y = \text{la cantidad total de veces que el maestro dice "Si"} \end{cases}$$

Entonces, cuando el maestro dice "Si" 16 veces, $x + y = 16$.

Vamos a resolver $\begin{cases} 2x + y = 20 \\ x + y = 16 \end{cases}$

Encontramos que $x = 4$ y $y = 12$. Por eso, la cantidad final de confites que Gloria tiene es $2x$, o sea $2 \times 4 = 8$, 8 confites. Y la cantidad final de confites que Carlos tiene es y, o sea 12 confites.

Pruebe otra situaciones, como cuando el maestro dice "Si" 12 veces, 14 veces,...

Unidad 8
Probabilidad

Lección 1: Probabilidad

Unidad 8

Probabilidad

(13 horas)

1 Expectativas de logro

- Desarrollan el concepto en forma intuitiva de la probabilidad de eventos iguales, eventos más o menos probables, eventos seguros e imposibles, en situaciones del entorno.

2 Relación y desarrollo

Séptimo grado

Gráficas de faja y circulares
- Gráficas de faja
- Construcción de gráficas de faja con porcentaje
- Gráficas circulares
- Relación de porcentaje y ángulo central de gráficas circulares
- Análisis de tabla conociendo el porcentaje

Octavo grado

Manera de contar
- Principio de la suma
- Principio del producto

Probabilidad
- Relación entre razón y probabilidad
- Fórmula de la probabilidad
- Propiedades de la probabilidad
- Construcción de tablas y diagramas de árbol
- Relación entre la probabilidad de ocurrir y de no ocurrir un evento
- Probabilidad donde los eventos AB y BA son los mismos
- Aplicación de la probabilidad

Noveno grado

Organización y presentación de datos
- Tabla de frecuencia
- Histograma
- Polígono de frecuencia
- Frecuencia relativa
- Moda
- Media
- Mediana

3 Plan de estudio (13 horas)

Lección	Distribución de horas	Contenidos
1. Probabilidad (11 horas)	1/11	• Relación entre la razón y la probabilidad
	2~3/11	• Fórmula de la probabilidad
	4/11	• Propiedades de la probabilidad
	5~6/11	• Uso de tablas y diagramas de árbol para calcular la probabilidad
	7~8/11	• Relación entre la probabilidad de ocurrir un evento y la probabilidad de no ocurrir ese evento
	9/11	• Cálculo de la probabilidad cuando los casos AB y BA son los mismos
	10~11/11	• Aplicaciones de la probabilidad
Ejercicios (2 horas)	1~2/2	

4 Puntos de lección

Análisis de las pruebas diagnósticas 2016 - 2017

Probabilidad

En la mayoría de los centros educativos no llegan hasta esta unidad de probabilidad, por eso los resultados son muy bajos. Además de darse esta situación, los docentes no enseñan esta unidad así que los conocimientos de ellos son débiles. Si sienten la dificultad de esta unidad, por favor primero lea este libro para recordar sus conocimientos y profundizar en los mismos.

Algunos de los resultados son los siguientes:

[Pregunta]

Encuentre la probabilidad de sacar 1 o 6 puntos en un lanzamiento de un dado no cargado.

Institutos: 1%   CEB: 0%   (2017)

[Pregunta]

Encuentre la probabilidad de sacar los puntos menores que tres en un lanzamiento de un dado no cargado.

Institutos: 0%   CEB: 0%   (2017)

Los contenidos de esta unidad no son complicados, es decir, que no es tan difícil mejorar el rendimiento académico, si se aprenden los conocimientos básicos.

Lección 1: Probabilidad

Lanzar un dado, lanzar una moneda o escoger una carta de una baraja son ejemplos de ensayos. Se llama ensayo (o experimento) a la acción cuyo evento (o resultado) depende de la casualidad.

A los resultados de un ensayo (en sus componentes mínimos) se les llama eventos elementales. Por ejemplo, en el ensayo de lanzar un dado, los eventos elementales son: salir el punto 1, el punto 2, el punto 3, el punto 4, el punto 5 y el punto 6.

Los eventos elementales forman un conjunto. A cada subconjunto de este conjunto también se le llama evento, es decir, un evento también es un conjunto de ciertos eventos elementales. Por ejemplo, en el ensayo de lanzar un dado y salir un punto par es un evento que consiste en tres eventos elementales que son, salir el punto 2, el punto 4 y el punto 6. Asimismo, salir un punto mayor que 4 es un evento que consiste en dos eventos elementales que son: salir el punto 5 y el punto 6.

Cuando se repite el mismo ensayo muchas veces se puede considerar la frecuencia relativa de ocurrencia de un evento A.

La frecuencia relativa del evento A se define como:

$$\frac{\textit{Número de casos en los que ocurre el evento A}}{\textit{Número total de eventos elementales del ensayo}}$$

Si en cualquier secuencia de la repetición del mismo ensayo, la frecuencia relativa del evento A se acerca a un valor p, se dice que p es la probabilidad de ocurrir el evento A.

En el primer ejemplo de la unidad se muestra que en el ensayo de tirar un dado no cargado, la frecuencia relativa (que es una razón) de salir el punto 2 se acerca a $\frac{1}{6}$, así que la probabilidad de salir el punto 2 es $\frac{1}{6}$.

En el segundo ejemplo se muestra que en el ensayo de distinguir el sexo de un bebé recién nacido en un país, la frecuencia relativa de nacer niña es 0.486 aproximadamente.

La probabilidad representa la posibilidad de ocurrencia de un evento. Cuanto mayor es la probabilidad, mayor es la posibilidad.

Cuando se puede esperar que la posibilidad de cada evento elemental sea igual se calcula la probabilidad como se presenta a continuación:

Se supone que hay n eventos elementales en total, que no hay otro resultado aparte de estos y que dos eventos elementales no ocurren al mismo tiempo. También se supone que la posibilidad de cada evento elemental es la misma. Entonces si un evento A consiste en a eventos elementales, se tiene que:

La probabilidad de ocurrir el evento A es $\frac{a}{n}$.

Por ejemplo, en el ensayo de tirar un dado no cargado, la posibilidad de salir cada punto es la misma.

Así que, salir un número par consiste en salir el punto 2, 4 o 6, por lo tanto se tiene que la probabilidad de salir un número par es:

$$\frac{a}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Con esta forma de calcular la probabilidad se cumplen las siguientes propiedades de la probabilidad.

Se denota la probabilidad del evento A con p:

1 $0 \leq p \leq 1$

Un evento de probabilidad 0 nunca ocurre.

Un evento de probabilidad 1 siempre ocurre.

2 La probabilidad de no ocurrir un evento A es:

1 – (la probabilidad de ocurrir el evento A).

El procedimiento para encontrar la probabilidad es el siguiente:

1) Enumerar todos los eventos elementales del ensayo.

2) Asegurarse que no hay otro resultado aparte de los eventos elementales del inciso 1 y que dos eventos cualesquiera del inciso 1 no ocurren a la vez.

3) Asegurarse que los eventos elementales tienen la misma posibilidad.

4) Distinguir los eventos elementales que pertenecen al evento A.

5) Dividir la cantidad de eventos elementales del inciso 4 entre la cantidad total de los eventos elementales del inciso 1.

En realidad, para el cálculo de la probabilidad lo que se usa es la cantidad total de los eventos elementales y la cantidad de los eventos elementales que pertenecen al evento A. Encontrar estos números es el objetivo de los incisos 1 y 4.

Tema: Uso de tablas y diagramas de árbol para calcular la probabilidad 1

Ejemplo **1.4** 2 **Pág.** 171 3

Encuentre la probabilidad de que al lanzar al aire dos monedas al mismo tiempo salgan 2 caras.

Solución 4

Posibles casos al lanzar una moneda:
Cara o Escudo

Posibles casos al lanzar dos monedas:
(Cara, Cara), (Cara, Escudo),
(Escudo, Cara), (Escudo, Escudo

$\frac{1}{4}$ ← El número de casos de salir 2 caras
← Total de casos posibles

Respuesta: La probabilidad es $\frac{1}{4}$. 4

6

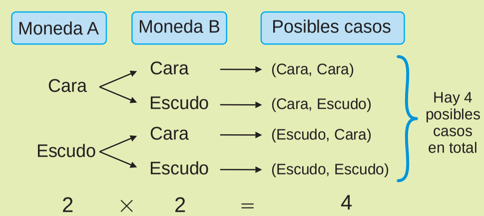
¿De qué forma podemos organizar los datos y los casos para que sea más fácil calcular la probabilidad?

R: Usando a) tablas y
b) diagramas de árbol

1. Llene la siguiente tabla

A \ B	Cara	Escudo
Cara	(Cara, Cara)	(Cara, Escudo)
Escudo	(Escudo, Cara)	(Escudo, Escudo)

2. Construya un diagrama de árbol



Ejercicio **1.5** 2 **Pág.** 171 3

a) ¿Cuál es la probabilidad que salgan una cara y un escudo?

Solución 4

Hay 4 casos totales
Hay 2 casos de salir una cara y un escudo

$\frac{2}{4}$ ← El número de casos de salir una cara y un escudo
← Total de casos posibles

Respuesta: La probabilidad es $\frac{2}{4}$. 4 ✓

b) ¿Cuál es la probabilidad que salgan los 2 escudos?

Solución 4

Hay 4 casos totales
Hay solo 1 caso de salir los dos escudos

$\frac{1}{4}$ ← El número de casos de salir los dos escudos
← Total de casos posibles

Respuesta: La probabilidad es $\frac{1}{4}$. 4 ✓

1 Al inicio de la clase escribir solo la palabra "**Tema**" y hasta el final de la clase (o en el desarrollo de la misma) escribir el contenido del tema.

2 Escribir el número del *Ejemplo* o *Ejercicio*.

3 Escribir el número de **Pág.** del LE para entender dónde se quedaron con respecto al tiempo.

4 Escribir la **Solución** y **Respuesta**.

5 En el problema planteado marcar los datos importantes para poder llegar a la respuesta.

6 Escribir la conclusión en un rectángulo de color rojo.

✓ Marcar en el *Ejercicio* cuando la solución o la respuesta sean correctas.

Nota: Los puntos aquí explicados no siempre aplican todos en un plan de pizarra.

Unidad 8: **Probabilidad**

Lección 1: (1/11) Probabilidad

Objetivo: Establecer la relación entre la razón y la probabilidad.

Indicador de logro

Calcular la probabilidad de sacar el punto 5 al lanzar un dado. (Este objetivo se alcanzará con la clase 2)

1. Pensar en cuál número saldrá más veces al lanzar un dado 10 veces.

(Ejemplo).

(15 min)

* Presentar en la pizarra la tabla del Ejemplo y explicar que esos son los datos obtenidos al lanzar un dado 10 veces. ¿Qué número salió más veces según la tabla?

* Pedir que utilizando un dado llenen la tabla de manera individual. (Puede realizar esta actividad en parejas). ¿Qué número salió más veces según sus datos?

  Según los datos del Ejemplo, ¿cuántas veces salió el punto 2 al lanzar el dado 10 veces?

  Según los datos de la tabla que usted llenó, ¿cuántas veces salió el punto 2 cuando lanzó el dado 10 veces?

* Las respuestas del Ejemplo serán las mismas, sin embargo las referidas a los datos obtenidos por los estudiantes serán variadas, habrá que tener cuidado con dichas respuestas y cerciorarse que los estudiantes las interpretan correctamente.

Unidad 8 Probabilidad

Lección 1: Probabilidad

Se va a lanzar un dado 10 veces. ¿Qué número cree que saldrá más?

(Ejemplo)

Número de tiro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número que se obtuvo	5	6	4	1	2	6	3	5	5	3

(En su caso)

Número de tiro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número que se obtuvo										

¿Cuál número salió más?
En el caso del Ejemplo, el punto 5 salió más que otros números.
En su caso, el punto ______ salió más que otros números.

¿Cuántas veces salió el punto 2?
En el caso del Ejemplo, el punto 2 salió 1 vez en 10 veces de tiros.
En su caso, el punto 2 salió ______ vez o veces en 10 veces de tiros.

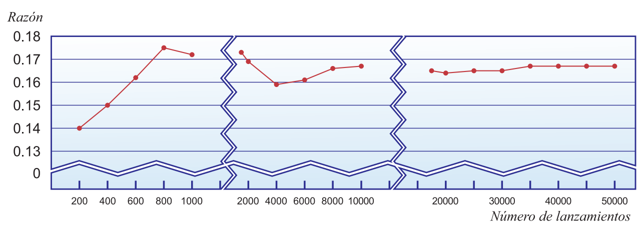
continúa en la siguiente página...

Unidad 8: Probabilidad

Lección 1: Probabilidad
(1/11)

Objetivo: Establecer la relación entre la razón y la probabilidad.

Ahora piense en el número que representa la posibilidad de ocurrir de un evento.
En la situación anterior, al lanzar 10 veces un dado, se encontró que el punto 2 salió 1 vez. Si se sigue este experimento para 200, 400, ..., 50000 tiros, la tabla y la gráfica muestran el valor de la razón $\frac{\textit{La cantidad de veces de sacar el punto 2}}{\textit{Número total de lanzamientos}}$ cuando se lanza repetidamente un dado no cargado.



Número total de tiros	La cantidad de veces de sacar el punto 2	La razón
10	1	0.100
200	28	0.140
400	60	0.150
600	97	0.162
800	140	0.175
1000	172	0.172
1500	259	0.173
2000	338	0.169
4000	636	0.159
6000	966	0.161
8000	1328	0.166
10000	1670	0.167
15000	2475	0.165
20000	3280	0.164
25000	4125	0.165
30000	4950	0.165
35000	5845	0.167
40000	6680	0.167
45000	7515	0.167
50000	8350	0.167

De estas se sabe que cuanto más lanzamientos hay, el valor de la razón de sacar el punto 2 se acerca más a 0.167.

En este caso, 0.167 expresa la posibilidad de ocurrir del evento: lanzar un dado y que salga el punto 2.

Cuando se realiza un ensayo (experimento) cuyo evento (resultado) depende de la casualidad, el número que expresa la posibilidad de ocurrir de un evento se llama **probabilidad** del evento.

Entonces, se puede decir que la probabilidad de sacar el punto 2 al lanzar un dado es 0.167.

Un experimento, en estadística, es cualquier proceso que proporciona datos, numéricos o no numéricos.
Ejemplos:
- Lanzar un dado o una moneda.
- Resolver un examen.
- Comprar un número de la lotería.

165

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

3. Definir un experimento.
(3 min)
* Leer la parte proporcionada en el bombillo y ampliar a otros ejemplos: sacar una tarjeta de una baraja, sacar una esfera de una urna, etc.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro
Calcular la probabilidad de sacar el punto 5 al lanzar un dado. (Este objetivo se alcanzará con la clase 2)

2. Pensar en un número que represente la posibilidad de ocurrir un evento.
(15 min)
* Presentar y analizar la gráfica y la tabla percatándose que muestran el número de veces (10, 200, 400, …, 50,000) que se lanza un dado, la cantidad de veces de sacar el punto 2 y la razón.
* Hacer énfasis que la razón se obtiene de dividir “la cantidad de veces de sacar el punto 2” entre “el número total de lanzamiento del dado”.

  Cuando se lanzó 10 veces el dado, ¿cuántas veces salió el punto 2?, ¿cuál es la razón en este caso?

  Cuando se lanzó 200 veces el dado, ¿cuántas veces salió el punto 2? ¿Cuál es la razón en este caso?
* Hacer preguntas similares para cuando se lanzó 400, …, 50,000 veces el dado.

  ¿Qué le sucede a la razón a medida que aumenta el número de lanzamiento del dado?
* Concluir que a medida aumenta el número de lanzamiento la razón de sacar el punto 2 se acerca a 0.167.
* Concluir que la razón 0.167 expresa la posibilidad de ocurrir el evento de sacar el punto 2 al lanzar un dado.
* Leer el resumen.
* Concluir que la razón obtenida de 0.167 al lanzar un dado y sacar el punto 2 es la **probabilidad** de obtener el punto 2 al lanzar un dado.

Indicador de logro

Calcular la probabilidad de sacar el punto 5 al lanzar un dado. (Este objetivo se alcanzará con la clase 2)

4. Establecer la relación entre la razón y la probabilidad.

(10 min)

* Analizar la tabla percatándose que muestra la razón de nacer niña en relación al número total de nacimientos. ¿Cómo es el número de nacimientos de las niñas en relación al número total de nacimientos por cada año?

¿Cómo es la razón de nacer niña en cada año?

¿Cuál es la probabilidad de nacer niña en ese país?

* Concluir que la razón de nacer niña en ese país es aproximadamente 0.486 y es la misma probabilidad de nacer niña.

* Concluir que en estos casos la razón y la probabilidad tienen el mismo sentido.

5. Concluir cuando un evento es más probable que otro.

(2 min)

* Leer la explicación.

Unidad 8: **Probabilidad**

Lección 1: (1/11) Probabilidad

Objetivo: Establecer la relación entre la razón y la probabilidad.

Otro ejemplo:

La tabla muestra el número de nacimientos en un país. El valor de la razón del número de nacimientos de niñas al total es casi igual cada año y su valor es aproximadamente 0.486. De este hecho se sabe que la probabilidad de nacer una niña en este país es aproximadamente 0.486

Año	Número total de nacimientos	Número de nacimientos de niñas	Razón de nacer niñas
1994	1238328	602413	0.486
1995	1187064	578517	0.487
1996	1206555	586762	0.486
1997	1191665	580760	0.487
1998	1203147	585733	0.487
1999	1177662	572900	0.486
2000	1190547	578399	0.486
2001	1170662	569744	0.487
2002	1153855	561015	0.486
2003	1123610	546874	0.487

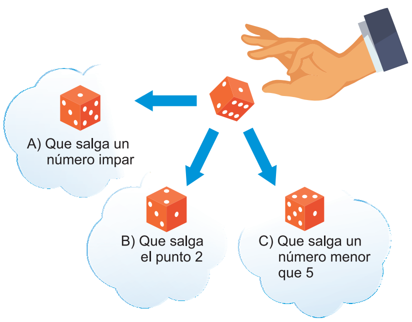
Cuando la probabilidad de un evento es mayor que la probabilidad de otro evento, aquel es más probable que éste.

Unidad 8: **Probabilidad**

Lección 1: Probabilidad
(2/11)

Objetivo: Determinar la fórmula de la probabilidad de un evento.

¿Cuál evento tiene más posibilidad de ocurrir?
Al lanzar un dado, piense en la probabilidad de ocurrir de cada evento.



Evento: Es uno de los resultados de un ensayo.
Ejemplos: Al lanzar un dado se tienen 6 posibles casos: obtener 1, 2, 3, 4, 5 o 6.
Al lanzar una moneda se tienen 2 posibles casos: cara o escudo.

El evento A) se refiere a los casos de obtener 1, 3 o 5, mientras que el evento B) se refiere al caso de obtener 2.

Deténgase en el evento B).
Al lanzar un dado, encuentre la probabilidad que salga el punto 2.
Para la respuesta, la probabilidad de que salga el punto 2 es $\frac{1}{6}$.

De acuerdo a un ensayo se puede decir sobre esta probabilidad lo siguiente:

Paso 1 Hay 6 posibles casos totales: 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
Paso 2 Todos los casos son igualmente probables.
Paso 3 El número de casos que corresponde al evento de que salga el punto 2 es 1.

En este caso se puede decir $\frac{\textit{Número de paso } 3}{\textit{Número de paso } 1} = \frac{1}{6}$, y este resultado es casi igual con la probabilidad que se obtuvo del resultado del ensayo de la página 165.

$\frac{1}{6} = 0.1666...$

$\frac{1}{6} \approx 0.167$

167

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Indicador de logro

Hay 5 tarjetas numeradas del 1 al 5. Encontrar la probabilidad de sacar la tarjeta número 2.

1. Pensar en la probabilidad de ocurrir de un evento.
(15 min)

* Concluir sobre lo que se entiende por evento en estadística (ver la información proporcionada en el bombillo)

* Plantear el problema y comprender la situación.
Al lanzar un dado ¿Cuál evento tiene más posibilidad de ocurrir: A) que salga un número impar, B) que salga el punto 2, o C) que salga un número menor que 5?

* Discutir todas las respuestas y enfocarse en las referidas al inciso B).

En relación al inciso B), ¿cuáles son los posibles casos que se pueden obtener al lanzar un dado?
¿Cómo es la posibilidad de ocurrir de cada uno de esos casos en relación a los otros casos?
¿Cuál es la razón de sacar el punto 2 al lanzar un dado?

* Concluir que la razón de sacar el punto 2 al lanzar un dado es $\frac{1}{6}$.

* Concluir con los tres pasos presentados en el libro para calcular la probabilidad de un evento.

* Concluir con la fórmula para calcular la probabilidad de un evento.

* Concluir que la probabilidad se puede expresar como fracción o como número decimal.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Hay 5 tarjetas numeradas del 1 al 5. Encontrar la probabilidad de sacar la tarjeta número 2.

2. Analizar la fórmula de la probabilidad.

(10 min)

* Leer el resumen y concluir con la fórmula de la probabilidad. Hacer énfasis en el significado de cada uno de los términos de la fórmula de la probabilidad haciendo referencia a que la probabilidad de sacar el punto 2 en el lanzamiento de un dado es $\frac{1}{6}$.

3. Encontrar la probabilidad de sacar el punto 4 al lanzar un dado. *Ejemplo* **1.1**

(10 min)

¿Cuántos posibles casos hay al lanzar un dado?

¿Todos los casos tienen la misma posibilidad de salir?

¿Cuántos casos de salir el punto 4 hay?

* Concluir que la probabilidad de salir el punto 4 es $\frac{1}{6}$ y que hagan uso de la fórmula $\frac{a}{n}$ y los tres pasos planteados en el libro.

4. Resolver *Ejercicio* **1.1**

(10 min)

Solución

a) $\frac{1}{5}$

Hay 5 posibles casos totales: 1, 2, 3, 4 y 5.

Hay 1 caso de sacar la tarjeta 2.

b) $\frac{1}{5}$

Hay 5 posibles casos totales.

Hay 1 caso de sacar la tarjeta 5.

Unidad 8: **Probabilidad**

Lección 1:* *(2/11) Probabilidad

Objetivo: Determinar la fórmula de la probabilidad de un evento.

La probabilidad que salga el punto 2 en el lanzamiento de un dado es $\frac{1}{6}$.

Si en un ensayo hay "n" posibles casos totales donde cada uno de estos casos tiene la misma posibilidad de ocurrir y entre estos "n" casos hay "a" casos donde ocurre el evento A, entonces la probabilidad que ocurra el evento A es:

$\frac{a}{n}$ ... Número de casos en los que ocurre el evento A
... Total de posibles casos

Ejemplo: La probabilidad de salir el punto 2 al lanzar un dado es:

$\frac{1}{6}$ ... Hay una cara del punto 2
... Hay 6 caras (1, 2, 3, 4, 5 y 6)

Generalmente para expresar la probabilidad se usan las fracciones.

Ejemplo **1.1**

Encuentre la probabilidad de salir el punto 4 al lanzar un dado.

Solución:

Paso 1 Hay 6 posibles casos totales: 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
Paso 2 Todos los casos son igualmente probables.
Paso 3 Hay un caso de salir el punto 4.

Luego, sustituimos en $\frac{a}{n}$, $n = 6$ (viene del paso 1) y $a = 1$ (viene del paso 3), entonces, la probabilidad de salir el punto 4 al lanzar un dado es $\frac{1}{6}$.

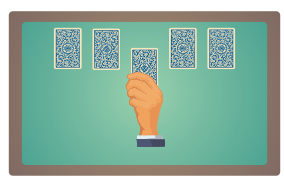
Respuesta: La probabilidad de salir el punto 4 al lanzar un dado es $\frac{1}{6}$.

En el caso del dado se puede esperar que salga cada punto (de 1 a 6) con igual posibilidad. Como hay 6 puntos se puede decir que la probabilidad de salir cada uno de estos 6 puntos es $\frac{1}{6}$.

Ejercicio **1.1** Hay 5 tarjetas numeradas del 1 al 5: 1, 2, 3, 4, 5.
Si se saca una tarjeta, encuentre:

a) La probabilidad de sacar la tarjeta 2.

b) La probabilidad de sacar la tarjeta 5.



Ejercicio adicional

Al lanzar un dado, encuentre:

a) La probabilidad de sacar el número 3.

b) La probabilidad de sacar un número par.

c) La probabilidad de sacar un número mayor que 1.

Solución

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{6}_{2}} = \frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{6}$

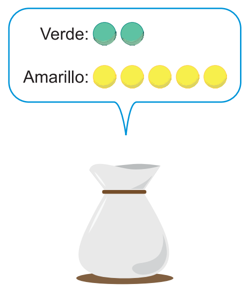
Unidad 8: **Probabilidad**

Lección 1: Probabilidad
(3/11)

Objetivo: Entender la fórmula de la probabilidad de un evento.

Ejemplo 1.2

Hay una bolsa que contiene 2 pelotas verdes y 5 pelotas amarillas. Encuentre la probabilidad de sacar una pelota verde cuando saque una pelota de la bolsa.



Solución:

Piense en los 3 pasos.

Paso ① Hay 7 posibles casos totales.
(Porque hay 7 pelotas en total)

Paso ② Todos los casos son igualmente probables.

Paso ③ Hay 2 casos de sacar una pelota verde.
(Porque hay 2 pelotas verdes)

Luego, sustituimos en $\frac{a}{n}$, $n = 7$ y $a = 2$, entonces:
la probabilidad de sacar una pelota verde es $\frac{2}{7}$.

Respuesta: La probabilidad de sacar una pelota verde es $\frac{2}{7}$.

$\frac{2}{7}$ ← El número de casos de sacar una pelota verde
↑ Total de pelotas

Ejercicio 1.2 Siguiendo el **Ejemplo 1.2**, encuentre la probabilidad de sacar una pelota amarilla.

Ejercicio 1.3 Encuentre las probabilidades de los eventos A) y C) de la página 167.

a) La probabilidad que salga un número impar (evento A).

b) La probabilidad que salga un número menor que 5 (evento C).

Al lanzar un dado, el total de casos posibles siempre es 6.

169

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Ejercicio adicionales

En un sobre hay 4 tarjetas amarillas y 3 tarjetas anaranjadas.
a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una tarjeta amarilla?
b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una tarjeta anaranjada?

Soluciones:
a) $\frac{4}{7}$ b) $\frac{3}{7}$

Indicador de logro

Hay una bolsa con 2 pelotas verdes y 5 pelotas amarillas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una pelota amarilla?

1. Encontrar la probabilidad de sacar una pelota verde de un grupo de 7 pelotas (2 verdes y 5 amarillas).

Ejemplo 1.2

(25 min)

* Leer el problema y comprender la situación.

¿Cuántas pelotas verdes hay? ¿Cuántas pelotas amarillas hay?

¿Cuántas pelotas hay en total?

¿Cuántos posibles casos hay en total al sacar las pelotas?

¿Todos los casos tienen la misma posibilidad de salir?

¿Cuál es la probabilidad de sacar una pelota verde del grupo de pelotas?

Concluir que la probabilidad de sacar una pelota verde es $\frac{2}{7}$, que hagan uso de la fórmula $\frac{a}{n}$ y los tres pasos planteados en el libro. Que interpreten cada uno de los números en la probabilidad $\frac{2}{7}$.

2. Resolver Ejercicio 1.2

(10 min)

Solución

$\frac{5}{7}$ donde 5 es el número de casos de sacar una pelota amarilla, y 7 el total de pelotas.

3. Resolver Ejercicio 1.3

(10 min)

Solución

a) $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ Hay 3 casos de salir un número impar (1, 3 y 5).

b) $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ Hay 4 casos de salir un número menor que 5 (1, 2, 3 y 4).

Indicador de logro

¿Cuál es la probabilidad de sacar el punto 7 al lanzar un dado? ¿Cuál es la probabilidad de sacar el punto 1, 2, 3, 4, 5 o 6 al lanzar un dado?

1. Encontrar la probabilidad de sacar una pelota que tiene color dentro del grupo de las 7 pelotas (2 verdes y 5 amarillas).

Ejemplo 1.3 , inciso a.

(15 min)

* Leer el problema y comprender la situación.

De las 7 pelotas (2 verdes y 5 amarillas), ¿qué posibles casos hay de sacar una pelota de color? ¿Todos los casos tienen la misma posibilidad de salir?

¿Cuál es la probabilidad de sacar una pelota de color del grupo de pelotas?

* Concluir que la probabilidad de sacar una pelota de color es 1 ya que al sustituir en la fórmula de la probabilidad queda $\frac{a}{n} = \frac{7}{7} = 1$.

* Concluir que cuando en un experimento la cantidad total de los casos posibles coinciden con la cantidad de veces que ocurre un caso la probabilidad es 1.

2. Encontrar la probabilidad de sacar una pelota blanca dentro del grupo de las 7 pelotas (2 verdes y 5 amarillas).

Ejemplo 1.3 inciso b.

(15 min)

¿Cuál es la probabilidad de sacar una pelota de color blanco dentro del grupo de las 7 pelotas donde hay 2 verdes y 5 amarillas?

* Abordar de la misma forma que el inciso anterior y concluir con que la probabilidad es 0 ya que según la fórmula $\frac{a}{n} = \frac{0}{7} = 0$.

Unidad 8: Probabilidad

Lección 1: Probabilidad
(4/11)

Objetivo: Determinar las propiedades de la probabilidad.

Ejemplo 1.3

Siguiendo el Ejemplo 1.2, encuentre las siguientes probabilidades.

a) La probabilidad de sacar una pelota que tiene color.

b) La probabilidad de sacar una pelota blanca.

Verde: ● ●

Amarillo: ● ● ● ● ●

Hay 7 casos en total

No hay una pelota blanca en la bolsa

Solución:

a) Al sacar una pelota, todas las 7 pelotas tienen colores como verde y amarillo.

Entonces, la probabilidad de sacar una pelota que tiene color es $\frac{7}{7} = 1$.

Respuesta: La probabilidad de sacar una pelota con color es 1.

b) En la bolsa, no hay ninguna pelota blanca.

Entonces, la probabilidad de sacar una pelota blanca es $\frac{0}{7} = 0$.

Respuesta: La probabilidad de sacar una pelota blanca es 0.

Cuando se está seguro que un evento ocurrirá, la probabilidad de ese evento es 1.
Cuando se está seguro que un evento nunca ocurrirá, la probabilidad de ese evento es 0.
Entonces, podemos decir, $0 \leq$ probabilidad ≤ 1.

Ejercicio 1.4 Encuentre la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos cuando se lanza una vez un dado.

a) La probabilidad de salir el punto 7.

b) La probabilidad de salir uno de los puntos 1, 2, 3, 4, 5 ó 6.

170

Unidad 8 - Probabilidad

3. Leer el resumen sobre las propiedades de la probabilidad.

(5 min)

4. Resolver Ejercicio 1.4

(10 min)

Solución: a) 0 b) 1

Unidad 8: **Probabilidad**

Lección 1: Probabilidad
(5/11)

Objetivo: Construir tablas y diagramas de árbol que representen todos los eventos involucrados en el cálculo de la probabilidad.

Ejemplo 1.4

Encuentre la probabilidad de que al lanzar al aire dos monedas al mismo tiempo salgan 2 caras.

Cara   Escudo

Solución:
Cuando se lanza una moneda, los casos posibles son cara o escudo.
Cuando se lanzan dos monedas: A y B, hay 4 casos posibles. Los resultados se pueden ver en la siguiente tabla.

A \ B	Cara	Escudo
Cara	(Cara, Cara)	(Cara, Escudo)
Escudo	(Escudo, Cara)	(Escudo, Escudo)

$\frac{1}{4}$ ← El número de casos de sacar 2 caras
↑ Total de casos posibles

Sólo hay 1 caso en el que pueden salir 2 caras.
Entonces, la probabilidad que salgan las 2 caras es $\frac{1}{4}$.

Respuesta: La probabilidad que salgan las 2 caras es $\frac{1}{4}$.

También se puede usar el diagrama de árbol como una manera para encontrar el número de casos posibles.

Moneda A	Moneda B	Posibles casos
Cara	Cara	(Cara, Cara)
	Escudo	(Cara, Escudo)
Escudo	Cara	(Escudo, Cara)
	Escudo	(Escudo, Escudo)
2 ×	2 =	4

Hay 4 posibles casos en total

Como la posibilidad de estos 4 casos es igual y hay un caso donde salen 2 caras, entonces la probabilidad que salgan las 2 caras es $\frac{1}{4}$.

Ejercicio 1.5 En la situación anterior:

a) ¿Cuál es la probabilidad que salgan una cara y un escudo?

b) ¿Cuál es la probabilidad que salgan los 2 escudos?

171
Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

2. Resolver Ejercicio 1.5
(10 min)

Solución:

a) $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ Hay 4 posibles casos totales como el Ejemplo 1.4 y hay 2 casos de salir una cara y un escudo.

b) $\frac{1}{4}$ Hay 4 posibles casos totales y hay solo 1 caso de salir los dos escudos.

Indicador de logro

¿Cuál es la probabilidad de sacar una cara y un escudo al lanzar al aire dos monedas al mismo tiempo?

1. Encontrar la probabilidad de salir 2 caras al lanzar al mismo tiempo 2 monedas al aire.

Ejemplo 1.4
(35 min)

* Leer el problema y comprender su situación.
  Cuando se lanza al aire una moneda, ¿cuáles son los posibles casos?
  Y si se lanzan 2 monedas al mismo tiempo, ¿cuáles son los posibles casos?
  ¿Cuál es la probabilidad de salir 2 caras al lanzar 2 monedas al mismo tiempo?
  ¿De qué forma podemos organizar los datos y los casos para que sea más fácil calcular la probabilidad?
* Organizar los datos en una tabla de 2 dimensiones como la que aparece en el libro.
* Resaltar las ventajas de la tabla al mostrar claramente todos los posibles casos.
* Concluir que la probabilidad de salir 2 caras al lanzar 2 monedas al mismo tiempo es $\frac{1}{4}$, hacer énfasis en el significado de cada número.

¿Podremos utilizar un diagrama de árbol para representar los posibles casos?
* Abordar la construcción del diagrama de árbol de forma similar al de la tabla.
* Destacar que en este caso se aplica el principio de conteo del producto para el cálculo del total de casos (2 x 2 = 4).

Indicador de logro

¿Cuál es la probabilidad de sacar al menos 2 caras al lanzar 3 monedas al aire al mismo tiempo?

1. Encontrar la probabilidad de salir al menos 1 cara al lanzar 3 monedas al aire al mismo tiempo.

Ejemplo **1.5**

(30 min)

* Leer el problema y comprender su situación.

  Cuando se lanza al aire una moneda ¿cuáles son los posibles casos?

  Si se lanzan 2 monedas al mismo tiempo ¿cuáles son los posibles casos?

  Y si se lanzan 3 monedas al mismo tiempo ¿cuáles son los posibles casos?

  ¿Cuál es la probabilidad de salir al menos 1 cara al lanzar 3 monedas al mismo tiempo?

  ¿Se podrán organizar los datos en una tabla para determinar todos los posibles casos? ¿Por qué no?

  ¿De qué forma podemos organizar los datos para encontrar todos los posibles casos?
* Construir un diagrama de árbol para sacar todos los posibles casos.
* Cerciorarse que comprenden bien la expresión “al menos 1 cara”.
* Concluir que la probabilidad es $\frac{7}{8}$, hacer énfasis en el significado de cada número.
* Destacar que en este caso se aplica el principio de conteo del producto para el cálculo del total de casos (2 x 2 x 2 = 8).

Unidad 8: **Probabilidad**

Lección 1: ***(6/11)*** Probabilidad

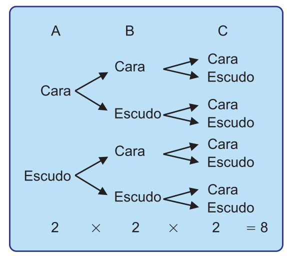
Objetivo: Encontrar la probabilidad utilizando un diagrama de árbol.

Ejemplo **1.5**

Se lanzan 3 monedas al mismo tiempo. Encuentre la probabilidad de que salga al menos 1 cara.

Solución:

Cuando se lanzan 3 monedas: A, B y C, hay 8 posibles casos en total, tal como se muestra en el diagrama de árbol. La posibilidad de estos 8 casos es igual.



“Al menos 1 cara” significa tener:
3 caras,
2 caras y un escudo ó
1 cara y 2 escudos.

Hay 1 caso de que salgan 3 caras como (cara, cara, cara).
Hay 3 casos de que salgan 2 caras y 1 escudo como (cara, cara, escudo), (cara, escudo, cara), (escudo, cara, cara).
Hay 3 casos de que salgan 1 cara y 2 escudos como (cara, escudo, escudo), (escudo, cara, escudo), (escudo, escudo, cara).

Entonces, hay 7 casos en los que sale al menos 1 cara.
Por eso, la probabilidad de que salga al menos 1 cara es $\frac{7}{8}$.

$\frac{7}{8}$ ← El número de casos que salga al menos 1 cara
↑ Total de posibles casos

Respuesta: La probabilidad de que salga al menos una cara es $\frac{7}{8}$.

Ejercicio **1.6** Siguiendo el *Ejemplo* **1.5**, encuentre las siguientes probabilidades.

a) La probabilidad de que salgan 3 caras.

b) La probabilidad de que salgan al menos 2 caras.

2. Resolver *Ejercicio* **1.6**

(15 min)

Solución:

a) $\frac{1}{8}$ Hay 8 posibles casos totales como el *Ejemplo* **1.5** y hay solo 1 caso de salir tres cara como (cara, cara, cara).

b) $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ Hay 8 posibles casos totales y hay 4 casos de salir al menos dos caras (cara, cara, cara), (cara, cara, escudo), (cara, escudo, cara), (escudo, cara, cara).

Unidad 8: Probabilidad

Lección 1: (7/11) Probabilidad

Objetivo: Entender la relación entre la probabilidad de ocurrir un evento y la probabilidad de no ocurrir ese evento.

Ejemplo 1.6

Al lanzar 2 dados, uno A y otro B, encuentre las siguientes probabilidades.

a) La probabilidad de que salga el mismo número en ambos dados.

b) La probabilidad de que no salga el mismo número en ambos dados.

Solución:
En la tabla de casos se muestra que al lanzar 2 dados A y B, el total de casos posibles es $6 \times 6 = 36$.

a) Hay 6 casos donde sale el mismo número en ambos dados, (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5) y (6, 6). El total de posibles casos es 36. Entonces, la probabilidad buscada es $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Respuesta: La probabilidad que salga el mismo número al lanzar 2 dados es $\frac{1}{6}$.

A \ B	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
⚁	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
⚂	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
⚃	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
⚄	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
⚅	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

b) "No salga el mismo número" significa "salgan 2 números diferentes". En la tabla de casos se muestra que hay 30 casos donde al lanzar los dados los 2 números son diferentes. El total de posibles casos es 36. Entonces, la probabilidad buscada es $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.

Respuesta: La probabilidad de que no salga el mismo número al lanzar 2 dados es $\frac{5}{6}$.

Observe que:

(La probabilidad de que no salga el mismo número en 2 dados) = (Total de la probabilidad de todos los casos posibles) − (La probabilidad de que salga el mismo número en ambos dados)

$\frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6}$

La probabilidad de **NO** ocurrir un evento es igual a:
1 − (la probabilidad de ocurrir ese evento)

Ejercicio 1.7 Encuentre las siguiente probabilidades.

a) La probabilidad de salir el punto 1 al lanzar un dado es $\frac{1}{6}$. ¿Cuál es la probabilidad de que no salga el punto 1?

b) La probabilidad que la suma de los puntos sea mayor que 6 al lanzar 2 dados es $\frac{7}{12}$. ¿Cuál es la probabilidad que la suma de los puntos sea menor que 7? (Es decir, no sea mayor que 6)

173

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

3. **Leer el resumen.**
(3 min)

4. **Resolver Ejercicio 1.7**
(12 min)
Solución: a) $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ b) $1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$

Indicador de logro

La probabilidad que la suma de los puntos sea mayor que 6 al lanzar 2 dados es 7/12. ¿Cuál es la probabilidad que la suma de los puntos sea menor que 7 (es decir, que la suma no sea mayor que 6)?

1. **Encontrar la probabilidad que salga el mismo número al lanzar dos dados.**
Ejemplo 1.6, inciso a.
(15 min)

* Leer el problema y comprender su situación.
¿Cuánto es el total de casos posibles al lanzar dos dados?
* Sugerir que hagan una tabla.
¿Cuántos casos hay donde sale el mismo número en ambos dados?
* Concluir que la probabilidad de salir el mismo número al lanzar dos dados es $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

2. **Encontrar la probabilidad que no salga el mismo número al lanzar dos dados.**
Ejemplo 1.6, inciso b.
(15 min)
¿Cuál es la probabilidad de no salir el mismo número al lanzar dos dados?

* Concluir que la probabilidad de no salir el mismo número al lanzar dos dados es $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.
Al lanzar dos dados, ¿cómo podemos relacionar la probabilidad de salir el mismo número con la probabilidad de no salir el mismo número?
* Establecer la relación "la probabilidad de no salir el mismo número" es igual al "total de la probabilidad de los casos posibles" menos la "probabilidad de que salga el mismo número".

Indicador de logro

Al lanzar dos dados, uno pequeño y uno grande, encuentre la probabilidad que la suma de los dos puntos sea 10. Encuentre la probabilidad que la suma de los dos puntos no sea 10.

1. Encontrar la probabilidad que la suma de los dos puntos sea 5 al lanzar dos dados. *Ejemplo* **1.7**

(30 min)

* Leer el problema y comprender su situación.

  Cuando se lanzan dos dados ¿cuáles son los posibles casos?

* Construir la tabla.

  ¿Cuántos casos hay donde la suma de los dos puntos sea 5?

* Concluir que la probabilidad de que la suma de los dos puntos sea 5 al lanzar dos dados es $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

  ¿Cómo podemos obtener la probabilidad de que la suma de los dos puntos al lanzar dos dados no sea 5?

* Encontrar el resultado (probabilidad de no ocurrencia de un evento) aplicando la regla: "1 – (la probabilidad de ocurrir ese evento)".
* Concluir que la probabilidad de que la suma de los dos puntos no sea 5 al lanzar dos dados es $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

2. Resolver *Ejercicio* **1.8**

(15 min)

Solución

a) $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Hay 36 posibles casos totales como *Ejemplo* **1.7**.

Hay 3 casos donde la suma de los dos puntos es 10. (4, 6), (5, 5) y (6, 4).

b) $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

Unidad 8: Probabilidad

Lección 1: (8/11) Probabilidad

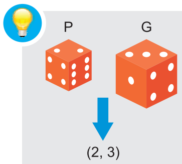
Objetivo: Entender la relación entre la probabilidad de ocurrir un evento y la probabilidad de no ocurrir ese evento.

Ejemplo **1.7**

Al lanzar 2 dados, uno pequeño y uno grande, encuentre la probabilidad de que la suma de los dos puntos sea 5 y la probabilidad de que la suma no sea 5.

Solución:

P \ G	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
⚁	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
⚂	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
⚃	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
⚄	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
⚅	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)



$\frac{4}{36}$ ← El número de casos donde la suma es 5

↑ Total de posibles casos

En 4 casos: (4, 1), (3, 2), (2, 3) y (1 ,4), la suma de los dos puntos al lanzar los dados es 5. Entonces la probabilidad buscada es $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Luego la probabilidad que la suma no sea 5 es $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

Respuesta: La probabilidad que la suma sea 5 es $\frac{1}{9}$.
La probabilidad que la suma no sea 5 es $\frac{8}{9}$.

Ejercicio **1.8** Al lanzar 2 dados, encuentre las siguientes probabilidades.

a) La probabilidad que la suma de los dos puntos sea 10.

b) La probabilidad que la suma de los dos puntos no sea 10.

Ejercicios adicionales

Al lanzar dos dados encuentre:
a) La probabilidad que la suma de los dos puntos sea 6.
b) La probabilidad que la suma de los dos puntos no sea 6.

Solución:

a) $\frac{5}{36}$ Hay 36 posibles casos totales como *Ejemplo* **1.7** y hay 5 casos donde la suma de los dos puntos es 6. (2, 4), (3, 3), (4, 2), (1, 5) y (5, 1).

b) $1 - \frac{5}{36} = \frac{31}{36}$

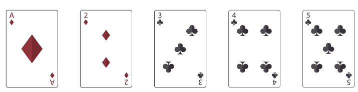
Unidad 8: **Probabilidad**

Lección 1: (9/11) Probabilidad

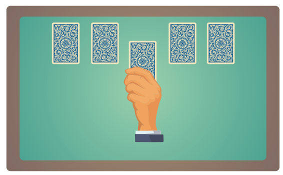
Objetivo: Encontrar la probabilidad utilizando una tabla donde los casos AB y BA son los mismos.

Ejemplo 1.8

Hay 5 tarjetas en una baraja. ¿Cuál es la probabilidad que salga el mismo símbolo (diamante o trébol) al sacar 2 tarjetas al mismo tiempo?



♦1 ♦2 ♣3 ♣4 ♣5



Solución:

Se utilizará una tabla para ver el número de casos posibles y determinar cuál es la probabilidad.

	♦1	♦2	♣3	♣4	♣5
♦1		(♦1, ♦2)	(♦1, ♣3)	(♦1, ♣4)	(♦1, ♣5)
♦2			(♦2, ♣3)	(♦2, ♣4)	(♦2, ♣5)
♣3				(♣3, ♣4)	(♣3, ♣5)
♣4					(♣4, ♣5)
♣5					

(♦2, ♦1) y (♦1, ♦2) son los mismos casos

Hay 10 casos posibles en total al sacar 2 tarjetas al mismo tiempo.
Hay 4 casos en los que puede salir el mismo símbolo, estos son: (♦1,♦2), (♣3,♣4), (♣3,♣5), (♣4,♣5).
Entonces, la probabilidad de que salga el mismo símbolo es $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

$\frac{4}{10}$ ← El número de casos que salga el mismo símbolo
↑ Total de casos posibles

Respuesta: La probabilidad de que salga el mismo símbolo es $\frac{2}{5}$.

Ejercicio 1.9 Hay 4 tarjetas en una baraja, como ♦1, ♦2, ♣3, ♣4.
¿Cuál es la probabilidad de que salgan símbolos diferentes al sacar 2 tarjetas al mismo tiempo? Resuelva utilizando una tabla de casos.

175
Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Indicador de logro

Hay cuatro tarjetas en una baraja, como ♦1, ♦2, ♣3 y ♣4. ¿Cuál es la probabilidad que salgan símbolos diferentes al sacar 2 tarjetas al mismo tiempo? Utilice una tabla de casos.

1. **Encontrar la probabilidad que salga el mismo símbolo al sacar 2 tarjetas de 5 que hay. Ejemplo 1.8**
(30 min)

* Leer el problema y comprender su situación.
¿Cuántas tarjetas hay?
¿Qué símbolos tienen las tarjetas?
¿Cuántas tarjetas tienen el símbolo de diamante?
¿Cuántas tarjetas tienen el símbolo de trébol?
¿Cuánto es el total de casos posibles al sacar 2 tarjetas?
* Construir una tabla de casos.
Al hacer la tabla ¿por qué algunos piensan que hay 10 casos y otros piensan que hay 20 casos?
Concluir a través de la tabla que los casos (♦2,♦1) y (♦1, ♦2) son los mismos y que por eso el total de casos es 10.
¿Cuántos casos hay donde puede salir el mismo símbolo?
* Concluir que la probabilidad de salir el mismo símbolo al sacar dos tarjetas es $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

2. **Resolver Ejercicio 1.9**
(15 min)

Solución

a) $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

	♦1	♦2	♣3	♣4
♦1		(♦1, ♦2)	(♦1, ♣3)	(♦1, ♣4)
♦2			(♦2, ♣3)	(♦2, ♣4)
♣3				(♣3, ♣4)
♣4				

Hay 6 posibles casos totales.
Hay 4 casos en los que pueden salir símbolos diferentes al sacar dos tarjetas al mismo tiempo.

Ejercicios adicionales

Hay 6 tarjetas en una baraja: ♦1, ♦2, ♣3, ♣4, ♣5, ♣6.

¿Cuál es la probabilidad que salgan símbolos iguales al sacar dos tarjetas al mismo tiempo?

Solución: (Página 219)

$\frac{7}{15}$

Indicador de logro

Hay tres tarjetas numeradas como 6, 7 y 8 en una caja. Se extraen 2 tarjetas, la primera corresponde a las decenas y la segunda a las unidades para formar un número de 2 cifras. ¿Cuál es la probabilidad que el número formado sea múltiplo de 2?

1. Encontrar la probabilidad de formar un número de dos cifras que sea múltiplo de 3 al extraer dos de tres tarjetas. *Ejemplo* **1.9**

(30 min)

* Leer el problema y comprender su situación.

¿Cuánto es el total de casos posibles al formar un número de dos cifras al extraer las dos tarjetas?

* Construir un diagrama de árbol.

En la primera extracción, ¿cuántos casos hay?

Para la segunda extracción, ¿cuántos casos hay?

¿Cuántos casos hay en total?, ¿cuáles son?

De los números formados, ¿cuáles son múltiplos de 3?

* Concluir que la probabilidad de formar un número de dos cifras y que sea múltiplo de 3 al extraer dos tarjetas es $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

2. Resolver *Ejercicio* **1.10**

(15 min)

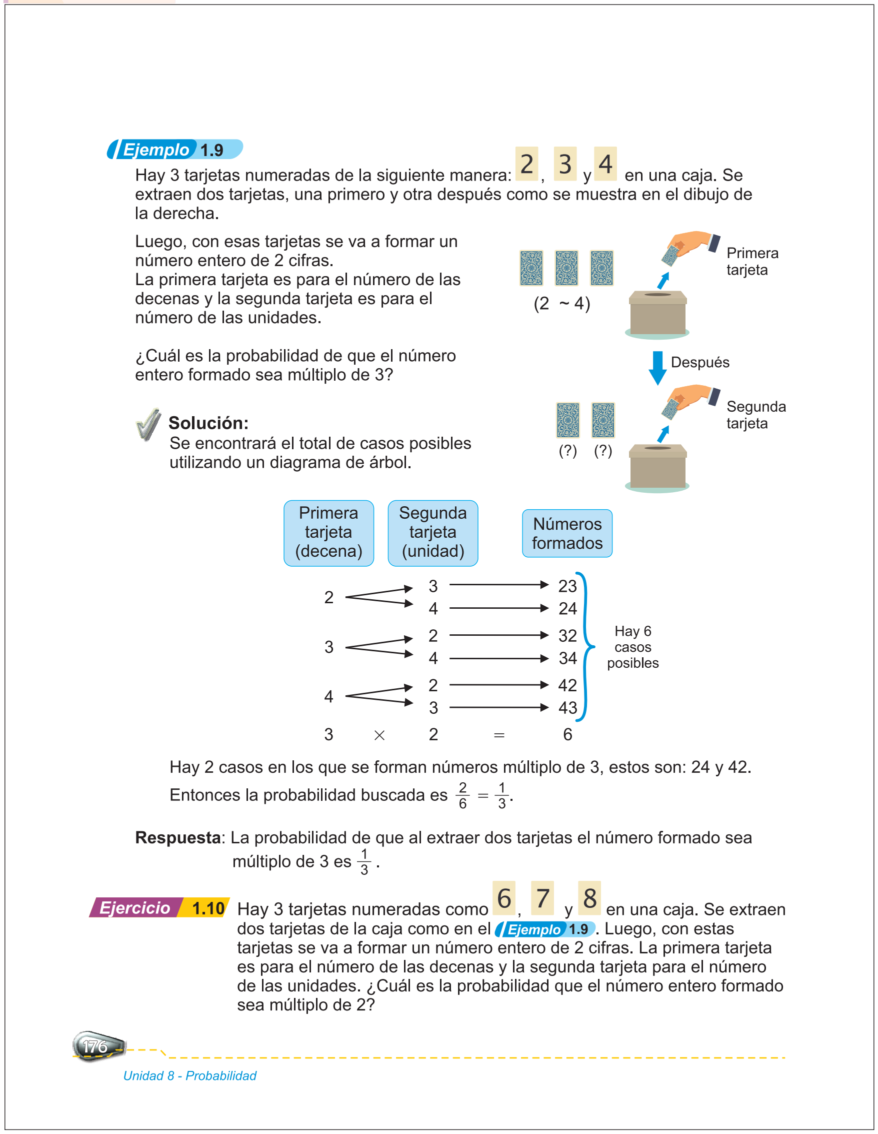
Solución (Página 219)

$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Unidad 8: Probabilidad

Lección 1: (10/11) Probabilidad

Objetivo: Resolver problemas aplicando lo aprendido sobre probabilidad.



Ejemplo **1.9**

Hay 3 tarjetas numeradas de la siguiente manera: 2, 3 y 4 en una caja. Se extraen dos tarjetas, una primero y otra después como se muestra en el dibujo de la derecha.

Luego, con esas tarjetas se va a formar un número entero de 2 cifras.
La primera tarjeta es para el número de las decenas y la segunda tarjeta es para el número de las unidades.

¿Cuál es la probabilidad de que el número entero formado sea múltiplo de 3?

Solución:
Se encontrará el total de casos posibles utilizando un diagrama de árbol.

Primera tarjeta (decena)	Segunda tarjeta (unidad)	Números formados
2	3	23
	4	24
3	2	32
	4	34
4	2	42
	3	43
3 ×	2 =	6

Hay 6 casos posibles

Hay 2 casos en los que se forman números múltiplo de 3, estos son: 24 y 42.
Entonces la probabilidad buscada es $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Respuesta: La probabilidad de que al extraer dos tarjetas el número formado sea múltiplo de 3 es $\frac{1}{3}$.

Ejercicio **1.10** Hay 3 tarjetas numeradas como 6, 7 y 8 en una caja. Se extraen dos tarjetas de la caja como en el *Ejemplo* 1.9. Luego, con estas tarjetas se va a formar un número entero de 2 cifras. La primera tarjeta es para el número de las decenas y la segunda tarjeta para el número de las unidades. ¿Cuál es la probabilidad que el número entero formado sea múltiplo de 2?

176
Unidad 8 - Probabilidad

Ejercicios adicionales

Hay 3 tarjetas numeradas como 5, 6 y 7 en una caja. Se extraen dos tarjetas de la caja como en el *Ejemplo* **1.9**. Luego, con estas tarjetas se va a formar un número entero de 2 cifras. La primera tarjeta es para el número de las decenas y la segunda tarjeta para el número de las unidades. ¿Cuál es la probabilidad que el número entero formado sea impar?

Solución: $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Primera tarjeta (decena)	Segunda tarjeta (unidad)	Números formados
5	6	56
	7	57
6	5	65
	7	67
7	5	75
	6	76

Hay 6 posibles casos totales y hay 4 casos donde el número entero formado es impar (57, 65, 67 y 75).

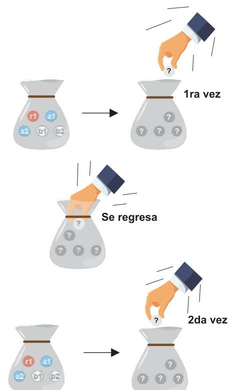
Unidad 8: Probabilidad

Lección 1: (11/11) Probabilidad

Objetivo: Resolver problemas aplicando lo aprendido sobre probabilidad.

Ejemplo 1.10

Hay una bolsa que contiene 1 pelota roja (r1), 2 pelotas azules (a1 y a2) y 2 pelotas blancas (b1 y b2). Se saca una pelota y se anota su color y número. Después, se regresa la pelota a la bolsa. Luego, saca una pelota por segunda vez y de nuevo se anota su color y número.



a) Encuentre la probabilidad de los siguientes eventos:

A) Que salga el mismo color.

B) Que salgan colores diferentes.

Solución:

Se utilizará una tabla de casos para encontrar el total de posibles casos.

1era vez \ 2da vez	r1	a1	a2	b1	b2
r1	(r1, r1)	(r1, a1)	(r1, a2)	(r1, b1)	(r1, b2)
a1	(a1, r1)	(a1, a1)	(a1, a2)	(a1, b1)	(a1, b2)
a2	(a2, r1)	(a2, a1)	(a2, a2)	(a2, b1)	(a2, b2)
b1	(b1, r1)	(b1, a1)	(b1, a2)	(b1, b1)	(b1, b2)
b2	(b2, r1)	(b2, a1)	(b2, a2)	(b2, b1)	(b2, b2)

La tabla muestra que hay $5 \times 5 = 25$ posibles casos en total.

A) Hay 9 casos en los que pueden salir el mismo color. Entonces la probabilidad que salga el mismo color es $\frac{9}{25}$.

Respuesta: La probabilidad que salga el mismo color es $\frac{9}{25}$.

B) Se utilizará la respuesta de la probabilidad de que salga el mismo color, para encontrar la probabilidad de que salgan los colores diferentes. De esta forma, $1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$.

Respuesta: La probabilidad que salgan los colores diferentes es $\frac{16}{25}$.

177

Libro del Estudiante - Matemáticas 8º grado

Indicador de logro

Hay una bolsa que contiene 2 pelotas blancas (b1 y b2) y 3 pelotas amarillas (a1, a2 y a3). Se saca una pelota y se anota su color y número. Se regresa la pelota a la bolsa y se saca una pelota más y se anota su color y número. Encuentre la probabilidad que salga el mismo color. Encuentre la probabilidad que salgan colores diferentes. ¿Cuál de las dos probabilidades es más posible que ocurra?

1. Encontrar la probabilidad de sacar dos pelotas del mismo color de un grupo de 5 pelotas. Ejemplo 1.10

(25 min)

* Leer el problema y comprender su situación.
  ¿Cuántas pelotas hay en la bolsa?
  ¿Cuántas pelotas de cada color hay?
  ¿Cuál es la probabilidad que salgan las dos pelotas del mismo color al hacer las dos extracciones?
* Construir una tabla para determinar los posibles casos.
* A través de la tabla determinar cuántos casos hay en total y cuántos casos hay donde las dos pelotas son del mismo color.
* Concluir que la probabilidad de salir el mismo color es $\frac{9}{25}$.
  ¿Cuál es la probabilidad que las dos pelotas extraídas sean de colores diferentes?
  ¿Cómo podemos encontrar esta probabilidad?
* Encontrar el resultado (probabilidad de no ocurrencia de un evento) aplicando la regla: “1 – (la probabilidad de ocurrir ese evento)”.
* Concluir que la probabilidad que salga los colores diferentes es $\frac{16}{25}$.

continúa en la siguiente página...

Indicador de logro

Hay una bolsa que contiene 2 pelotas blancas (b1 y b2) y 3 pelotas amarillas (a1, a2 y a3). Se saca una pelota y se anota su color y número. Se regresa la pelota a la bolsa y se saca una pelota más y se anota su color y número. Encuentre la probabilidad que salga el mismo color. Encuentre la probabilidad que salgan colores diferentes. ¿Cuál de las dos probabilidades es más posible que ocurra?

2. Encontrar cuando un evento es más probable que otro

(5 min)

De los dos casos sobre la probabilidad de las dos pelotas, que al extraerlas sean del mismo color o de colores diferentes, ¿cuál es más probable que suceda?

* Concluir que cuando la probabilidad de ocurrir de un evento es mayor que la probabilidad de otro evento entonces aquel es más probable que este otro.
* Concluir que el evento B) referido a que las pelotas extraídas sean de diferente color es más probable.

3. Resolver *Ejercicio* **1.11**

(15 min)

Solución (Página 219)

A) $\frac{13}{25}$ B) $\frac{12}{25}$

El evento A) es más probable.

Ejercicios adicionales

Hay dos pelotas amarillas (a1 y a2), una pelota blanca (b1) y una pelota café (c1). Se saca una pelota y se anota su color y número. Después se regresa la pelota a la bolsa. Luego se saca una pelota otra vez. Encuentre las siguientes probabilidades de A) y B), luego conteste ¿Cuál es más posible de ocurrir el evento A) o el evento B)?

Unidad 8: Probabilidad

Lección 1: (11/11) Probabilidad

Objetivo: Resolver problemas aplicando lo aprendido sobre probabilidad.

b) ¿Cuál es más posible de ocurrir: el evento A) o el evento B)?,

La probabilidad del evento A) es $\frac{9}{25}$ y la probabilidad del evento B) es $\frac{16}{25}$.

Cuando la probabilidad de ocurrir de un evento es mayor que la probabilidad de otro evento, aquel es más probable que éste.

Como $\frac{16}{25}$ es mayor que $\frac{9}{25}$, el evento B) es más probable que ocurra.

Respuesta: El evento B) referido a que salgan los colores diferentes, es más posible de ocurrir.

Ejercicio **1.11** Hay una bolsa que contiene 2 pelotas blancas (b1 y b2) y 3 pelotas amarillas (a1, a2 y a3). Se saca una pelota y se anota su color y número. Después se regresa la pelota a la bolsa. Luego se saca una pelota otra vez.
Encuentre las siguientes probabilidades de A) y B), luego conteste ¿Cuál es más posible de ocurrir el evento A) o el evento B)?

A) Que salga el mismo color.

B) Que salgan los colores diferentes.

178 *Unidad 8 - Probabilidad*

A) Que salga el mismo color.

B) Que salgan los colores diferentes.

Solución:

A) $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ B) $1 - \frac{6}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

El evento B) es más probable de ocurrir.

Unidad 8: Probabilidad

(1/2) Ejercicios de la unidad

Objetivo: Resolver problemas aplicando lo aprendido sobre probabilidad.

Ejercicios

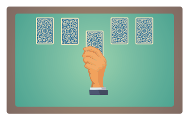
1 Encuentre la probabilidad de que salga el punto 5 al lanzar un dado.

2 Al lanzar un dado, ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número par?

3 Hay 5 tarjetas numeradas del 1 al 5: 1, 2, 3, 4, 5.
Si se saca una tarjeta, encuentre:

a) La probabilidad de sacar la tarjeta 4.

b) La probabilidad de sacar una tarjeta que tenga un número impar.



4 ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 2 dados la suma de sus puntos sea 8?

5 Hay una bolsa que contiene 4 pelotas blancas y 3 pelotas verdes.
Si se saca una pelota, encuentre:

a) La probabilidad de sacar una pelota blanca.

b) La probabilidad de sacar una pelota verde.

c) La probabilidad de sacar una pelota blanca o una pelota verde.

d) La probabilidad de sacar una pelota amarilla.

6 Si se lanza una moneda 2 veces, encuentre:

a) La probabilidad de que salga al menos 1 cara.

b) La probabilidad de que no salga cara.

7 Hay 13 tarjetas numeradas del 1 al 13. Si se saca una tarjeta, encuentre:

a) La probabilidad de que salga una tarjeta que tiene número par.

b) La probabilidad de que salga una tarjeta que tiene número impar.

179

Libro del Estudiante - Matemáticas 8° grado

1 Encontrar a probabilidad de salir un punto al lanzar un dado.

Solución (Página 219)

$\frac{1}{6}$

2 Encontrar la probabilidad de sacar un número par al lanzar un dado.

Solución (Página 219)

$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

3 Encontrar la probabilidad en un problema de extracción de tarjetas.

Solución (Página 219)

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{3}{5}$

4 Encontrar la probabilidad en un problema referido al lanzamiento de dos dados.

Solución (Página 219)

$\frac{5}{36}$

5 Encontrar la probabilidad en un problema que involucra la extracción de pelotas de una bolsa.

Solución (Página 219)

a) $\frac{4}{7}$ b) $\frac{3}{7}$ c) 1 d) 0

6 Encontrar la probabilidad en un problema referido al lanzamiento de una moneda dos veces.

Solución (Página 219)

a) $\frac{3}{4}$ b) $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

7 Encontrar la probabilidad en un problema referido a la extracción de tarjetas.

Solución (Página 219)

a) $\frac{6}{13}$ b) $1 - \frac{6}{13} = \frac{7}{13}$

8 **Encontrar la probabilidad en un problema referido al lanzamiento de una moneda tres veces.**

Solución (Página 219)

a) $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{8}$

9 **Encontrar la probabilidad en un problema referido a la extracción de bolas de una tómbola.**

Solución (Página 220)

a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{5}{9}$ c) $\frac{4}{9}$

10 **Encontrar la probabilidad en un problema referido a la extracción de dos de cinco tarjetas para formar un número de dos cifras.**

Solución (Página 220)

$\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

11 **Encontrar la probabilidad en un problema referido al ordenamiento de 4 letras.**

Solución (Página 220)

$\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

12 **Encontrar la probabilidad en un problema referido a elegir equipos de fútbol.**

Solución (Página 220)

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Unidad 8: **Probabilidad**

(2/2) Ejercicios de la unidad

Objetivo: Resolver problemas aplicando lo aprendido sobre probabilidad.

8 Si se lanza una moneda tres veces. Resuelva utilizando un diagrama de árbol.

a) ¿Cuál es la probabilidad que salga escudo en el tercer lanzamiento?

b) ¿Cuál es la probabilidad que salga cara en el primer y tercer lanzamiento?

c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 2 escudos en los primeros dos lanzamientos?

9 Una bolsa tiene 4 bolas blancas numeradas del 1 al 4 y 5 bolas verdes numeradas del 1 al 5. Al sacar una bola encuentre:

a) La probabilidad de sacar una bola blanca.

b) La probabilidad de sacar una bola numerada con 1, 2 o 5.

c) La probabilidad de sacar una bola blanca con el número 1 o verde con los números 3, 4 o 5.

10 Se tienen 5 tarjetas numeradas del 1 al 5 y se extraen 2 para formar un número de dos cifras (como en el *Ejemplo* 1.9). Si la primera tarjeta forma las decenas y la segunda las unidades, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número que sea par?

11 Se van a ordenar las letras A, B, C y D. ¿Cuál es la probabilidad de que A y D queden en el centro?

12 Hay 5 equipos de fútbol: A, B, C, D y E. Si se eligen por sorteo 2 equipos para jugar un partido, encuentre:

a) La probabilidad de que salga equipo A y equipo E.

b) La probabilidad de que no salga equipo B.

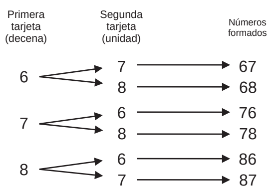
Solución de ejercicios

Ejercicios adicionales (Página 213)

	♦1	♦2	♣3	♣4	♣5	♣6
♦1		(♦1, ♦2)	(♦1, ♣3)	(♦1, ♣4)	(♦1, ♣5)	(♦1, ♣6)
♦2			(♦2, ♣3)	(♦2, ♣4)	(♦2, ♣5)	(♦2, ♣6)
♣3				(♣3, ♣4)	(♣3, ♣5)	(♣3, ♣6)
♣4					(♣4, ♣5)	(♣4, ♣6)
♣5						(♣5, ♣6)
♣6						

Hay 15 posibles casos totales.
Hay 7 casos en los que pueden salir símbolos iguales al sacar dos tarjetas al mismo tiempo.

Ejercicio 1.10 (Página 214)



Hay 6 posibles casos totales.
Hay 4 casos de formar un número entero que sea múltiplo de 2 (68, 76, 78, 86).

Ejercicio 1.11 (Página 216)

	b1	b2	a1	a2	a3
b1	(b1, b1)	(b1, b2)	(b1, a1)	(b1, a2)	(b1, a3)
b2	(b2, b1)	(b2, b2)	(b2, a1)	(b2, a2)	(b2, a3)
a1	(a1, b1)	(a1, b2)	(a1, a1)	(a1, a2)	(a1, a3)
a2	(a2, b1)	(a2, b2)	(a2, a1)	(a2, a2)	(a2, a3)
a3	(a3, b1)	(a3, b2)	(a3, a1)	(a3, a2)	(a3, a3)

A) Hay 25 posibles casos totales.
Hay 13 casos de salir el mismo color.

B) Para diferente color es $1 - \frac{13}{25} = \frac{12}{25}$.

El evento A) más probable ya que

$\frac{13}{25} > \frac{12}{25}$

Ejercicios (Página 217)

1 $\frac{1}{6}$ ← El número de casos de salir el punto 5. ← Total de eventos (1, 2, 3, 4, 5 y 6).

2 $\frac{3}{6}$ ← El número de casos de salir un número par. ← Total de eventos (1, 2, 3, 4, 5 y 6).

3 a) $\frac{1}{5}$ ← El número de casos de salir la tarjeta 4. ← Total de eventos (1, 2, 3, 4 y 5).

b) $\frac{3}{5}$ ← El número de casos de salir un número impar. ← Total de eventos (1, 2, 3, 4 y 5).

4 $\frac{5}{36}$ ← El número de casos de que la suma de sus puntos 8. (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3) y (6, 2). ← Total de eventos.

5 a) $\frac{4}{7}$ ← El número de casos de sacar una pelota blanca. ← Total de pelotas.

b) $\frac{3}{7}$ ← El número de casos de sacar una pelota verde. ← Total de pelotas.

c) Está seguro de ocurrir por eso es 1.

d) Está seguro de no ocurrir por eso es 0.

6 a) $\frac{3}{4}$ ← El número de casos de salir al menos una cara. ← Total de eventos.

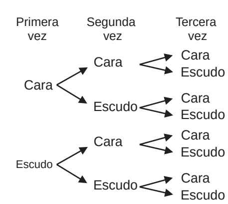
b) $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

7 a) $\frac{6}{13}$ ← El número de veces de salir un número par (2, 4, 6, 8, 10 y 12). ← Total de eventos.

b) $1 - \frac{6}{13} = \frac{7}{13}$

Ejercicios (Página 218)

8



a) $\frac{4}{8}$ ← El número de casos de salir escudo en la tercera vez. ← Total de eventos.

b) $\frac{2}{8}$ ← El número de casos de salir cara en el primer y tercer lanzamiento (cara, cara, cara), (cara, escudo, cara). ← Total de eventos.

c) $\frac{1}{8}$ ← El número de casos de salir exactamente dos escudos en los primeros dos lanzamientos (escudo, escudo, cara), ← Total de eventos.

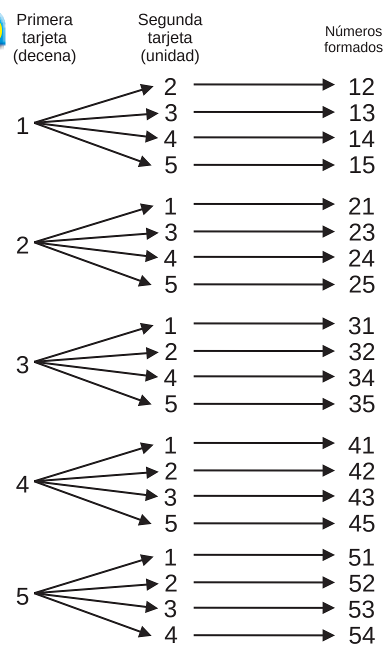
9

a) $\dfrac{4}{9}$ ← El número de casos de sacar una bola blanca. ← Total de bolas.

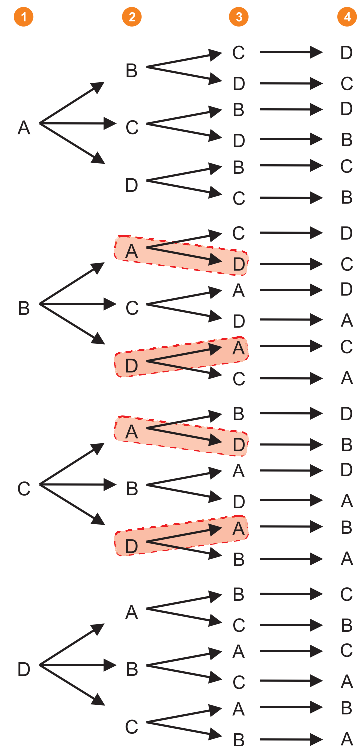
b) $\dfrac{5}{9}$ ← El número de casos de sacar una bola numerada con 1, 2 o 5. (b1, b2, v1, v2 y v5) ← Total de bolas.

c) $\dfrac{4}{9}$ ← Bolas: b1, v3, v4 y v5. ← Total de bolas.

10



11



12

	A	B	C	D	E
A		A-B	A-C	A-D	A-E
B			B-C	B-D	B-E
C				C-D	C-E
D					D-E
E					

Equipo A-B es lo mismo que equipo B-A.

AGRADECIMIENTO

La Secretaría de Educación (SE), La Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (UPNFM) y La Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA), AGRADECEN al personal docente y estudiantes de los centros educativos gubernamentales de Educación Básica y de Educación Media que participaron en el proceso de validación de los contenidos de los Libros del Estudiante y las Guías del Docente de Matemática para 7mo, 8vo y 9no grado que fueron elaborados en el marco del Proyecto de Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemática Fase III (PROMETAM FASE III).

DISTRITO CENTRAL - FRANCISCO MORAZÁN
CEB Gustavo Simón Núñez
Ana Yansy Flores Corrales
Hefzy Paola Núñez Arambú

CEB José Ramón Cálix Figueroa
Sayda Patricia Cáceres Martínez
Yolanda Ivette Fonseca Rivas

CEB José Trinidad Reyes
Jorge Iván Carrasco Salinas

CEB República de China
Sonia Maribel Midence Cruz

CEB República de Costa Rica
Maribel Montes Torres
Juan Carlos Díaz Solano

CEB San Miguel de Heredia
Daniel Stanly Interiano Rápalo

Instituto Héctor Pineda Ugarte
Kelin Issela Fuentes
Braulio Joel Gómez Sierra

Instituto España Jesús Milla Selva
Cindy Gabriela Alméndarez Ávila
Grace Janice Galindo Barahona
Karina Patricia Ávila Burgos

Centro de Investigación e Innovación Educativa (CIIE–UPNFM)
Ana Isabel Osorto Chávez
Samira Iveth Suazo Rivera
Rooy Estiven Fúnez Posadas

CHOLUTECA, CHOLUTECA
CEB José Trinidad Cabañas
Juan Ramón Carranza

Instituto José Cecilio del Valle
Alba Luz Contreras
Margarita Alvarenga Sandoval
Marco Antonio Escobar Espino

DANLÍ, EL PARAÍSO
CEB Martha Irías de Alcántara
Karla Vanessa Sauceda Iglesias

Instituto Departamental de Oriente
Isis Teresa Gallo Avilez
Judith Liliana Zelaya Escalante
Fairon Orlando Amador Peralta
Carlos Roberto Melgara Hernández

GRACIAS, LEMPIRA
Centro de Investigación e Innovación Educativa (CIIE – UPNFM)
Dioselina Serrano Benítez

De igual manera, se les AGRADECE a los estudiantes de último año de la Carrera de Matemática de la UPNFM en su práctica profesional II, que fueron asignados a PROMETAM Fase III durante los años 2016, 2017 y 2018, quienes contribuyeron en la elaboración y revisión de los Libros de Matemática.

ORACIÓN DEL HONDUREÑO

¡Bendiga Dios la pródiga tierra en que nací!

Fecunden el sol y las lluvias sus campos labrantíos;
florezcan sus industrias y todas sus riquezas esplendan
bajo su cielo de zafiro.

Mi corazón y mi pensamiento, en una sola voluntad,
exaltarán su nombre, en un constante esfuerzo por su cultura.

Número en acción en la conquista de sus altos valores morales,
factor permanente de la paz y del trabajo, me sumaré a sus energías;
y en el hogar, en la sociedad o en los negocios públicos,
en cualquier aspecto de mi destino, siempre tendré presente
mi obligación ineludible de contribuir a la gloria de Honduras.

Huiré del alcohol y del juego,
y de todo cuanto pueda disminuir mi personalidad,
para merecer el honor de figurar entre sus hijos mejores.

Respetaré sus símbolos eternos y la memoria de sus próceres,
admirando a sus hombres ilustres
y a todos los que sobresalgan por enaltecerla.

Y no olvidaré jamás que mi primer deber será, en todo tiempo,
defender con valor su soberanía, su integridad territorial,
su dignidad de nación independiente;
prefiriendo morir mil veces antes que ver profanado su suelo,
roto su escudo, vencido su brillante pabellón.

¡Bendiga Dios la prodiga tierra en que nací!

Libre y civilizada, agrande su poder en los tiempos
y brille su nombre en las amplias conquistas de la justicia y del derecho.

Froylán Turcios